УДК 517.51

ОДНОСТАЙНА РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ І ВЛАСТИВОСТІ НАМІОКИ ТА СКОРЦА-ДРАЄОНІ

О.І. Гайдукевич, В.К. Маслюченко

O.I. Haidukevych, V.K. Maslyuchenko. *Uniform equicontinuity and Namioka and Scorza-Dragoni properties*, Matematychni Studii, **12**(1999) 208–212.

We establish conditions under which families of uniformly continuous mappings are uniformly equicontinuous on sets, large in the topological sense or in the sense of measure sets. The obtained results are applied to the investigation of properties of Namioka and Scorza-Dragoni.

О.И. Гайдукевыч, В.К. Маслюченко. *Равностепенная равномерная непрерывность и свойства Намиоки и Скорца-Драгони* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 2. – С.208–212.

Установлены условия, при которых семьи равномерно непрерывных отображений будут равностепенно равномерно непрерывными на больших в топологическом смысле или смысле меры множествах. Полученные результаты применены к изучению свойств Намиоки и Скорца-Драгони.

1. Відображення $f\colon T\times X\to Y$, де T, X і Y — топологічні простори, має *властивість Наміоки*, якщо існує така всюди щільна в T множина A типу G_δ, що f неперервне за сукупністю змінних у кожній точці з $A\times X$. Якщо на просторі T задано міру Бореля μ, то f має *властивість Скорца-Драєоні* у випадку, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує така замкнена в просторі T множина A, що $\mu(T\setminus A)<\varepsilon$ і звуження $f|_{A\times X}$ неперервне за сукупністю змінних. Властивість Наміоки часто мають нарізно неперервні відображення та їх аналоги, а властивість Скорца-Драгоні функції Каратеодорі, тобто відображення $f\colon T\times X\to Y$, що є вимірними за першою змінною і неперервні за другою. Для дослідження цих двох властивостей застосовувались різні методи, і лише у праці [1] отримано одну теорему про властивість Скорца-Драєоні методом, що базується на понятті рівномірної неперервності і раніше використовувався [2–5] при встановленні властивості Наміоки. Потім авторам стало зрозуміло, що теорема з [1] випливає з одного результату з [6], отриманого зовсім іншим методом. Це спонукало нас до пошуку формулювання їх результату, адекватного до застосованого ними методу. При цьому нами з'ясовано, що найкраще для цього підходить поняття одностайної рівномірної неперервності. Використовуючи це поняття, тут ми отримуємо ряд нових теорем, які виявляють певну подібність між вказаними двома напрямками досліджень.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 28A20, 54C05, 54E15.

2. Якщо P деяка властивість відображень, то через $P(X,Y)$ позначається множина всіх відображень $g\colon X \to Y$, які мають властивість P. Для відображення $f\colon T\times X \to Y$ позначимо $f^t(x) = f_x(t) = f(t,x)$. Якщо P і Q деякі властивості відображень, то для відображення $f\colon T\times X\to Y$ визначимо $T_Q(f) = \{t\in T : f^t \in Q(X,Y)\}$ і $X_P(f) = \{x \in X : f_x \in P(T,Y)\}$. Через $PQ(T\times X, Y)$ позначаємо множину всіх відображень $f\colon T\times X\to Y$, для яких $T_Q(f) = T$ і $X_P(f) = X$. Якщо X топологічний простір, то через $\overline{P}Q(T\times X,Y)$ позначається множина всіх відображень $f\colon T\times X\to Y$, для яких $T_Q(f) = T$ і $\overline{X_P(f)} = X$. Літери C, U і L вживаємо для позначення відповідно властивостей неперервності, рівномірної неперервності і вимірності.

