УДК 517.9

ПРО ТОПОЛОГІЧНУ ЗБІЖНІСТЬ НАДГРАФІКІВ У ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ

П.І. Когут

P.I. Kogut. *On the topological convergence of epigraphs in a partially ordered vector spaces*, Matematychni Studii, **12**(1999) 161–170.

For every net of maps defined on subsets of a Hausdorff spaces with values in a semiordered by reproducing cone topological vector space, problems of topological convergence of epigraphs and coepigraphs are investigated. The structural representation of their topological limits is obtained.

П.И. Когут. *О топологической сходимости надграфиков в частично упорядоченных векторных пространствах* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 2. – С.161–170.

Для произвольной направленности отображений, определенных на подмножествах хаусдорфова пространства со значениями в полуупорядоченном телесным конусом векторном топологическом пространстве, исследуются вопросы топологической сходимости их надграфиков и конадграфиков. Получено структурное представление для их топологических пределов.

Нехай (X,τ) — довільний гаусдорфів простір, (Y,μ) — дійсний векторний топологічний простір, який напівупорядковано конусом Λ [2]. Конус Λ будемо вважати тілесним і замкненим. Нехай $\overset{(\Lambda)}{\leq}$ — відношення нестрогого порядку на $Y\times Y$, яке породжене конусом Λ. Для довільної підмножини Ω напівупорядкованого векторного простору $\left(Y,\overset{(\Lambda)}{\leq}\right)$ позначимо через $\mathrm{Min}(\,\Omega|\,\Lambda)$ сукупність всіх її $\overset{(\Lambda)}{\leq}$-мінімальних елементів ($x^*\in\Omega$ є $\overset{(\Lambda)}{\leq}$- мінімальним, якщо не існує $y\in\Omega$ такого, що $y\overset{(\Lambda)}{<}x^*$). Подібно означаємо множину $\mathrm{Max}(\,\Omega|\,\Lambda)$. Далі, через $\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}\,(\Omega)$ позначаємо сукупність всіх точних нижніх граней для Ω, тобто $x^*\in Y$ належить $\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}\,(\Omega)$, якщо $x^*\in\mathrm{Max}(\,C|\,\Lambda)$, де множина C означена за правилом $C=\{a\in Y|$ не існує $y\in\Omega$ такого, що $y\overset{(\Lambda)}{<}a\,\}$. Відповідно множину точних верхніх граней для Ω позначимо $\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}\,(\Omega)$.

Означення 1. Елемент $x^*\in Y$ називатимемо мажорантою (мінорантою) множини Ω в $\left(Y,\overset{(\Lambda)}{\leq}\right)$, якщо $x^*\in\mathrm{Min}(\,D|\,\Lambda)$ (відповідно $x^*\in\mathrm{Max}(\,B|\,\Lambda)$), де множини D і B означені за правилами

$$D=\left\{a\in Y\,|\,y\overset{(\Lambda)}{\leq}a\quad\forall\,y\in\Omega\right\},\quad B=\left\{a\in Y\,|\,a\overset{(\Lambda)}{\leq}y\quad\forall\,y\in\Omega\right\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 46A40, 54A20, 54F05.

Надалі для мажоранти й міноранти множини Ω залучатимемо позначення $\mathrm{Major}_\Lambda(\Omega)$ та $\mathrm{Minor}_\Lambda(\Omega)$ відповідно.

Означення 2. Нехай K — довільний конус в Y. Тоді K-оболонкою для Ω називатимемо множину $\mathrm{conv}_K\Omega = \mathrm{Minor}_\Lambda(\Omega) + K$.

Позначимо через $\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}$ наступне бінарне відношення: $x \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} y \iff y \neq [\overset{(\Lambda)}{<}]^-(x)$, де $[\overset{(\Lambda)}{\leq}]^-(x) = \{y \in Y | \, y \overset{(\Lambda)}{\leq} x\}$.

Нехай X_∂ — непорожня множина в X, а $F\colon X_\partial \to Y$ — деяке відображення.

Означення 3. Точною нижньою гранню (інфімумом) відображення $F\colon X_\partial \to Y$ називатимемо множину $\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{x\in X_\partial} F(x)$, яка означена за правилом: $a \in \Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{x\in X_\partial} F(x)$ тоді і тільки тоді, коли $a \notin [\overset{(\Lambda)}{\leq}]^+ (F(x))$ при всіх $x \in X_\partial$ і для будь-якого $b \in Y$ $\left(a \overset{(\Lambda)}{<} b\right)$ існує елемент $x^* \in X_\partial$ такий, що $F(x^*) \overset{(\Lambda)}{<} b$. Подібно визначаємо множину $\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}_{x\in X_\partial} F(x)$. Тут $[\overset{(\Lambda)}{\leq}]^+(x) = \{y \in Y | x \overset{(\Lambda)}{\leq} y\}$.

Нехай Infty — множина невласних елементів на Y. Виділимо із множини Infty дві непорожні підмножини Infty(+) та Infty(−), які відповідно називатимемо сукупністю Λ-найбільших та Λ-найменших елементів на множині $\overline{Y} = Y \cup$ Infty. Надалі розглядаємо відображення, які приймають значення в множині $Y^\bullet \overset{\mathrm{def}}{=} Y \cup$ Infty(+). Порядкові та алгебраїчні операції в "піврозширеному просторі" $Y^\bullet$ вважаємо індукованими з $\overline{Y}$.

