УДК 512.54

ҐРАТКА НОРМАЛЬНИХ ДІЛЬНИКІВ ВІНЦЕВОГО ДОБУТКУ ГРУПИ ПІДСТАНОВОК З АБСТРАКТНОЮ ГРУПОЮ

С.П. Одрібець

S.P. Odribets. *The normal subgroup lattice of wreath product of a permutation group with an abstract group*, Matematychni Studii, **12**(1999) 127–134.

In the terms of the amalgamated unions of partially ordered sets, we characterize the structure of the normal subgroup lattice of wreath product of a permutation group with an abstract group.

С.П. Одрибец. *Решетка нормальных делителей сплетения группы подстановок с абстрактной группой* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 2. – С.127–134.

Используя конструкцию амальгамированного объединения частично упорядоченных множеств, мы описываем решетку нормальных делителей сплетения группы подстановок с абстрактной группой.

Нормальна будова вінцевих добутків груп докладно розглядалася для різних класів груп. Зокрема, у статті [7] вивчались нормальні дільники мономіальних груп — вінцевих добутків симетричної групи з довільною групою, у статтях [2], [3] — нормальні дільники вінцевих добутків знакозмінної групи з довільною групою, а в [4] — нормальні дільники вінцевого добутку циклічних груп простого порядку. Досліджувалися також окремі нормальні дільники у вінцевих добутках (див., наприклад, [5]). Проте, будова ґратки нормальних дільників вінцевого добутку без обмежень на множники досі не вивчалася.

У нашій статті ми аналізуємо будову цієї ґратки і встановлюємо, що її можна конструювати з певних блоків за допомогою конструкції амальгамованого об'єднання частково впорядкованих множин. Блоки, з яких конструюється ця ґратка, самі є або ґратками, або верхніми напівґратками. Вони мають простішу будову, і тому такі зображення можна використовувати в конкретних випадках для опису всієї ґратки нормальних дільників вінцевого добутку.

1. Необхідні визначення. Нехай G' — комутант групи G, $\mathbf{L}(G)$ — ґратка всіх її підгруп, $\mathbf{N}(G)$ — підґратка всіх нормальних підгруп групи G. Крім

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20B30.

Ця робота була частково підтримана ISSEP, грант GSU051340

цього, нехай $[U,V]_L$ — закритий, а $(U,V]_L$ — відкритий знизу інтервали ґратки $\mathbf{L}(G)$, тобто

$$[U,V]_L = \{K \in L(G) \mid U \leq K \leq V\}, \quad (U,V]_L = \{K \in L(G) \mid U < K \leq V\}.$$

Інтервали $[U,V]_N$ і $(U,V]_N$ ґратки $\mathbf{N}(G)$ означаються аналогічно.

Для елементів u і v частково впорядкованої множини кажемо, що v покриває u, якщо з $u \leq w \leq v$ для деякого w випливає, що $u = w$ або $w = v$.

Нагадаємо [5], що *вінцевим добутком* $A \wr B$ групи підстановок (A,M) з абстрактною групою B називається група , елементами якої є всеможливі пари вигляду $a\beta$, $a \in A$, $\beta \in B^M$, а групова дія задається рівністю $a_1\beta_1 \cdot a_2\beta_2 = a_1a_2\,\beta_1^{a_2}\beta_2$, де $\beta^a(x) = \beta(x^{a^{-1}})$. Розглядаємо лише транзитивну групу підстановок (A,M).

Відображення $a \mapsto a\varepsilon$ та $\beta \mapsto 1_A\beta$ є зануреннями груп A та B^M у вінцевий добуток $A \wr B$, що дозволяє ототожнювати відповідні елементи. Підгрупа A називається активною групою вінцевого добутку, а підгрупа B^M — його базою. Символом ε позначимо одиничну функцію із B^M, символом b_m — функцію, носій якої $\{m\}$, а значення в точці m дорівнює b, а символом b_{mn} — функцію з носієм $\{m,n\}$, яка в точці m приймає значення b, а в точці n — значення b^{-1}. Зокрема, $b_m^a = b_{m^a}$ та $b_{mn}^a = b_{m^a n^a}$.