Нехай (X,d_X), (Y,d_Y) — метричні простори. Сім'я $(f^t)_{t\in T}$ відображень $f^t : X\to Y$ називається *одностайно рівномірно неперервною*, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для всіх $t\in T$ і для всіх $x', x''\in X$ з нерівності $d_X(x',x'')<\delta$ випливає нерівність $d_Y(f^t(x'), f^t(x''))<\varepsilon$. Якщо, до того ж, T топологічний простір, то сім'ю $(f^t)_{t\in T}$ ми називаємо *одностайно рівномірно неперервною в точці* $t_0\in T$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існують $\delta>0$ і окіл U точки t_0 в T, такі, що для будь-яких $t\in U$ і $x',x''\in X$ з нерівності $d_X(x',x'')<\delta$ випливає нерівність $d_Y(f^t(x'),f^t(x''))<\varepsilon$.

3. Почнемо з простих спостережень, які ми використаємо при доведенні основних результатів.

Лема 1. *Нехай T — топологічний простір, (X,d_X), (Y,d_Y) — метричні простори, відображення $f\colon T\times X\to Y$ неперервне за першою змінною і ε, δ — додатні числа. Тоді множина*

$$A(\varepsilon,\delta) = \{t\in T : (\forall x', x''\in X)(d_X(x',x'')<\delta \Rightarrow d_Y(f^t(x'),f^t(x''))\le\varepsilon)\}$$

є замкненою.

Доведення. Нехай (t_j) — узагальнена послідовність точок з множини $A(\varepsilon,\delta)$, яка збігається до точки $t_0\in T$. Покажемо, що $t_0\in A(\varepsilon,\delta)$. Нехай $x',x''\in X$ і $d_X(x',x'')<\delta$. Оскільки $t_j\in A(\varepsilon,\delta)$, то $d_Y\left(f^{t_j}(x'), f^{t_j}(x'')\right)\le\varepsilon$ для всіх j. Але відображення $f_{x'}$ і $f_{x''}$ неперервні, тому

$$f^{t_j}(x') = f_{x'}(t_j)\to f_{x'}(t_0) = f^{t_0}(x') \quad \text{і} \quad f^{t_j}(x'') = f_{x''}(t_j)\to f_{x''}(t_0) = f^{t_0}(x'').$$

Використовуючи цю обставину і неперервність метрики d_Y ми одержуємо, що $d_Y\left(f^{t_0}(x'), f^{t_0}(x'')\right)\le\varepsilon$, звідки випливає, що $t_0\in A(\varepsilon,\delta)$. □

Для відображення $g\colon (X,d_X)\to(Y,d_Y)$ і числа $\varepsilon>0$ визначимо

$$\Delta_g(\varepsilon) = \{\delta>0 : (\forall x',x''\in X)(d_X(x',x'')<\delta\Rightarrow d_Y(g(x'),g(x''))\le\varepsilon)\}.$$

Лема 2. *Нехай B — всюди щільна підмножина метричного простору (X,d_X), (Y,d_Y) — метричний простір, $g\colon X\to Y$ — неперервне відображення, $h = g|_B$ і $\varepsilon>0$. Тоді $\Delta_g(\varepsilon) = \Delta_h(\varepsilon)$.*

Доведення. Включення $\Delta_g(\varepsilon)\subseteq\Delta_h(\varepsilon)$ очевидне. Нехай $\delta\in\Delta_h(\varepsilon)$, $x',x''\in X$ і $d_X(x',x'')<\delta$. Оскільки $\overline{B} = X$, то існують послідовності точок x'_n і x''_n з множини B, такі, що $x'_n\to x'$, $x''_n\to x''$ і $d_X(x'_n,x''_n)<\delta$ для кожного $n\in\mathbb{N}$. Переходячи в нерівності $d_Y(g(x'_n),g(x''_n))\le\varepsilon$ до границі при $n\to\infty$, отримуємо, що $d_Y(g(x'),g(x''))\le\varepsilon$. Отже, $\delta\in\Delta_g(\varepsilon)$. □

Лема 3. *Нехай T — довільна множина, (X, d_X) і (Y, d_Y) — метричні простори, B — всюди щільний підпростір простору X і $(f^t)_{t\in T}$ — сім'я неперервних відображень $f^t\colon X \to Y$. Тоді*

(i) якщо сім'я $(f^t|_B)_{t\in T}$ одностайно рівномірно неперервна, то такою ж є і сім'я $(f^t)_{t\in T}$;

(ii) якщо T топологічний простір і сім'я $(f^t|_B)_{t\in T}$ одностайно рівномірно неперервна в точці $t_0 \in T$, то і сім'я $(f^t)_{t\in T}$ є такою ж.