Означення 4. Множини

$$\Lambda\text{-}\mathrm{epi}(F|X_\partial) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ (x,\lambda) \in X_\partial \times Y | \, F(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \lambda \right\},$$
$$\Lambda\text{-}\mathrm{coepi}(F|X_\partial) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ (x,\lambda) \in X_\partial \times Y | \, \lambda \notin [\overset{(\Lambda)}{<}]^- (F(x)) \right\}$$

називатимемо Λ-надграфіком та Λ-конадграфіком відображення $F\colon X_\partial \to Y^\bullet$ відповідно.

Зауважимо, що згідно наведеного означення, справедливі такі висновки:
1) $\Lambda\text{-}\mathrm{epi}(F|X_\partial) \subseteq \Lambda\text{-}\mathrm{coepi}(F|X_\partial)$;
2) $\Lambda\text{-}\mathrm{epi}(F|X_\partial) \neq \varnothing$, якщо F є Λ-власним відображенням;
3) якщо $Y = R^1$ і $\Lambda = \{\alpha \in R^1 \, | \alpha \geq 0\}$, то $\Lambda\text{-}\mathrm{epi}(F|X_\partial)$ та $\Lambda\text{-}\mathrm{coepi}(F|X_\partial)$ збігаються й узгоджуються з класичним означенням надграфіка для скалярних функцій;
4) якщо $x^0 \in X_\partial$, то $\left\{\lambda \in Y \, \middle| (x^0,\lambda) \in \Lambda\text{-}\mathrm{epi}(F|X_\partial)\right\} \equiv F(x^0) + \Lambda$;
5) якщо $x^0 \in X_\partial$ і конус Λ замкнений, то

$$\left\{\lambda \in Y | (x^0,\lambda) \in \Lambda\text{-}\mathrm{coepi}(F|X_\partial)\right\} \equiv F(x^0) + Y \setminus (-\,\mathrm{Int}\,\Lambda)\,,$$

де через $\mathrm{Int}\,\Lambda$ позначено внутрішність конуса Λ.

Розглянемо на елементах дійсного гаусдорфового топологічного простору (X,τ) наступну сукупність відображень

$$\{F^\alpha \colon X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}, \tag{1}$$

де A — напрямлена за зростанням множина індексів.

Позначимо через $\tau\text{-}\mathrm{Ls}\,X_\alpha$ та $\tau\text{-}\mathrm{Li}\,X_\alpha$ відповідно нижню та верхню топологічні границі напрямленості підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Згідно [4] $\tau\text{-}\mathrm{Ls}\,X_\alpha$ і $\tau\text{-}\mathrm{Li}\,X_\alpha$

є τ-замкнутими підмножинами топологічного простору (X, τ) і відповідно сукупністю границь та граничних точок для всіх напрямленостей $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, які збудовані за правилом $(\forall \alpha \in A) : x_\alpha \in X_\alpha$. Всюди далі, якщо не обумовлено інше, будемо вважати, що для сукупності $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ виконується умова $\tau\text{-}\mathrm{Li}\, X_\alpha \neq \varnothing$. Позначимо через $\rho = \tau \times \mu$ — топологію добутку на $X \times Y$ і введемо до розгляду такі множини

$$Z_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \rho\text{-}\mathrm{Li}\left(\Lambda\text{-}\mathrm{epi}(F^\alpha | X_\alpha)\right), \quad Z_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \rho\text{-}\mathrm{Ls}\left(\Lambda\text{-}\mathrm{coepi}(F^\alpha | X_\alpha)\right).$$

Тут через Z_1 позначено нижню топологічну границю Λ-надграфіків, а через Z_2 — верхню топологічну границю Λ-конадграфіків для напрямленості відображень (1).

Нехай Ω — довільна підмножина векторного простору Y, $K \subseteq Y$ — тілесний замкнений конус. Введемо наступне поняття.

Означення 5. Конус $\Lambda \subset Y$ називатимемо інваріантним щодо перетину, якщо для будь–яких ϕ та ψ з Y існує елемент $\xi \in Y$ такий, що

$$(\phi + \Lambda) \cap (\psi + \Lambda) = \xi + \Lambda. \tag{2}$$

Зауважимо, що елемент ξ у співвідношенні (2) задовольняє очевидну умову $\xi = \mathrm{Major}_\Lambda\big(\{\phi, \psi\}\big)$. У загальному ж випадку справедливий наступний результат.

Твердження 1. *Нехай Λ — замкнений конус в Y, який є інваріантним щодо перетину. Тоді для будь-якої Λ-обмеженої множини $\Omega \subseteq Y$ існує єдиний елемент $\xi^* \in Y \cup\ Infty(+)$ такий, що $Major_\Lambda\big(\Omega\big) = \xi^*$ і $\bigcap_{x \in \Omega}(x + \Lambda) = Major_\Lambda\big(\Omega\big) + \Lambda$.*

Наслідок 1. *За умов твердження 1*

$$conv_{(-\Lambda)}\Omega \equiv Major_\Lambda\big(\Omega\big) - \Lambda; \qquad conv_\Lambda \Omega \equiv Minor_\Lambda\big(\Omega\big) + \Lambda.$$

Встановимо основні структурні властивості множини Z_1.