Для кожної підгрупи K вінцевого добутку $A \wr B$ покладемо

$$\pi(K) = \{a \in A \mid \text{існує } \beta \in B^M,\ a\beta \in K\}\ .$$

Очевидно, що $\pi(K)$ є підгрупою A, і проектування вінцевого добутку на активну групу $\pi\colon A \wr B \to A$ індукує епіморфізм верхніх напівґраток $\pi\colon \mathbf{L}(A \wr B) \to \mathbf{L}(A)$. Оскільки при відображенні π образом нормальної підгрупи вінцевого добутку $A \wr B$ є нормальна підгрупа групи A, то обмеження π на $\mathbf{N}(A \wr B)$ є епіморфізмом верхньої напівґратки $\mathbf{N}(A \wr B)$ на $\mathbf{N}(A)$.

Будемо говорити, що підгрупа K має глибину 1, якщо $\pi(K)$ є одиничною підгрупою групи A, і глибину 0 в протилежному випадку. Підгрупи глибини 0 утворюють в $\mathbf{N}(A \wr B)$ верхню напівґратку, яку ми позначимо $\mathbf{N}_0(A \wr B)$, а підгрупи глибини 1 — підґратку, яку позначимо $\mathbf{N}_1(A \wr B)$.

Вінцевий добуток $G \wr_\varphi B$ групи дій (G,M) (тобто задано гомоморфізм φ групи G в симетричну групу S_M над множиною M) та групи B означається подібно до вінцевого добутку групи підстановок з урахуванням рівності $\beta^g = \beta^{\varphi(g)}$. Покладемо $H = \varphi(G) \simeq G/\ker\varphi$. Нормальна будова групи $G \wr_\varphi B$ цілком визначається нормальною будовою групи $H \wr B$ та розширенням групи $\ker\varphi$ до групи G. Продовжимо гомоморфізм $\varphi\colon G \to H$ до гомоморфізму $\tilde{\varphi}\colon G \wr_\varphi B \to H \wr B$ за правилом $\tilde{\varphi}(g\beta) = \varphi(g)\beta$. Означимо також проектування $\tilde{\pi}\colon G \wr_\varphi B \to G$ та $\pi\colon H \wr B \to H$. Тоді маємо рівність $\pi\tilde{\varphi} = \varphi\tilde{\pi}$. (Тут і надалі в цій статті приймається порядок множення відображень справа наліво, тобто спочатку діє останнє відображення, потім те, яке стоїть перед ним і т.д.)

Лема 1. *Якщо $K \lhd G \wr_\varphi B$, то $\tilde{\pi}(K) \lhd G$ та $\tilde{\varphi}(K) \lhd H \wr B$. Навпаки, якщо $K_1 \lhd G$, $K_2 \lhd H \wr B$ та $\varphi(K_1) = \pi(K_2)$, то існує $K \lhd G \wr_\varphi B$ така, що $\tilde{\pi}(K) = K_1$ та $\tilde{\varphi}(K) = K_2$.*

Доведення. Перше твердження очевидне. Щодо іншого, то шуканою підгрупою є $K = \{g\beta \mid g \in K_1,\ \varphi(g)\beta \in K_2\}$. $\square$

2. Амальгамоване об'єднання частково впорядкованих множин. Нехай $(U, \leq_U)$ та $(V, \leq_V)$ — частково впорядковані множини, при цьому перетин $U \cap V$ не обов'язково порожній. Кажемо, що ці множини узгоджені щодо перетину, якщо збігаються обмеження $\leq_U$ і $\leq_V$ на множину $U \cap V$. У цьому випадку на об'єднанні $U \cup V$ транзитивне замикання об'єднання відношень $\leq_U$ і $\leq_V$, яке позначимо як $\leq_\uplus$, є відношенням часткового порядку.

Частково впорядковану множину $\mathbf{U} \uplus \mathbf{V} = (U \cup V, \leq_\uplus)$ називатимемо амальгамованим об'єднанням (узгоджених щодо перетину) частково впорядкованих множин $\mathbf{U} = (U, \leq_U)$ та $\mathbf{V} = (V, \leq_V)$.

Так означена операція є асоціативною (тобто, якщо одне з об'єднань $(\mathbf{U} \uplus \mathbf{V}) \uplus \mathbf{W}$ або $\mathbf{U} \uplus (\mathbf{V} \uplus \mathbf{W})$ існує, то існує й інше з них, при цьому $(\mathbf{U} \uplus \mathbf{V}) \uplus \mathbf{W} = U \uplus (\mathbf{V} \uplus \mathbf{W})$) і комутативною. А тому, можна говорити про амальгамоване об'єднання довільної скінченної сукупності частково впорядкованих множин.