Доведення. Згідно з лемою 2 для кожного $t \in T$ і кожного $\varepsilon > 0$ справджується рівність $\Delta_{f^t}(\varepsilon) = \Delta_{f^t|_B}(\varepsilon)$, звідки негайно випливають обидва твердження леми. $\square$

Лема 4. *Нехай T — топологічний простір, (X, d_X), (Y, d_Y) — метричні простори, B — всюди щільна підмножина простору X, $t_0 \in T$, $f\colon T \times X \to Y$ — відображення, таке, що $f_x\colon T \to Y$ неперервні в точці t_0 для всіх $x \in B$ і сім'я $(f^t)_{t\in T}$ одностайно рівномірно неперервна в точці t_0. Тоді f неперервне за сукупністю змінних в кожній точці множини $\{t_0\} \times X$.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Існують окіл U_0 точки t_0 в T і число $\delta > 0$, такі, що для довільного $t \in U_0$ і довільних $x', x'' \in X$ з нерівності $d_X(x', x'') < \delta$ випливає нерівність $d_Y(f^t(x'), f^t(x'')) < \varepsilon/3$. Виберемо довільну точку $x_0 \in X$. Оскільки $\overline{B} = X$, то існує точка $b \in B$, для якої $d_X(x_0, b) < \delta/2$. За неперервністю відображення f_b в точці t_0 існує окіл U точки t_0 в T, такий, що $U \subseteq U_0$ і $d_Y(f_b(t), f_b(t_0)) < \varepsilon/3$ для кожного $t \in U$. Нехай $V = \{x \in X : d_X(x, x_0) < \delta/2\}$. Тоді для довільної точки $(t, x) \in U \times V$ маємо

$$d_Y((f(t,x), f(t_0,x_0)) \le d_Y(f^t(x), f^t(b)) + d_Y(f_b(t), f_b(t_0)) + d_Y(f^{t_0}(b), f^{t_0}(x_0)) < \varepsilon,$$

що і дає нам неперервність відображення f в точці (t_0, x_0). $\square$

4. Перейдемо до встановлення результатів, пов'язаних з властивістю Наміоки.

Теорема 1. *Нехай T — берів простір, (X, d_X), (Y, d_Y) — метричні простори і $f \in CU(T \times X, Y)$. Тоді існує всюди щільна в T множина A типу G_δ, така, що сім'я $(f^t)_{t\in T}$ є одностайно рівномірно неперервною в кожній точці $t \in A$.*

Доведення. Розглянемо множини $A(\varepsilon, \delta)$ з леми 1 і позначимо $A_{m,n} = A(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ для $m, n \in \mathbb{N}$. Оскільки відображення f рівномірно неперервне за другою змінною, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = T$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Нехай $U_{m,n} = \mathrm{int} A_{m,n}$ і $G_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{m,n}$. З того, що простір T берів і множини $A_{m,n}$ замкнені випливає, що відкриті множини G_m є всюди щільними в T для кожного m. Тому, перетин $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ теж є всюди щільною в T множиною типу G_δ. Покажемо, що множина A шукана. Нехай $\varepsilon > 0$, $t_0 \in A$ і $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$. Оскільки $t_0 \in G_{m_0}$, то $t_0 \in U = U_{m_0,n_0}$ для деякого n_0. За побудовою $U \subseteq A_{m_0,n_0}$, отже, $d_Y(f^t(x'), f^t(x'')) \le \frac{1}{m_0} < \varepsilon$ для довільних $t \in U$ і $x'', x'' \in X$ таких, що $d_X(x', x'') < \frac{1}{n_0}$. Але U є відкритим околом точки t_0 в T, отже, сім'я $(f^t)_{t\in T}$ одностайно рівномірно неперервна в точці t_0. $\square$

Доведену теорему можна підсилити, використавши лему 3.