Лема 1. *Нехай для напрямленості підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в гаусдорфовому топологічному просторі (X, τ) виконується умова $\tau\text{-}Li\, X_\alpha \neq \varnothing$. Тоді для нижньої топологічної границі Λ-надграфіків відображень (1) справедливе включення:*

$$Z_1 \subseteq \Big\{(x, \lambda) \in \tau\text{-}Li\, X_\alpha \times Y \,|\, \lambda \in \mathbf{M}(x)\Big\}, \tag{3}$$

де

$$\mathbf{M}(x) = \bigcap_{U \in \mathbf{N}_\tau(x)} \Big\{ \bigcup_{\alpha \in A} \Big(\bigcap_{\beta \succ \alpha} conv_\Lambda \Big[\Lambda\text{-}\underset{y \in U \cap X_\beta}{Inf}\ F^\beta(y) \Big] \Big) \Big\}. \tag{4}$$

Доведення. Нехай (x, λ) — довільна пара із множини Z_1. Згідно з означенням нижньої топологічної границі, включення $(x, \lambda) \in Z_1$ можливе тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $U \in \mathbf{N}_\tau(x)$ і $W \in \mathbf{N}_\mu(0)$ існує індекс $\alpha \in A$ такий, що при всіх $\beta \succ \alpha$ $(\beta \in A)$ виконується умова

$$(U \times (W + \lambda)) \cap \left[\Lambda\text{-}\mathrm{epi}(F^\beta | X_\beta)\right] \neq \varnothing. \tag{5}$$

Проте співвідношення (5) виконуватиметься, якщо

$$(U \times (W+\lambda)) \cap \left[\Lambda\text{-epi}(F^{\beta}|X_{\beta} \cap U)\right] \neq \varnothing. \tag{6}$$

Отже, $U \cap X_{\beta} \neq \varnothing$ для всіх $\beta \succ \alpha$. Тому через довільність у виборі околу $U \in \mathbf{N}_{\tau}(x)$ отримуємо, що $x \in \tau\text{-Li}\, X_{\alpha}$.

Нехай λ^* — довільний представник із множини $\Lambda\text{-Sup}\,(W)$. Тоді, беручи за основу означення Λ-надграфіка, співвідношення (6) можна переписати в еквівалентному вигляді:

$$(\forall U \in \mathbf{N}_{\tau}(x))(\forall W \in \mathbf{N}_{\mu}(0))(\forall \lambda^* \in \Lambda\text{-Sup}\,(W))(\exists \alpha \in A)(\forall \beta \succ \alpha)(\exists x_{\beta} \in X_{\beta} \cap U):$$
$$F^{\beta}\left(x_{\beta}\right) \overset{(\Lambda)}{\leq} \lambda + \lambda^*.$$

Отже, $(\forall U \in \mathbf{N}_{\tau}(x))$ $(\forall W \in \mathbf{N}_{\mu}(0))$ $(\forall \lambda^* \in \Lambda\text{-Sup}\,(W))$ існує індекс $\alpha \in A$ такий, що $(\forall \beta \succ \alpha)$:

$$\mathrm{Minor}_{\Lambda}\big(\underset{y \in U \cap X_{\beta}}{\Lambda\text{-Inf}}\ F^{\beta}(y)\big) \overset{(\Lambda)}{\leq} \lambda + \lambda^*. \tag{7}$$

Проте, за наслідком 1, співвідношення (7) можна подати у вигляді

$$\lambda + \lambda^* \in\ \mathrm{conv}_{\Lambda}\Big[\underset{y \in U \cap X_{\beta}}{\Lambda\text{-Inf}}\ F^{\beta}(y)\Big].$$

Тоді, враховуючи довільність вибору параметра β, одержуємо

$$(\forall U \in \mathbf{N}_{\tau}(x))\,(\forall W \in \mathbf{N}_{\mu}(0))\,(\forall \lambda^* \in \Lambda\text{-Sup}\,(W))\,(\exists \alpha \in A):$$
$$\lambda + \lambda^* \in \bigcap_{\beta \succ \alpha} \mathrm{conv}_{\Lambda}\Big[\underset{y \in U \cap X_{\beta}}{\Lambda\text{-Inf}}\ F^{\beta}(y)\Big]. \tag{8}$$

Тому $(\forall U \in \mathbf{N}_{\tau}(x))$ $(\forall W \in \mathbf{N}_{\mu}(0))$ $(\forall \lambda^* \in \Lambda\text{-Sup}\,(W))$:

$$\lambda + \lambda^* \in \bigcup_{\alpha \in A}\Big(\bigcap_{\beta \succ \alpha} \mathrm{conv}_{\Lambda}\Big[\underset{y \in U \cap X_{\beta}}{\Lambda\text{-Inf}}\ F^{\beta}(y)\Big]\Big).$$

Оскільки вибір околів U та W, а отже, й елементів λ^* є довільним, то включення (3)–(4) встановлено. $\square$

Лема 2. *Нехай $\tau\text{-}Li\,X_{\alpha} \neq \varnothing$, а конус $\Lambda \subset Y$ є замкненим і інваріантним щодо перетину. Тоді для будь-якого $x \in \tau\text{-}Li\,X_{\alpha}$ множину $\mathbf{M}(x)$ можна подати у вигляді*

$$\mathbf{M}(x) = \xi(x) + \Lambda, \tag{10}$$

де елемент $\xi(x) \in Y^{\bullet} \cup$ Infty$(-)$ визначається за правилом

$$\xi(x) = Major_{\Lambda}\big(\underset{U \in \mathbf{N}_{\tau}(x)}{\Lambda\text{-}Sup}\ \big\{Minor_{\Lambda}\big(\underset{\alpha \in A}{\Lambda\text{-}Inf} \mathcal{R}\big)\big\}\big),$$
$$\mathcal{R} = Major_{\Lambda}\big(\underset{\beta \succ \alpha}{\Lambda\text{-}Sup}\big\{Minor_{\Lambda}\big(\underset{y \in U \cap X_{\beta}}{\Lambda\text{-}Inf}\ F^{\beta}(y)\big)\big\}\big). \tag{11}$$