Для довільної родини $\{\mathbf{U}_\alpha = (U_\alpha, \leq_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ частково впорядкованих множин на об'єднанні $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ означимо відношення $\leq_\uplus$ як транзитивне замикання відношення $\bigcup_{\alpha \in I} \leq_\alpha$. Відношення $\leq_\uplus$ є частковим порядком на множині $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ тоді і тільки тоді, коли амальгамовані об'єднання $\bigcup_{\beta \in J} U_\beta$ існують для будь-якої скінченної підмножини індексів $J \subset I$. Якщо родина $\{\mathbf{U}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ задовольняє останню умову, то частково впорядковану множину $\biguplus_{\alpha \in I} \mathbf{U}_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha, \leq_\uplus\right)$ назвемо амальгамованим об'єднанням такої родини.

Лема 2. *Нехай частково впорядкована множина $\mathbf{U} = (U, \leq_U)$ розпадається на об'єднання підмножин $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, при цьому для довільних $a \leq b$ існує такий скінченний ланцюг $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$, що для кожного $i < n$ елементи a_i та a_{i+1} одночасно належать до деякої із U_α. Тоді $\mathbf{U} = \biguplus_{\alpha \in I}(U_\alpha, \leq_\alpha)$, де $\leq_\alpha$ — обмеження $\leq_U$ на множину U_α.*

Доведення. З означення родини $\{(U_\alpha, \leq_\alpha\}_{\alpha \in I}$ випливає, що амальгамоване об'єднання $\biguplus_{\alpha \in I}(U_\alpha, \leq_\alpha) = (U, \leq_\uplus)$ існує. Очевидно, що відношення $\leq_\uplus$ міститься у відношенні $\leq_U$. Існування скінченного монотонного ланцюга між будь-якими двома порівняльними елементами, який задовольняє умови леми, забезпечує зворотне включення. □

3. Опис верхньої напівґратки $\mathbf{N}_0(A \wr B)$. Зафіксуємо деякий елемент з M, який позначимо як 1, і нехай $A_1 = St_A(1)$. Кожна підгрупа $T \in [A_1, A]_L$ задає на множині M розбиття $M = \bigcup_{i=1}^s M_i$ на блоки імпримітивності. Поставимо у відповідність такому розбиттю (чи підгрупі T, яка його задає) нормальну підгрупу з $A \wr B$

$$\eta(T) = \Big\{\beta \in B^M \mid \prod_{x \in M_i} \beta(x) \equiv 1(\mathrm{mod} B'), i = 1, \ldots, s\Big\}.$$

Оскільки B/B' комутативна, порядок множників у добутку $\prod \beta(x)$ несуттєвий. Відображення η: $[A_1, A]_L \to \mathbf{N}_1(A \wr B)$ ізотонне.

Для кожного розбиття $M = \bigcup_{i=1}^s M_i$ множини M на блоки імпримітивності природно індукована дія групи A на множині $\Omega_T = \{M_1, ..., M_s\}$ визначає гомоморфізм φ_T: $A \to S_{\Omega_T}$.

Лема 3. *Для кожної підгрупи* $T \in [A_1, A]_L$ *справедливе співвідношення*

$$A \wr B/\eta(T) \simeq A \wr_{\varphi_T} (B/B') \ .$$

Доведення. Гомоморфізм $\tilde{\psi}\colon B^M \to (B/B')^{\Omega_T}$, заданий рівністю $\tilde{\psi}(\beta)\,(i) = B'\prod_{x\in M_i}\beta(x)$, $i = 1, \ldots, s$, продовжимо до гомоморфізму $\psi\colon A\wr B \to A\wr_{\varphi_T} (B/B')$ за правилом $\psi(a\beta) = a\tilde{\psi}(\beta)$. Ядро ψ збігається з групою $\eta(T)$. $\square$

