УДК 517.535.4

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЛОГАРИФМІЧНИХ ПОХІДНИХ ТА ЛОГАРИФМІВ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ В $L^p[0,2\pi]$-МЕТРИЦІ. II

Я.В. Васильків

Ya.V. Vasyl'kiv. *Asymptotic behavior of the logarithmic derivatives and the logarithms of meromorphic functions of completely regular growth in $L^p[0,2\pi]$-metric. II*, Matematychni Studii, **12**(1999) 135–144.

We describe an asymptotic behavior of p-th integral means, $1 \le p < +\infty$, and the area means of logarithmic derivatives and logarithms of meromorphic in $\mathbb{C}$ functions of complete regular growth, the restriction on growth of which is given by arbitrary continuous increasing and convex with respect to $\log r$ function $\lambda(r)$ such that

$$0 < \varliminf_{r\to+\infty} \frac{r\lambda'(r)}{\lambda(r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{r\lambda'(r)}{\lambda(r)} < +\infty.$$

Я.В. Васылькив. *Асимптотическое поведение логарифмических производных и логарифмов мероморфных функций вполне регулярного роста в $L^p[0,2\pi]$-метрике. II*// Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 2. – С.135–144.

Описано асимптотическое поведение p-ых интегральных средних, $1 \le p < +\infty$, средних по площади от логарифмических производных и логарифмов мероморфных в $\mathbb{C}$ функций вполне регулярного роста, ограничения на рост которых заданы произвольной возрастающей и выпуклой относительно $\log r$ функцией $\lambda(r)$ такой, что

$$0 < \varliminf_{r\to+\infty} \frac{r\lambda'(r)}{\lambda(r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{r\lambda'(r)}{\lambda(r)} < +\infty.$$

Вступ. Ця стаття є безпосереднім продовженням статті [1]. Коротко нагадаємо потрібні нам у подальшому позначення та факти. Нехай

$$\lambda(r) = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t}dt, \quad \left.\begin{matrix}\rho_0\\ \mu_0\end{matrix}\right\} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\nu(r)}{\lambda(r)}, \quad \lambda_1(r) = \int_0^r \lambda(t)\frac{dt}{t},$$

де $\nu(t)$ — невід'ємна неспадна функція. Скрізь надалі вважаємо, що $\rho_0 < +\infty$. Ця умова рівносильна [2] до умови $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$. Клас мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій $f(z)$, таких, що $f(0) = 1$ і $T(r,f) = O(\lambda(r))$ $(|z| = r \to +\infty)$,

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D10, 30D35.

будемо позначати $\Lambda(\lambda)$, а через $\Lambda^0(\lambda)$ — його підклас, у який входять мероморфні функції цілком регулярного зростання. Тут $T(r,f)$ — неванліннівська характеристика функції f. Приймемо $F(z) = zf'(z)/f(z)$. Під $\log f(z) = \log|f(z)| + i\arg f(z)$ розуміємо функцію

$$\log f(z) = \int_0^z F(\xi)\xi^{-1}d\xi, \ \ \log f(0) = 0,$$

визначену в $\mathbb{C}^*$ (комплексній площині $\mathbb{C}$ з розрізами від нулів та полюсів до ∞ вздовж променів, що виходять з точки 0), а інтеграл береться вздовж відрізка $[\,0, z\,]$. Через

$$c_k(r,v) = c_k(r,\operatorname{Re} v) + ic_k(r,\operatorname{Im} v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta, \ k\in\mathbb{Z},$$

позначимо коефіцієнти Фур'є функції $v(z)$, $z = re^{i\theta}$, де $v(z)$ одна з функцій $F(z)$ чи $\log f(z)$.

Теорема A. [3, c.75]. *Нехай $f\in\Lambda(\lambda)$. Тоді, наступні твердження еквівалентні:*

1) $f\in\Lambda^0(\lambda)$;

2) $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\exists\lim_{r\to+\infty} c_k(r,\log|f|)/\lambda(r) \overset{\text{def}}{=\!=} c_k$.

Позначимо через [3, c.77] $h(\theta,f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$ індикатор функції f з $\Lambda^0(\lambda)$.