Теорема 2. *Нехай T — берів простір, X, Y — метричні простори і $f \in \overline{CU}(T \times X, Y)$. Тоді в просторі T існує всюди щільна множина A типу G_δ,* *така, що сім'я* $(f^t)_{t\in T}$ *є одностайно рівномірно неперервною в кожній точці* $t \in A$.

Доведення. Нехай $B = X_C(f)$, $g = f|_{T\times B}$. За умовою $\overline{B} = X$. Зрозуміло, що $g \in CU(T \times B, Y)$. За теоремою 1 сім'я $(g^t)_{t\in T}$ є одностайно рівномірно неперервною в кожній точці деякої всюди щільної в T множини A типу G_δ. Тоді, згідно з твердженням (ii) леми 3, сім'я $(f^t)_{t\in T}$ є такою ж. □

Якщо тепер застосувати лему 4, то з теореми отримуємо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай* T *— берів простір,* X, Y *— метричні простори і* $f \in \overline{C}U(T \times X, Y)$. *Тоді* f *має властивість Наміоки.*

Такого роду твердження, сформулюване в дещо інших термінах, було одержане в [4].

5. Теореми 1–3 мають свої паралелі, що стосуються властивості Скорца-Драєоні.

Мірою Бореля на топологічному просторі T ми називаємо поповнення зліченно-адитивної додатньої міри, визначеної на σ-алгебрі $\mathcal{B}(T)$ борельових множин в T. Міра Бореля μ на T називається *регулярною*, якщо для кожної μ-вимірної множини E і кожного $\varepsilon > 0$ існують відкрита в T множина G і замкнена в T множина F, такі, що $F \subseteq E \subseteq G$ і $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

Теорема 4. *Нехай* T *— топологічний простір з регулярною скінченною мірою* μ, X *і* Y *— метричні простори і* $f \in CU(T \times X, Y)$. *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує замкнена в* T *множина* A, *така, що* $\mu(T \setminus A) < \varepsilon$ *і сім'я* $(f^t)_{t\in A}$ *одностайно рівномірно неперервна.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ і множини $A_{m,n}$ такі ж, як і в доведенні теореми 1. Зрозуміло, що $A_{m,n} \subseteq A_{m,n+1}$ для будь-яких m і n, і, подібно, як і раніше, множини $A_{m,n}$ замкнені і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = T$ для кожного m. За властивістю неперервності знизу міри μ, для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує таке n_m, що $\mu(T \setminus A_{m,n_m}) < \varepsilon/2^m$. Множина $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{m,n_m}$ замкнена і $\mu(T \setminus A) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(T \setminus A_{m,n_m}) < \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon/2^m = \varepsilon$. Оскільки $A \subseteq A_{m,n_m}$ для кожного m, то $\frac{1}{n_m} \in \Delta_{f^t}\left(\frac{1}{m}\right)$ для кожного $t \in A$ і кожного m, звідки легко випливає одностайна рівномірна неперервність сім'ї $(f^t)_{t\in A}$. □

Для сепарабельних просторів X і Y теорему 4 можна підсилити, спираючись на наступне узагальнення теореми Лузіна, яке одержується безпосереднім перенесенням методу, застосованого в [7] для числової прямої (див. [1]). Для сепарабельного метризовного простору Y таке узагальнення іншим способом було встановлене у [8].

Теорема 5. *Нехай* T *— топологічний простір з регулярною скінченною мірою* μ, Y *— топологічний простір з другою аксіомою зліченності і* $g\colon T \to Y$ *—* μ*-вимірне відображення. Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує замкнена в* T *множина* A, *для якої* $\mu(T \setminus A) < \varepsilon$ *і звуження* $g|_A$ *неперервне.*

Властивість μ-вимірності відображення g в цій теоремі означає його вимірність як відображення вимірних просторів $(T, \mathcal{A})$ і $(Y, \mathcal{B}(Y))$, де $\mathcal{A}$ — область визначення міри μ, і позначається літерою L.