Доведення. Нехай (x, λ) — довільна пара із Z_1, U — довільний фіксований окіл з $\mathbf{N}_\tau(x)$. Оскільки конус Λ є інваріантним щодо перетину, то існує елемент $\xi\,(U, \alpha, \beta)$ такий, що $(\forall U \in \mathbf{N}_\tau(x))$ $(\forall W \in \mathbf{N}_\mu(0))$ $(\forall \lambda^* \in \Lambda\text{-Sup}\,(W))$ $(\exists \alpha \in A)$ $(\forall \beta \succ \alpha)$:

$$\lambda + \lambda^* \in \xi\,(U, \alpha, \beta) + \Lambda, \tag{12}$$

$$\mathrm{Minor}_\Lambda \big(\underset{y \in U \cap X_\beta}{\Lambda\text{-Inf}} F^\beta(y) \big) \overset{(\Lambda)}{\leq} \lambda + \lambda^*. \tag{13}$$

Тоді, за твердженням 1, для елемента $\xi\,(U, \alpha, \beta)$ справедливе зображення

$$\xi\,(U, \alpha, \beta) = \mathrm{Minor}_\Lambda \big(\underset{y \in U \cap X_\beta}{\Lambda\text{-Inf}} F^\beta(y) \big).$$

Проте, множину $\bigcap\limits_{\beta \succ \alpha} \mathrm{conv}_\Lambda \Big[\Lambda\text{-Inf}_{y \in U \cap X_\beta} F^\beta(y) \Big]$ можна подати у вигляді

$$\bigcap_{\beta \succ \alpha} \mathrm{conv}_\Lambda \Big[\underset{y \in U \cap X_\beta}{\Lambda\text{-Inf}} F^\beta(y) \Big] = \xi\,(U, \alpha) + \Lambda.$$

Тому, приймаючи до уваги співвідношення (12)–(13), умову (8) перепишемо у наступному вигляді: $(\forall U \in \mathbf{N}_\tau(x))$ $(\forall W \in \mathbf{N}_\mu(0))$ $(\forall \lambda^* \in \Lambda\text{-Sup}\,(W))$ $(\exists \alpha \in A)$:

$$\lambda + \lambda^* \in \xi(U, \alpha) + \Lambda, \tag{14}$$

$$\underset{\beta \succ \alpha}{\Lambda\text{-Sup}} \Big\{ \mathrm{Minor}_\Lambda \big(\underset{y \in U \cap X_\beta}{\Lambda\text{-Inf}} F^\beta(y) \big) \Big\} \overset{(\Lambda)}{\leq} \lambda + \lambda^*.$$

Отже, $\xi\,(U, \alpha) = \mathrm{Major}_\Lambda \big(\Lambda\text{-Sup}_{\beta \succ \alpha} \big\{ \mathrm{Minor}_\Lambda \big(\Lambda\text{-Inf}_{y \in U \cap X_\beta} F^\beta(y) \big) \big\} \big)$. Позначимо

$$S_\alpha \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{\beta \succ \alpha} \mathrm{conv}_\Lambda \Big[\underset{y \in U \cap X_\beta}{\Lambda\text{-Inf}} F^\beta(y) \Big]. \tag{15}$$

Тоді, у відповідності до (14), для елементів напрямленості $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ справедливе зображення $(\forall \alpha \in A) : S_\alpha = \xi\,(U, \alpha) + \Lambda$. Проте, як випливає із (15), для кожної пари індексів (α, α') таких, що $\alpha \succ \alpha'$, справджується співвідношення

$$S_\alpha \supseteq S_{\alpha'}. \tag{16}$$

Тобто $\xi\,(U, \alpha') + \Lambda \subseteq \xi\,(U, \alpha) + \Lambda$ для всіх $\alpha \succ \alpha'$. Тому, напрямленість підмножин $\big\{\xi\,(U, \alpha) + \Lambda\big\}_{\alpha \in A}$ є монотонно зростаючою за включенням. Отже, для $\big\{S_\alpha\big\}_{\alpha \in A}$ топологічна границя $\mu\text{-Lm}\, S_\alpha$ існує і визначається за правилом

$$\mu\text{-Lm}\, S_\alpha = S = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha. \tag{17}$$

Нехай існує елемент $\xi(U) \in Y$ такий, що $\xi\,(U, \alpha) \xrightarrow{\mu} \xi(U)$. Тоді, враховуючи (16) можемо записати

$$S = \xi(U) + \Lambda. \tag{18}$$

Припустимо протилежне: напрямленість $\{\xi(U,\alpha)\}_{\alpha\in A}$ є μ-розбіжною. Тоді за означенням (17), для монотонно зростаючої напрямленості $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ виконуватиметься тотожність $S=\bigcup_{\alpha\in A}S_\alpha=Y$. Отже, зображення (18) буде справедливим для кожного елементу $\xi(U)\in$ Infty$(-)$.