Для вимірної множини $E\subset\mathbb{R}_+$ позначимо $\overline{d}(E) = \overline{\lim}_{r\to+\infty} r^{-1}\operatorname{mes}\{E\cap[0,r]\}$ її лінійну верхню щільність, а через $E_\eta = \{E\subset\mathbb{R}_+ : \overline{d}(E)\le\eta\}$, $0<\eta\le 1$, $\mathcal{E}_0 = \{E\in\mathbb{R}_+ : \operatorname{mes}\{E\cap[\,0,r\,]\} = o(r), r\to+\infty\}$, і будемо дотримуватись позначення

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} g(r) = \lim_{E\not\ni r\to+\infty} g(r),$$

для деякої множини $E\in\mathcal{E}_o$.

Лема B. [4, лема 5]. *Нехай $f(z)$ мероморфна в крузі $\{z\in\mathbb{C} : |z|\le R\}$ функція і $f(z)\sim cz^p$ при $z\to 0$ для деяких $c\ne 0$, $p\in\mathbb{Z}$. Тоді, якщо $1<r<R$, то*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\operatorname{Re} F(re^{i\theta})|d\theta \le \frac{2T(R,f)-\log|c|}{\log(R/r)}.$$

Метою цієї роботи є дослідження асимптотичної поведінки при $|z|\to+\infty$ функцій $\log f(z)$ та $F(z)$, $z = |z|e^{i\varphi}$, в метриці просторів $L^p[0,2\pi]$, $1\le p<+\infty$, $\varphi\in[0,2\pi]$, та в термінах їх середніх за площею.

§1. Регулярність зростання аргумента мероморфної функції.

Теорема 1. *Якщо $f\in\Lambda^0(\lambda)$, то для довільного p, $1\le p<+\infty$, справедливо*

$$\lim_{r\to+\infty}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)} + h'(\theta,f)\Big|^p d\theta\Big\}^{\frac{1}{p}} = 0,$$

де $h'(\theta,f)$ — правостороння похідна від індикатора $h(\theta,f)$.

Навпаки, нехай

$$N(r,0,f)=O(\lambda(r)) \quad \text{або} \quad N(r,\infty,f)=O(\lambda(r)), \quad r\to+\infty, \tag{1}$$

і для деяких p, $1\le p<+\infty$ та $h\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $h\in L^p[0,2\pi]$, виконується співвідношення

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)}-h(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}=0, \tag{2}$$

і

$$N(r)=N(r,0,f)-N(r,\infty,f)=c_0\lambda(r)+o(\lambda(r)), \quad r\to+\infty, \tag{3}$$

де c_0 — деяка дійсна стала. Тоді $f\in\Lambda^0(\lambda)$ і $h(\theta)=-h'(\theta,f)$ майже скрізь на $[0,2\pi]$.

Зауваження 1. Асимптотична поведінка функції $\log|f(re^{i\theta})|/\lambda(r)$ в $L^p[0,2\pi]$-метриці та зовні C_0^0-множин повністю вивчена А.А. Кондратюком [3, глави 7–9]. Окрім того, зауваження 2.1, 2.2 та приклад 2.1 з [3] вказують на істотність умови (1), а критерій нетривіальності класу $\Lambda_E^0(\lambda)$ (теорема 7.4) на змістовність умови опуклості щодо $\log r$ функції зростання $\lambda(r)$ та на істотність умови (3).

Теорема 2. *Нехай $f\in\Lambda^0(\lambda)$. Тоді для $1<\sigma<+\infty$ справедливо*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)}\int_0^{2\pi}\int_r^{\sigma r}\left|\frac{\arg f(te^{i\theta})}{\lambda_1(t)}+h'(\theta,f)\right|tdtd\theta=0.$$

Навпаки, нехай для мероморфної функції f в $\mathbb{C}$, $f(0)=1$, виконується (1) та (3) і знайдеться число $\sigma\in(1,+\infty)$ таке, що справедливе співвідношення

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)}\int_0^{2\pi}\int_r^{\sigma r}\left|\frac{\arg f(te^{i\theta})}{\lambda_1(t)}-h(\theta)\right|tdtd\theta=0, \tag{4}$$

де h: $[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $h\in L^1[0,2\pi]$. Тоді, $f\in\Lambda^0(\lambda)$ і $h(\theta)=-h'(\theta,f)$ майже скрізь на $[0,2\pi]$.