Гомоморфізм ψ індукує ізоморфізм відрізка $[\,\eta(T), A\wr B\,]_N$ ґратки $\mathbf{N}(A\wr B)$ на ґратку нормальних дільників групи $A\wr_{\varphi_T} (B/B')$, зберігаючи глибину підгруп. А тому, маємо

$$[\,\eta(T), A \wr B\,]_N \simeq \mathbf{N}(A \wr_{\varphi_T} (B/B')) \quad \text{та}$$

$$[\,\eta(T), A \wr B\,]_N \cap \mathbf{N}_0(A \wr B) \simeq \mathbf{N}_0(A \wr_{\varphi_T} (B/B')) \ .$$

Якщо N — нормальна підгрупа, то A_1N є підгрупою, і можна визначити відображення $\tau\colon \mathbf{N}(A) \to [A_1, A]_L$ так, що $\tau(N) = A_1N$.

Лема 4. *В групі* $A \wr B$ *кожна нормальна підгрупа* K *глибини 0 містить підгрупу* $\eta\tau\pi(K)$.

Доведення. Покажемо спочатку, що нормальна підгрупа K глибини 0, для якої $\pi(K)$ транзитивна на множині M, містить підгрупу

$$N_K = \left\{\beta \in B^M \mid \prod_{x\in M}\beta(x) \equiv 1(\mathrm{mod} B')\right\} .$$

Справді, N_K породжується множиною $\{b_{1m} \mid b \in B,\ m \in M\backslash\{1\}\}$ [6]. Виберемо довільний елемент $m \in M\backslash\{1\}$. Оскільки група $(\pi(K), M)$ — транзитивна, то існує підстановка $a \in \pi(K)$ така, що $m^a = 1$. Для деякої функції $\alpha \in B^M$ добуток $a\alpha$ належить до K. Для довільної функції $\beta \in B^M$ комутатор $\gamma = [\,\beta, a\alpha]$ дорівнює

$$\gamma = \beta^{-1}a^{-1}\alpha^{-a^{-1}}\beta\, a\alpha = \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^a\alpha \ .$$

Нехай $\alpha(1) = c$, $\beta = c_m$. Тоді $\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^a\alpha = c_m^{-1}\alpha^{-1}c_1\alpha = c_{1m}$ і

$$[c_{1m}, b_1] = {c_{1m}}^{-1}{b_1}^{-1}c_{1m}\, b_1 = (c^{-1}b^{-1}c\, b)_1 \ .$$

Якщо тепер у виразі для γ вибрати $\beta = b_m$, то дістанемо

$$\gamma \cdot [c_{1m}, b_1] = b_m^{-1}\alpha^{-1}b_1\alpha\,(c^{-1}b^{-1}c\, b)_1 = b_{1m} \ .$$

Підгрупа K є нормальною, тому комутатори γ, $[c_{1m}, b_1]$ та елемент b_{1m} як їх добуток належать до K. Оскільки $b \in B$ та $m \in M\backslash\{1\}$ обираються довільно, то K містить всі твірні, а отже, і всю підгрупу N_K.

Якщо група $\pi(K)$ інтранзитивна на множині M, а $M_1, ..., M_t$ — її області транзитивності, то подібно доводиться, що K містить підгрупу

$$N_K = \left\{\beta \in B^M \mid \prod_{x\in M_i}\beta(x) \equiv 1(\mathrm{mod} B'), i = 1, \ldots, t\right\} .$$

Доведемо тепер, що підгрупа $\eta\tau\pi(K)$ є нормальним замиканням підгрупи N_K у вінцевому добутку $A \wr B$. Нехай $M_1, ..., M_t$ — області транзитивності групи $\pi(K)$. Через N позначимо нормальне замикання підгрупи N_K в $A \wr B$. На множині $\Omega = \{M_1, \ldots, M_t\}$ введемо відношення $\sim$, а саме: $M_i \sim M_j$, якщо існують елементи $m \in M_i$ та $n \in M_j$ такі, що для всіх $b \in B$ функція b_{mn} належить до N. Легко переконатися, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності. Замінивши множини одного класу еквівалентності їх об'єднанням, отримаємо розбиття $M = \bigcup_{i=1}^{s} X_i$, яке є інваріантним щодо дії групи A. Тоді воно породжується деякою підгрупою T з $[A_1, A]_L$, і $N = \eta(T)$. Оскільки T містить підгрупи A_1 і $\pi(K)$, вона містить їх точну верхню грань в ґратці підгруп групи A — підгрупу $A_1\pi(K)$. З іншого боку, нормальна підгрупа $\eta(A_1\pi(K))$ містить підгрупу N_K, отже, містить її нормальне замикання $N = \eta(T)$. Врахувавши ізотонність відображення η, отримаємо включення $A_1\pi(K) \geq T$. Об'єднуючи включення, одержуємо рівності $T = A_1\pi(K)$ та $N = \eta(T) = \eta(A_1\pi(K)) = \eta\tau\pi(K)$. $\square$