Тому, враховуючи наведене, умова (9) набуває вигляду:

$$(\forall U\in\mathbf{N}_\tau(x))\,(\forall W\in\mathbf{N}_\mu(0))\,(\forall\lambda^*\in\Lambda\text{-Sup}\,(W)):\lambda+\lambda^*\in\xi\,(U)+\Lambda, \tag{19}$$
$$\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{\alpha\in A}\Big[\mathrm{Major}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}_{\beta\succ\alpha}\big\{\mathrm{Minor}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{y\in U\cap X_\beta}F^\beta(y)\big)\big\}\big)\Big]\overset{(\Lambda)}{\leq}\lambda+\lambda^*.$$

Звідки знаходимо

$$\xi(U)=\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{\alpha\in A}\Big[\mathrm{Major}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}_{\beta\succ\alpha}\big\{\mathrm{Minor}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{y\in U\cap X_\beta}F^\beta(y)\big)\big\}\big)\Big].$$

Проте, як випливає із співвідношення (19) та твердження 1, існує елемент $\xi(x)\in Y^\bullet\cup$ Infty$(-)$ такий, що

$$\lambda+\lambda^*\in\bigcap_{U\in\,\mathrm{N}_\tau(x)}(\xi(U)+\Lambda)=\xi(x)+\Lambda, \tag{20}$$
$$\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x)}\Big\{\mathrm{Minor}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{\alpha\in A}\mathcal{R}\big)\Big\}\overset{(\Lambda)}{\leq}\lambda+\lambda^*, \tag{21}$$

де величина $\mathcal{R}$ означена в (11). Отже,

$$\xi(x)=\mathrm{Major}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x)}\big\{\mathrm{Minor}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{\alpha\in A}\mathcal{R}\big)\big\}\big).$$

Оскільки множина $W\in\mathbf{N}_\mu(0)$, а отже й елементи $\lambda^*\in\Lambda\text{-Sup}\,(W)$ в (20), (21) вибрані довільно, то співвідношення (10) встановлено. $\square$

Нехай $F\colon\Omega\to Y^\bullet$ — довільне відображення, а $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — довільна напрямленість в (Y,μ). Надалі, залучатимемо наступні позначення:

$$\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{y\in\Omega}F(y)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Minor}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{y\in\Omega}F(y)\big),\quad \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}_{y\in\Omega}F(y)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Major}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}_{y\in\Omega}F(y)\big),$$
$$\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Sup}}_{y\in\Omega}F(y)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Minor}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Sup}_{y\in\Omega}F(y)\big),\quad \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Inf}}_{y\in\Omega}F(y)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Major}_\Lambda\big(\Lambda\text{-}\mathrm{Inf}_{y\in\Omega}F(y)\big),$$
$$\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Liminf}}_{\alpha\in A}a_\alpha=\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}_{\alpha\in A}\Big\{\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{\beta\succ\alpha}a_\beta\Big\},\quad \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}_{\alpha\in A}a_\alpha=\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{\alpha\in A}\Big\{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}_{\beta\succ\alpha}a_\beta\Big\}.$$

Лема 3. *Нехай конус $\Lambda\subset Y$ є іваріантним щодо перетину і для напрямленості підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в топологічному гаусдорфовому просторі (X,τ) виконується умова $\tau\text{-}Li\,X_\alpha\neq\varnothing$. Тоді для нижньої топологічної границі Λ-надграфіків відображень (1) справджуються включення*

$$\Lambda\text{-}epi(F^{VV}|\tau\text{-}Li\,X_\alpha)\subseteq\rho-\ Li\,(\Lambda\text{-}epi(F^\alpha|X_\alpha))\subseteq\Lambda\text{-}epi(F^V|\tau\text{-}Li\,X_\alpha), \tag{22}$$

де відображення $F^V\colon(\tau\text{-}Li\,X_\alpha)\to Y^\bullet$ *та* $F^{VV}\colon(\tau\text{-}Li\,X_\alpha)\to Y^\bullet$ *означені за правилами*

$$F^V(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\Lambda\text{-}\overline{Sup}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x)}\Big\{\Lambda\text{-}\overline{Limsup}_{\alpha\in A}\Big[\Lambda\text{-}\underline{Inf}_{y\in U\cap X_\alpha}F^\alpha(y)\Big]\Big\},$$

$$F^{VV}(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\Lambda\text{-}\overline{Sup}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x)}\Big\{\Lambda\text{-}\overline{Limsup}_{\alpha\in A}\Big[\Lambda\text{-}\overline{Inf}_{y\in U\cap X_\alpha}F^\alpha(y)\Big]\Big\}. \tag{23}$$

Доведення. Включення $\rho\text{-Li}\,(\Lambda\text{-epi}(F^\alpha|X_\alpha))\subseteq\Lambda\text{-epi}(F^V|\tau\text{-Li}\,X_\alpha)$ безпосередньо випливає з леми 2 та означення Λ-надграфіка $\Lambda\text{-epi}(F|\Omega)$. Встановимо включення $\Lambda\text{-epi}(F^{VV}|\tau\text{-Li}\,X_\alpha)\subseteq\rho\text{-Li}\,(\Lambda\text{-epi}(F^\alpha|X_\alpha))$. Для цього розглянемо довільну пару $(x,\lambda)\in\Lambda\text{-epi}(F^{VV}|\tau\text{-Li}\,X_\alpha)$. Згідно з (23) та означенням операції $\Lambda\text{-}\overline{\text{Limsup}}$, це включення можливе тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$\Lambda\text{-}\overline{\text{Sup}}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x)}\Big\{\Lambda\text{-}\underline{\text{Inf}}_{\alpha\in A}\Big(\Lambda\text{-}\overline{\text{Sup}}_{\beta\succ\alpha}\Big[\Lambda\text{-}\overline{\text{Inf}}_{y\in U\cap X_\beta}F^\beta(y)\Big]\Big)\Big\}\stackrel{(\Lambda)}{\le}\lambda.$$