Зауваження 2. Подібний результат для функції $\log|f(re^{i\theta})|/\lambda(r)$ (точніше, для δ-субгармонійних функцій) встановлено в [5, теорема 2.7].

Позначимо

$$L_f(re^{i\theta};\lambda,\lambda_1)=\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\lambda(r)}+i\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)}, \quad \tilde{h}(\theta,f)=h(\theta,f)-ih'(\theta,f),$$

де $h'(\theta,f)$ — правостороння похідна функції $h(\theta,f)$.

Наслідок 1. *Нехай $f\in\Lambda^0(\lambda)$. Тоді*

1) для довільного p, $1\le p<+\infty$, справедливо

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L_f(re^{i\theta};\lambda,\lambda_1)-\tilde{h}(\theta,f)|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}=0;$$

2) для довільного σ, $1 < \sigma < +\infty$, справедливо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sigma r} |L_f(te^{i\theta};\lambda,\lambda_1) - \tilde{h}(\theta,f)|t\,dtd\theta = 0.$$

Навпаки, нехай для мероморфної функції f в $\mathbb{C}$ такої, що $f(0) = 1$, виконується (1) й існує $p \in [1,+\infty)$, для якого

$$\lim_{r\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_f(re^{i\theta};\lambda,\lambda_1) - H(\theta)|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} = 0,$$

або існує число $\sigma \in (1,+\infty)$, для якого

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sigma r} |L_f(te^{i\theta};\lambda,\lambda_1) - H(\theta)|tdtd\theta = 0,$$

де H: $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $H \in L^p[0,2\pi]$ (або $L^1[0,2\pi]$ відповідно). Тоді, $f \in \Lambda^0(\lambda)$ і $H(\theta) = = \tilde{h}(\theta,f)$ майже скрізь на $[0,2\pi]$.

Доведення теореми 1. Нехай $f \in \Lambda^0(\lambda)$. Тоді (див. теорему A), існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,\log|f|)}{\lambda(r)} = c_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

і, згідно з теоремою 4 [1], маємо

$$c_k = \frac{i}{k} \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,\arg f)}{\lambda_1(r)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{5}$$

Функція $h(\theta,f)$ [3, с.93–94, 110] (див. також [6, с.76–77, 199]) скрізь має правосторонню похідну, яка неперервна за винятком щонайбільше зліченної множини. Окрім того, для довільного $|k| > \rho$ ($\stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{r\to+\infty} \log\lambda(r)/\log r$; $\rho < +\infty$, бо [2] $\rho \le \rho_0 < +\infty$), вірне співвідношення

$$|c_k| \le \operatorname{const} \rho^2 (k^2-\rho^2)^{-1}. \tag{6}$$

Оскільки [2], $\rho_1 \le \rho_0$, де $\rho_1 = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \lambda(r)/\lambda_1(r)$, і, як зазначено у вступі, умова $\rho_0 < +\infty$ рівносильна до умови $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, то, з огляду на теорему 1 [1], отримуємо

$$\left| \frac{c_k(r,\arg f)}{\lambda_1(r)} \right| \le \frac{A}{|k|}, \quad |k| \in \mathbb{N},\ r > r_0, \tag{7}$$

де r_0 — деяка додатна стала, що не залежить від k, а A — додатна стала, що не залежить від r та k.

Отже, враховуючи співвідношення (5)–(7), робимо висновок, що послідовність $\{c_k(r,\arg f)/\lambda_1(r) + ikc_k\}$ належить до простору l_p для всіх $p > 1$ і $r > r_0$.

Тоді, застосувавши теорему Хаусдорфа-Юнг при $q \geq 2$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, і здійснивши почленний граничний перехід при $r \to +\infty$ в рівномірно збіжному для всіх $r > r_0$ ряді, одержуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)}+h'(\theta,f)\right|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}} \leq \lim_{r\to+\infty}\left\{\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty}\left|\frac{c_k(r,\arg f)}{\lambda_1(r)}+ikc_k\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Звідси та з нерівності Гельдера встановлюємо потрібний результат і для $1 \leq q \leq 2$.