Теорема 6. *Нехай* T *— топологічний простір з регулярною скінченною мірою* μ, X *і* Y *— сепарабельні метричні простори і* $f \in \overline{L}U(T \times X, Y)$. *Тоді для* *кожного* $\varepsilon > 0$ *існує замкнена в* T *множина* A, *така, що* $\mu(T \setminus A) < \varepsilon$, *сім'я* $(f^t)_{t\in A}$ *одностайно рівномірно неперервна і* $f|_{A\times X} \in \overline{C}U(A \times X, Y)$.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки простір X спадково сепарабельний, то існує така послідовність точок $x_n \in X_L(f)$, що множина $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ щільна в $X_L(f)$, а тому, і у всьому просторі X. Користуючись теоремою 5, для кожного n виберемо замкнену в T множину E_n, таку, що $\mu(T \setminus E_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ і звуження $f_{x_n}|_{E_n}$ неперервне. Позначимо $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Зрозуміло, що $\mu(T \setminus E) < \varepsilon/2$ і звуження $f_{x_n}|_E$ неперервні для кожного n. Отже, $g = f|_{E\times B} \in CU(E \times B, Y)$. За теоремою 4 існує замкнена в E множина A, така, що $\mu(E \setminus A) < \varepsilon/2$ і сім'я $(g^t)_{t\in A}$ одностайно рівномірно неперервна. Тоді A є замкненою і в T, при цьому $\mu(T \setminus A) \le \mu(T \setminus E) + \mu(E \setminus A) < \varepsilon$. Одностайна рівномірна неперервність сім'ї $(f^t)_{t\in A}$ випливає тепер з твердження (і) леми 3. Оскільки всі звуження $f_{x_n}|_A$ неперервні, то $f \in \overline{C}U(A \times X, Y)$. $\square$

Зауважимо, що для метричного, чи навіть секвенціального простору X насправді $\overline{L}U(T \times X, Y) = LU(T \times X, Y)$, бо поточкові границі послідовностей μ-вимірних функцій є μ-вимірними.

Нарешті, як і в попередньому пункті, за допомогою леми 4 отримуємо такий наслідок з теореми 6.

Теорема 7. *Нехай* T *— топологічний простір з регулярною скінченною мірою* μ, X, Y *— сепарабельні метричні простори і* $f \in \overline{L}U(T \times X, Y)$. *Тоді* f *має властивість Скорца-Драєоні.*

Слід зазначити, що іншим способом в [6] показано, що за даних припущень властивість Скорца-Драєоні мають і відображення з ширшого класу $\overline{L}C(T \times X, Y)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К. *Одне узагальнення теореми Скорца-Драєоні* Чернівець. ун-т. – Чернівці, 1996. – 9 с. – Деп. в ДНТБ України, 2030-Ук96.
2. Van Vleck E.B. *A proof of some theorems on pointwise discontinuous functions* Trans. Amer. Math. Soc. – 1907. – V.8. – P.189–204.
3. Hahn H. Theorie der reellen Funktionen. Bd.1. – Berlin: Verlag J. Springer, 1921. – VIII+600 S.
4. Breckenridge J.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces* Bull. Math. Acad. Sinica. – 1976. – V.4, 2. – P.191–203.
5. Маслюченко В.К. *Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень* Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. Зб. наук. праць. – Чернівці, 1990. – С.143–159.
6. Kucia A. *Scorza-Dragoni type theorems* Fund. Math. – 1991. – V.138. – P.197–203.
7. Окстоби Дж. Мера и категория. – М.: Мир, 1974. – 158 с.
8. Stone A.H. *Lusin's theorem* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1996. – V.44. – P.351–357.

Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича

Надійшло 9.03.1999
Після переробки 9.09.1999