Отже, $(\forall U\in\mathbf{N}_\tau(x))$ $(\forall W\in\mathbf{N}_\mu(0))$ $(\forall\lambda^*\in\Lambda\text{-Sup}\,(W))$ вірна нерівність

$$\Lambda\text{-}\underline{\text{Inf}}_{\alpha\in A}\Big(\Lambda\text{-}\overline{\text{Sup}}_{\beta\succ\alpha}\Big[\Lambda\text{-}\overline{\text{Inf}}_{y\in U\cap X_\beta}F^\beta(y)\Big]\Big)\stackrel{(\Lambda)}{\le}\lambda+\lambda^*.$$

Останнє твердження означає наступне: $(\forall U\in\mathbf{N}_\tau(x))(\forall W\in\mathbf{N}_\mu(0))(\forall\lambda^*\in\Lambda\text{-Sup}\,(W))$ $(\exists\alpha\in A)$ $(\forall\beta\succ\alpha: U\cap X_\beta\neq\varnothing)$:

$$\Lambda\text{-}\overline{\text{Sup}}_{\beta\succ\alpha}\Big[\Lambda\text{-}\overline{\text{Inf}}_{y\in U\cap X_\beta}F^\beta(y)\Big]\stackrel{(\Lambda)}{\le}\lambda+\lambda^*.$$

Звідси отримуємо, що $(\forall\beta\succ\alpha)$ вірна нерівність $\Lambda\text{-}\overline{\text{Inf}}_{y\in U\cap X_\beta}F^\beta(y)\stackrel{(\Lambda)}{\le}\lambda+\lambda^*$.

Зрозуміло, що наведене співвідношення може виконуватися в тому і тільки тому випадку, коли $(\forall U\in\mathbf{N}_\tau(x))$ $(\forall W\in\mathbf{N}_\mu(0))$ $(\forall\beta\succ\alpha)$:

$$(U\times(W+\lambda))\cap\Big[\Lambda\text{-epi}(F^\beta|X_\beta\cap U)\Big]\neq\varnothing. \tag{24}$$

Оскільки $U\cap X_\beta\neq\varnothing$ для всіх $\beta\succ\alpha$, то умову (30) можна переписати інакше

$$(\forall\beta\succ\alpha):(U\times(W+\lambda))\cap\Big[\Lambda\text{-epi}(F^\beta|X_\beta)\Big]\neq\varnothing. \tag{25}$$

Проте сукупність множин $(U\times(W+\lambda))$ при довільних $U\in\mathbf{N}_\tau(x)$ та $W\in\mathbf{N}_\mu(0)$ є фільтром всіх відкритих околів для пари (x,λ) в $X\times Y$. Тому співвідношення (25) можна розглядати як еквівалентний запис для включення $(x,\lambda)\in\rho\text{-Li}\,(\Lambda\text{-epi}(F^\alpha|X_\alpha))$. Оскільки вибір пари (x,λ) із множини $\Lambda\text{-epi}(F^{VV}|\tau\text{-Li}\,X_\alpha)$ є довільним, то включення (22) встановлено. $\square$

Означення 6. Відображення $F\colon\Omega\to Y^\bullet$ називатимемо $\Lambda(\rho)$-пн.зн. ($\Lambda(\rho)$-півнеперервним знизу) в точці $x\in\operatorname{Int}\Omega$, якщо

$$F(x)=\Lambda\text{-}\overline{\text{Sup}}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x)}\Big[\Lambda\text{-}\underline{\text{Inf}}_{y\in U\cap\Omega}F(y)\Big].$$

Означення 7. Для відображення $F\colon \Omega \to Y^\bullet$ його $\Lambda(\rho)$-півнеперервною знизу (пн.зн.) регуляризацією називатимемо відображення $(\mathrm{sc}^-_\Lambda Ft)\colon X \to Y^\bullet$, яке означено за правилом:

$$(\forall\, x \in \Omega) : (\mathrm{sc}^-_\Lambda Ft)(x) = \underset{U\in \mathbf{N}_\tau(x)}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}} \Big[\underset{y\in U\cap\Omega}{\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}}\ F(y)\Big].$$

Означення 8. Для відображення $F\colon \Omega \to Y^\bullet$ його $\Lambda(\rho)$-півнеперервною зверху (пн. зв.) регуляризацією називатимемо відображення $(\mathrm{sc}^+_\Lambda F)\colon X \to Y^\bullet$, яке означено за правилом:

$$(\forall\, x \in \Omega) : (\mathrm{sc}^+_\Lambda F)(x) = \underset{U\in \mathbf{N}_\tau(x)}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}} \Big[\underset{y\in U\cap\Omega}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Inf}}}\ F(y)\Big].$$