Навпаки, нехай виконується умова (2). Позначимо через $\tilde{c}_k$ коефіцієнти Фур'є функції $h(\theta)$. Тоді, для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\left|\frac{c_k(r,\arg f)}{\lambda_1(r)} - \tilde{c}_k\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)} - h(\theta)\right| d\theta \leq$$
$$\leq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)} - h(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad r \to +\infty.$$

З огляду на теорему 4 [1], маємо

$$\frac{i}{k}\tilde{c}_k = c_k = \lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,\log|f|)}{\lambda(r)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{8}$$

Із співвідношень (8), (3) та (1) випливають (див. теорему A) включення $f \in \Lambda^0(\lambda)$ та рівність $h(\theta) = -h'(\theta, f)$ майже скрізь на $[0, 2\pi]$. $\square$

Доведення теореми 2. Нехай $f \in \Lambda^0(\lambda)$. Згідно з попередньою теоремою для довільного $\varepsilon > 0$ існує $r_\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $r \geq r_\varepsilon$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)} + h'(\theta,f)\right| d\theta < \varepsilon.$$

Для цих же r справедлива нерівність

$$\frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)}\int_r^{\sigma r}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)} + h'(\theta,f)\right| t\,dt d\theta \leq \frac{2\varepsilon}{r^2(\sigma^2-1)}\int_r^{\sigma r} tdt = \varepsilon.$$

Навпаки, нехай виконуються співвідношення (1) та (4). Позначимо

$$m_1(t;\arg f, h) = \int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(te^{i\theta})}{\lambda_1(t)} - h(\theta)\right| d\theta.$$

Враховуючи нерівність

$$\frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)}\int_r^{\sigma r} m_1(t;\arg f,h)tdt \geq \frac{1}{\pi r(\sigma^2-1)}\int_r^{\sigma r} m_1(t;\arg f,h)dt,$$

одержимо, що

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\int_r^{\sigma r} m_1(t;\arg f,h)dt = 0. \tag{9}$$

Позначимо через $\mathcal{D}_\varepsilon$ множину тих $t>0$, для яких $m_1(t;\arg f,h)\ge\varepsilon>0$. З огляду на нерівність $r^{-1}\int_r^{\sigma r} m_1(t;\arg f,h)\,dt\ge\varepsilon r^{-1}\int_{\mathcal{D}_\varepsilon\cap[r,\sigma r]}dt$ та рівність (9), отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\operatorname{mes}\{\mathcal{D}_\varepsilon\cap[0,\sigma r]\}-\operatorname{mes}\{\mathcal{D}_\varepsilon\cap[0,r]\}}{r}=0.$$

Звідси випливає [6, с.196], що лінійна щільність $\mathcal{D}_\varepsilon$ дорівнює нулеві.

Отже,

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{\lambda_1(r)}-h(\theta)\Big|d\theta=0,$$

звідси випливає, що для всіх $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ існують границі

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*}\frac{c_k(r,\arg f)}{\lambda_1(r)}=\tilde c_k,$$

де $\tilde c_k$ — коефіцієнти Фур'є функції $h(\theta)$. Враховуючи твердження леми 1 [1] і дослівно повторюючи міркування, наведені в [3, с.143–144] (або [7], доведення леми 2), отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,\arg f)}{\lambda_1(r)}=\tilde c_k,\quad \forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{10}$$

Далі, подібно, як і при доведенні попередньої теореми, співвідношення (10) разом з (1) та (3) дають необхідний результат. □

Доведення наслідку 1. Усі твердження цього наслідку негайно випливають з теореми 7.2 [3], теореми 2.7 [5] та теорем 1 та 2. □

§**2. Регулярність зростання логарифмічних похідних мероморфних функцій.** Позначимо

$$L\mathcal{D}_f(re^{i\theta};\nu,\lambda)=\frac{\operatorname{Re}F(re^{i\theta})}{\nu(r)}+i\frac{\operatorname{Im}F(re^{i\theta})}{\lambda(r)}.$$

Теорема 3. *Нехай $f\in\Lambda(\lambda)$, $0<\mu_0\le\rho_0<+\infty$. Наступні твердження еквівалентні:*

1) $f\in\Lambda^0(\lambda)$;