Зрозуміло, що $(\mathrm{sc}^-_\Lambda Ft)$ є Λ-найбільшим серед $\Lambda(\rho)$-пн.зн. відображеннь $G\colon \Omega \to Y^\bullet$, які на множині Ω задовольняють умову $G(x)\overset{(\Lambda)}{\le}F(x)$, $\forall\, x \in \Omega$. Відповідно $(\mathrm{sc}^+_\Lambda F)$ є Λ-найменшим серед $\Lambda(\rho)$-пн.зв. відображеннь $H\colon \Omega \to Y^\bullet$, які $\forall\, x \in \Omega$ задовольняють нерівність $F(x)\overset{(\Lambda)}{\le}H(x)$. Разом з тим легко бачити, що для будь-якого $F\colon \Omega \to Y^\bullet$ справджується нерівність

$$(\forall\, x \in \Omega) : (\mathrm{sc}^-_\Lambda Ft)(x)\overset{(\Lambda)}{\le}F(x)\overset{(\Lambda)}{\le}(\mathrm{sc}^+_\Lambda F)(x).$$

Зокрема, якщо в деякій точці $x^0 \in \operatorname{Int}\Omega$ відображення $F\colon \Omega \to Y^\bullet$ є неперервним, то при $x = x^0$ ця двостороння нерівність перейде у тотожність. До того ж за побудовою є очевидною наступна властивість наведених $\Lambda(\rho)$-регуляризацій:

$$\begin{aligned} &\underset{U\in \mathbf{N}_\tau(x)}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}} \Big\{ \underset{y\in U\cap\Omega}{\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}}\ (\mathrm{sc}^-_\Lambda Ft)(y)\Big\} \equiv \underset{U\in \mathbf{N}_\tau(x)}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}} \Big\{ \underset{y\in U\cap\Omega}{\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}}\ F(y)\Big\} \equiv \\ &\equiv \underset{U\in \mathbf{N}_\tau(x)}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}} \Big\{ \underset{y\in U\cap\Omega}{\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}}\ (\mathrm{sc}^+_\Lambda F)(y)\Big\}, \quad \forall\, U \in \mathbf{N}_\tau(x),\ \forall\, x \in \Omega. \end{aligned} \tag{26}$$

Теорема 1. *Нехай конус $\Lambda \subset Y$ є іваріантним щодо перетину і для напрямлeності підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в топологічному гаусдорфовому просторі (X, τ) виконується умова $\tau\text{-}Li\, X_\alpha \ne \varnothing$. Тоді нижня топологічна границя Λ-надграфіків відображень (1) є Λ-надграфіком для відображення F^V, тобто*

$$\Lambda\text{-}epi(F^V|\tau\text{-}Li\, X_\alpha) \equiv \rho\text{-}Li\ (\Lambda\text{-}epi(F^\alpha|X_\alpha))$$

Доведення. Нехай x^* — довільний фіксований елемент множини $\tau\text{-}\mathrm{Li}\, X_\alpha$, $W \in \mathbf{N}_\tau(x^*)$ — його довільний τ-відкритий окіл. Приймаючи до уваги співвідношення (22) покажемо, що відображення $F^{VV}\colon (\tau\text{-}\mathrm{Li}\, X_\alpha) \to Y^\bullet$, яке означено за правилом (23), задовольняє умову

$$(\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV}t)(x^*)\overset{(\Lambda)}{\le} \underset{W\in \mathbf{N}_\tau(x^*)}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}} \Big\{ \underset{\alpha\in A}{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}} \Big[\underset{y\in W\cap X_\alpha}{\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}}\ (\mathrm{sc}^+_\Lambda F^\alpha)(y)\Big]\Big\}. \tag{27}$$

Справді, для довільних значень $\alpha \in A$ та $U \in \mathbf{N}_\tau(x^*)$ є очевидним співвідношення

$$\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Inf}}_{y\in U\cap X_\alpha} F^\alpha(y) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x^*)} \left\{ \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Inf}}_{y\in U\cap X_\alpha} F^\alpha(y)\right\} \equiv (\mathrm{sc}^+_\Lambda F^\alpha)(x).$$

Оскільки наведена нерівність виконується для всіх $\alpha \in A$, то

$$\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}_{\alpha\in A} \left[\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Inf}}_{y\in U\cap X_\alpha} F^\alpha(y)\right] \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}_{\alpha\in A} (\mathrm{sc}^+_\Lambda F^\alpha)(x^*).$$

Враховуючи, що остання нерівність справедлива для всіх $U \in \mathbf{N}_\tau(x^*)$, одержуємо

$$F^{VV}(x^*) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}_{\alpha\in A} (\mathrm{sc}^+_\Lambda F^\alpha)(x^*).$$

Тоді, приймаючи до уваги означення $\Lambda(\rho)$-пн. зн. регуляризації, отримаємо

$$(\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV}(x^*)t) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}_{W\in\mathbf{N}_\tau(x^*)} \left\{ \Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{y\in W\cap\tau\text{-Li}\, X_\alpha} \left[\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}_{\alpha\in A} (\mathrm{sc}^+_\Lambda F^\alpha)(y)\right]\right\}. \tag{28}$$

Оскільки для довільного околу $W \in \mathbf{N}_\tau(x^*)$ з умови $W \cap \tau\text{-Li}\, X_\alpha \neq \varnothing$ випливає, що $W \cap X_\alpha \neq \varnothing$ починаючи з деякого $\alpha^0 \in A$, то співвідношення (28) можна посилити, подавши його у вигляді

$$(\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV}t)(x^*) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}_{W\in\mathbf{N}_\tau(x^*)} \left\{\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}_{\alpha\in A} \left[\Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{y\in W\cap X_\alpha} (\mathrm{sc}^+_\Lambda F^\alpha)(y)\right]\right\}.$$

Отже нерівність (27) встановлено.