2) для всіх p, $1\le p<+\infty$, виконується співвідношення

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L\mathcal{D}_f(re^{i\theta};\nu,\lambda)-\tilde h(\theta,f)|^p d\theta\right\}^{\frac1p}\to0,\quad r\to+\infty, r\notin E\in E_\eta, 0<\eta<1; \tag{11}$$

3) для деяких p, $1\le p<+\infty$ і $h_j\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $h_j\in L^p[0,2\pi]$, $j=1,2$, виконується співвідношення

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\operatorname{Re}F(re^{i\theta})}{\nu(r)}-h_1(\theta)\Big|^p d\theta\right\}^{\frac1p}\to0,\quad r\to+\infty, r\notin E\in E_\eta, 0<\eta<1, \tag{12}$$

або співвідношення (3) і

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\operatorname{Im}F(re^{i\theta})}{\lambda(r)}-h_2(\theta)\Big|^p d\theta\right\}^{\frac1p}\to0,\quad r\to+\infty, r\notin E\in E_\eta, 0<\eta<1. \tag{13}$$

При цьому, $h_1(\theta)=h(\theta,f)$, $h_2(\theta)=-h'(\theta,f)$ майже скрізь на $[0,2\pi]$.

Теорема 4. *Нехай* $f \in \Lambda^0(\lambda)$, $0 < \mu_0 \le \rho_0 < +\infty$. *Тоді, для* $1 < \sigma < +\infty$ *справедливо*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sigma r} |L\mathcal{D}_f(te^{i\theta};\nu,\lambda) - \tilde{h}(\theta,f)| t\, dt d\theta = 0.$$

Навпаки, нехай $f \in \Lambda(\lambda)$, $0 < \mu_0 \le \rho_0 < +\infty$, *і існує* $\sigma \in (1,+\infty)$ *таке, що виконується*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sigma r} \Big| \frac{\operatorname{Re} F(te^{i\theta})}{\nu(t)} - h_1(\theta) \Big| t\, dt d\theta = 0,$$

або (3) і

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sigma r} \Big| \frac{\operatorname{Im} F(te^{i\theta})}{\lambda(t)} - h_2(\theta) \Big| t\, dt d\theta = 0,$$

де $h_j\colon [0.2\pi] \to \mathbb{R}$, $h_j \in L^1[0,2\pi]$, $j = 1,2$. *Тоді,* $f \in \Lambda^0(\lambda)$ *і* $h_1(\theta) = h(\theta,f)$, $h_2(\theta) = -h'(\theta,f)$ *майже скрізь на* $[0,2\pi]$.

Зауваження 3. Істотність умов $f \in \Lambda(\lambda)$ та (3) встановлена в [7] (приклади 1 та 2). Слід відмітити, що з огляду на приклад 2 з [7], одночасне регулярне зростання функцій $\operatorname{Re} f(re^{i\theta})/\lambda(r)$ та $\operatorname{Im} f(re^{i\theta})/\lambda(r)$ щодо функції $\lambda(r)$ можливе лише у випадку $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ — уточнений порядок.

Доведення теореми 3. Оскільки $f \in \Lambda^0(\lambda)$, то для всіх $k \in \mathbb{Z}$ існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} c_k(r, \log|f|)/\lambda(r) = c_k.$$

З теореми 4 [1] випливає існування границь

$$c_k = \lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,\operatorname{Re} F)}{\nu(r)}, \quad -ikc_k = \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,\operatorname{Im} F)}{\lambda(r)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

З твердження п.3 теореми 1 [1], співвідношень (6) та умов $0 < \mu_0 \le \rho_0 < +\infty$, в свою чергу, випливає, що послідовність

$$\Big\{ \frac{c_k(r,\operatorname{Re} F)}{\nu(r)} + i\frac{c_k(r,\operatorname{Im} F)}{\lambda(r)} - c_k - kc_k \Big\}$$

належить до простору l_q для всіх $r \notin E \in E_\eta$ і $q > 1$. Застосувавши теорему Хаусдорфа-Юнг при $p \ge 2$ і $q^{-1} + p^{-1} = 1$, отримуємо

$$\Big\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L\mathcal{D}_f(re^{i\theta};\nu,\lambda) - \tilde{h}(\theta,f)|^p d\theta| \Big\}^{\frac{1}{p}} \le$$
$$\le \Big\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big| \frac{c_k(r,\operatorname{Re} F)}{\nu(r)} + i\frac{c_k(r,\operatorname{Im} F)}{\lambda(r)} - c_k - kc_k \Big|^q \Big\}^{\frac{1}{q}}. \tag{14}$$

Здійснюючи в (14) граничний перехід при $r \to +\infty$ і враховуючи рівномірну збіжність по r, $r \notin E \in E_\eta$ ряду в правій частині (14), приходимо до співвідношення (11) для $p \geq 2$. Звідси, завдяки нерівності Гельдера, одержуємо (11) для $1 \leq p \leq 2$.

Якщо (12) виконується для деякого p, $1 < p < +\infty$, то з нерівності Гельдера маємо ($E \in E_\eta$, $0 < \eta < 1$)

$$\lim_{E \not\ni r \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \frac{\operatorname{Re} F(re^{i\theta})}{\nu(r)} - h_1(\theta) \Big| d\theta = 0.$$

Позначимо

$$m_1(t; \operatorname{Re} F, h_1) = \int_0^{2\pi} \Big| \frac{\operatorname{Re} F(te^{i\theta})}{\nu(t)} - h_1(\theta) \Big| d\theta.$$

Нехай $\chi(t)$ — характеристична функція множини $E \in E_\eta$, $0 < \eta < 1$, а $\chi^*(t) = 1 - \chi(t)$. Для $1 < \sigma < +\infty$ маємо

$$\frac{1}{\pi r^2(\sigma^2 - 1)} \int_r^{\sigma r} m_1(t; \operatorname{Re} F, h_1) t dt = \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2 - 1)} \int_r^{\sigma r} \chi(t) m_1(t; \operatorname{Re} F, h_1) t dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2 - 1)} \int_r^{\sigma r} \chi^*(t) m_1(t; \operatorname{Re} F, h_1) t dt \stackrel{\text{def}}{=} I_1(r) + I_2(r).$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує r_ε таке, що для всіх $r > r_\varepsilon$ виконується $I_2(r) \leq \varepsilon$. Оцінимо тепер $I_1(r)$. З урахуванням нерівності

$$m_1(t; \operatorname{Re} F, h_1) \leq \frac{1}{\nu(t)} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(te^{i\theta})| d\theta + \int_0^{2\pi} |h_1(\theta)| d\theta,$$

для достатньо великих r отримаємо

$$I_1(r) \leq \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2 - 1)} \int_r^{\sigma r} \chi(t) t \frac{dt}{\nu(t)} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(te^{i\theta})| d\theta +$$
$$+ \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2 - 1)} \int_0^{2\pi} |h_1(\theta)| d\theta \int_r^{\sigma r} \chi(t) t dt \leq \frac{M_1(\sigma)}{2\pi r \nu(r)} \int_r^{\sigma r} \chi(t) dt \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(te^{i\theta})| d\theta +$$
$$+ M_2(\sigma) \frac{\operatorname{mes}\{E \cap [r, \sigma r]\}}{r} \leq \frac{M_1(\sigma)}{r \nu(r)} \int_r^{\sigma r} \chi(t) dt \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(te^{i\theta})| d\theta + M_3(\sigma)(\eta + \varepsilon),$$

де $M_j(\sigma)$ ($j = 1, 2, 3$) — деякі додатні неперервні функції від σ, обмежені зверху при $\sigma > 1$. Застосовуючи лему В (при $R = 2t$, $r = t$), одержуємо

$$I_1(r) \leq \frac{M_4(\sigma) T(2\sigma r, f)}{\nu(r)} \frac{\operatorname{mes}\{E \cap [r, \sigma r]\}}{r} + M_3(\sigma)(\eta + \sigma) \leq M_5(\sigma)(\eta + \varepsilon),$$

де $M_4(\sigma)$ та $M_5(\sigma)$ деякі додатні неперервні функції від σ, обмежені зверху при $\sigma > 1$. Тому

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2 - 1)} \int_r^{\sigma r} m_1(t; \operatorname{Re} F, h_1) t dt \leq M_5(\sigma)(\eta + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Завдяки довільності η і ε отримаємо, що