Далі, в повній аналогії з результатами праць [1, 5], можна показати, що для напрямленості відображень $\{F^\alpha\colon X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$ справедлива тотожність

$$\Lambda(\rho)\text{-ls}_V\, F^\alpha \equiv \Lambda(\rho)\text{-ls}_V\, (\mathrm{sc}^+_\Lambda F^\alpha) \equiv \Lambda(\rho)\text{-ls}_V\, (\mathrm{sc}^-_\Lambda F^\alpha t),$$

де $\Lambda(\rho)$-пн. зн. відображення $\Lambda(\rho)\text{-ls}_V\, F^\alpha$ означено за правилом

$$(\Lambda(\rho)\text{-ls}_V\, F^\alpha)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Sup}}_{U\in\mathbf{N}_\tau(x)} \left[\Lambda\text{-}\overline{\mathrm{Limsup}}_{\alpha\in A} \left\{ \Lambda\text{-}\underline{\mathrm{Inf}}_{y\in U\cap X_\alpha} F^\alpha(y)\right\}\right].$$

Отже,

$$(\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV}t)(x^*) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho)\text{-ls}_V\, F^\alpha(x^*) \overset{\mathrm{def}}{=} F^V(x^*). \tag{29}$$

Проте $(\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV}t)$ є $\Lambda(\rho)$-пн. зн. регуляризацією для F^{VV}. Тому із нерівності $F^V(x^*) \overset{(\Lambda)}{\leq} F^{VV}(x^*)$, яка безпосередньо випливає з (22), одержуємо

$$F^V(x^*) \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} (\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV}t)(x^*) \overset{(\Lambda)}{\leq} F^{VV}(x^*)$$

Тоді, порівнюючи (29) та (26), можемо записати

$$F^V(x^*) \equiv (\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV}t)(x^*).$$

Тому, враховуючи довільність у виборі елемента $x^* \in \tau\text{-Li}\, X_\alpha$, отримуємо, що Λ-надграфіки наведених відображень знаходитимуться у співвідношенні

$$\Lambda\text{-epi}(F^V|\tau\text{-Li}\, X_\alpha) = \mathrm{cl}_\rho\Big[\Lambda\text{-epi}((\mathrm{sc}^-_\Lambda F^{VV} t)|\tau\text{-Li}\, X_\alpha)\Big], \qquad (30)$$

де через cl_ρ позначено оператор замикання в ρ-топології на $X \times Y$.

Оскільки множина $\rho{-}Li$ $(\Lambda\text{-epi}(F^\alpha|X_\alpha))$ за означенням є ρ-замкненою (див. [4]), то з (22) та (30) одержуємо

$$\Lambda\text{-epi}(F^V|\tau\text{-Li}\, X_\alpha) = \rho\text{-Li}\ (\Lambda\text{-epi}(F^\alpha|X_\alpha))\,,$$

що й потрібно було встановити. $\square$

У повній аналогії до попереднього можна довести справедливість наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай конус $\Lambda \subset Y$ є іваріантним щодо перетину і для напрямлености підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в топологічному гаусдорфовому просторі (X,τ) виконується умова $\tau\text{-}Ls\, X_\alpha \neq \varnothing$. Тоді верхня топологічна границя Λ-конадграфіків відображень (1) є Λ-конадграфік для відображення F_V, яке означено за правилом*

$$(\Lambda(\rho)\text{-}li_V\, F^\alpha)\,(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \underset{U\in \mathbf{N}_\tau(x)}{\Lambda\text{-}\overline{Sup}} \left[\Lambda\text{-} \underset{\substack{\alpha\in A\\ X_\alpha\cap U\neq\varnothing}}{\underline{Liminf}} \left\{ \underset{y\in U\cap X_\alpha}{\Lambda\text{-}\underline{Inf}}\ F^\alpha(y)\right\}\right],$$

тобто

$$\Lambda\text{-}coepi(F_V|\tau\text{-}Ls\, X_\alpha) \equiv \rho\text{-}Ls\ (\Lambda\text{-}coepi(F^\alpha|X_\alpha))$$

Зауважимо, що для конусів Λ, які не є інваріантними щодо перетину, в загальному випадку може не існувати такого конуса K, при якому нижня топологічна границя Λ-надграфіків відображень (1) є K-надграфіком для деякого відображення

$$F\colon \tau\text{-Li}\, X_\alpha \to Y^\bullet.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Когут П.И. *S-сходимость в теории усреднения задач оптимального управления* Укр. мат. журн. – 1997. – Т.47, .6. – С.1488–1498.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 396 с.
3. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Субдифференциальное исчисление. – Новосибирск: Наука, 1987. – 223 с.
4. Федорчук В.В., Филлипов В.В. Общая топология. Основные конструкции. – М.: МГУ, 1988. – 252 с.
5. Dal Maso G. Introduction to Γ-convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. — 337 p.

Дніпропетровський державний технічний університет залізничного транспорту,

кафедра комп'ютерних технологій

evm@diit.dp.ua

Надійшло 29.06.1999