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2(\sigma^2-1)} \int_r^{\sigma r} m_1(t; \operatorname{Re} F, h_1) t dt = 0.$$

Звідси негайно випливає, що $\lim_{r\to+\infty} r^{-1}\int_r^{\sigma r} m_1(t;\operatorname{Re} F, h_1)dt = 0$. Міркування, подібні до наведених при доведенні попередньої теореми, приводять нас до співвідношення

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big| \frac{\operatorname{Re} F(re^{i\theta})}{\nu(r)} - h_1(\theta) \Big| d\theta = 0,$$

і, отже, до співвідношень $\lim^{*}{}_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,\operatorname{Re} F)}{\nu(r)} = c_k(h_1)$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, де $c_k(h_1)$ — коефіцієнти Фур'є функції $h_1(\theta)$. Враховуючи теорему 4 [1], отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,\log|f|)}{\lambda(r)} = c_k(h_1), \quad \forall k\in\mathbb{Z},$$

що є рівносильним (див. теорему A) до того, що $f\in\Lambda^0(\lambda)$ і $h(\theta,f) = h_1(\theta)$ майже скрізь на $[0,2\pi]$.

І, нарешті, нехай справджується співвідношення (13). Позначимо

$$m_1(t;\operatorname{Im} F, h_2) = \int_0^{2\pi} \Big| \frac{\operatorname{Im} F(te^{i\theta})}{\lambda(t)} - h_2(\theta)\Big| d\theta,$$

і нехай $\chi(t)$ — характеристична функція множини $E\in E_\eta$, $0<\eta<1$, $\chi^*(t) = 1-\chi(t)$. Оскільки f — довільна мероморфна в $\mathbb{C}$ функція, то, здійснюючи заміну $iz = z^*$, $f_1(z) = f(z^*)$, одержуємо

$$\operatorname{Im} z\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \operatorname{Im} z\frac{f'(iz)}{f(iz)} = -\operatorname{Im} iz^*\frac{f'(z^*)}{f(z^*)} = \operatorname{Re} z^*\frac{f'(z^*)}{f(z^*)}.$$

З урахуванням цих рівностей і леми B (при $R=2t$, $r=t$), подібно, як і в попередньому випадку прийдемо до співвідношення

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big| \frac{\operatorname{Im} F(te^{i\theta})}{\lambda(t)} - h_2(\theta) \Big| d\theta = 0,$$

і, отже, до співвідношень

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,\operatorname{Im} F)}{\lambda(r)} = c_k(h_2), \quad \forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

де $c_k(h_2)$ — коефіцієнти Фур'є функції $h_2(\theta)$. Враховуючи теорему 4 [1], отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,\operatorname{Im} F)}{\lambda(r)} = -ik\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,\log|f|)}{\lambda(r)}, \quad \forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

З цих рівностей та співвідношення (3) робимо висновок, що

$$c_k = \lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r, \log|f|)}{\lambda(r)} = \frac{i}{k} c_k(h_2), \quad k \neq 0, \quad c_0 = \lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r, \log|f|)}{\lambda(r)},$$

тобто (див. теорему A) $f \in \Lambda^0(\lambda)$ і $h_2(\theta) = -h'(\theta, f)$ майже скрізь на $[0, 2\pi]$. $\square$

Доведення теореми 3 вказує на те, що твердження теорем 3 і 4 є рівносильними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильків Я.В. *Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. I* Матем. студії. 1999. – Т.12, 1. – С.37–58.
2. Васильків Я.В., Кодратюк А.А. *Порівняння характеристик зростання додатних функцій* Матем. студії. – 1998. – Т.10, 1. – С. 23–32.
3. Кодратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища школа, 1988. – 195 с.
4. Hayman W.K., Miles J.B. *On the growth of a meromorphic function and its derivatives* Gordon and Breach. Science Publ. Complex variables. – 1989. – V.12. – P.245–260.
5. Васылькив Я.В. Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье. – Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Львов, 1986. – 129 с.
6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.:Гостехиздат, 1956. – 632 с.
7. Гольдберг А.А., Строчик Н.Н. *Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных* Сиб. мат. ж. – 1985. – Т.26, 26. – С.29–38.

Львівський державний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 12.12.1997
Після переробки 15.01.1999