У загальному випадку $\eta(T)$ є максимальною серед підгруп, що містяться у всіх нормальних підгрупах, які відображення $\tau\pi$ переводить в $T \in [A_1, A]_L$. Прообраз $\pi^{-1}\tau^{-1}([T, A]_L)$ збігається з верньою піднапівґраткою $\mathbf{N}_0(A \wr B) \cap [\eta(T), A \wr B]_N$. Позначимо Υ множину всіх мінімальних елементів інтервалу $(A_1, A]_L$. Оскільки $\pi^{-1}\, \tau^{-1}([A_1, A]_L)$ збігається з $\mathbf{N}_0(A \wr B)$, множину $N_0(A \wr B)$ подамо у вигляді об'єднання

$$N_0(A \wr B) = \bigcup_{T \in \Upsilon} \pi^{-1}\tau^{-1}([T, A]_L) \ .$$

Таке подання задовольняє умови леми 2. Застосовуючи лему 2, отримуємо таке твердження.

Теорема 1. *Верхня напівґратка $\mathbf{N}_0(A \wr B)$ всіх нормальних підгруп глибини 0 групи $A \wr B$ є амальгамованим об'єднанням родини верхніх напівґраток нормальних підгруп:*

$$\mathbf{N}_0(A \wr B) = \biguplus_{T \in \Upsilon} \pi^{-1}\tau^{-1}([T, A]_L) \ ,$$

кожна з яких ізоморфна верхній напівґратці нормальних підгруп глибини 0 вінцевого добутку відповідної групи дій з B/B' :

$$\pi^{-1}\tau^{-1}([T, A]_L) \simeq \mathbf{N}_0(A \wr_{\varphi_T} (B/B')) \ .$$

Якщо група (A, M) — примітивна, то $(A_1, A]_L = \{A\}$. Оскільки $|\Omega_A| = 1$, то вінцевий добуток $A \wr_{\varphi_A} (B/B')$ перетворюється на прямий добуток $A \times (B/B')$. Підгрупами глибини 0 є підгрупи з нетривіальною проекцією на множник A такою, що $\pi^{-1}\tau^{-1}(A) \simeq \mathbf{N}_0(A \times (B/B'))$. Отже, з теореми 1 випливає

Наслідок. *Для примітивної групи підстановок (A, M) ґратки $\mathbf{N}_0(A \wr B)$ та $\mathbf{N}_0(A \times (B/B'))$ ізоморфні.*

4. Опис підґратки $\mathbf{N}_1(A \wr B)$. Ґратка $\mathbf{N}_1(A \wr B)$ містить нормальні дільники типу T^M, де T — нормальна підгрупа групи B. Цим задається занурення ґратки $\mathbf{N}(B)$ в ґратку $\mathbf{N}_1(A \wr B)$. Покладемо для довільної підгрупи $K \in \mathbf{N}_1(A \wr B)$

$$\rho(K) = \{\beta(1) \mid \beta \in K\} \quad \text{та}$$

$$\rho_1(K) = \{\beta(1) \mid \beta \in K, \text{ носій } \beta \text{ рівний } \{1\}\} \ .$$

Зрозуміло, що $\rho_1(K) \leq \rho(K)$, причому рівність досягається лише у випадку $K = \rho_1(K)^M$.

Лема 5. *Для нормальної підгрупи K групи $A \wr B$ глибини 1 виконуються включення $\rho_1(K)^M \leq K \leq \rho(K)^M$. Фактор-група $\rho(K)/\rho_1(K)$ — абелева.*

Доведення. Оскільки до нормальної підгрупи K поряд з кожною функцією b_1 належать всі функції b_{1^a}, $a \in A$, і (A, M) — транзитивна, то K містить $\rho_1(K)^M$. Аналогічно отримуємо, що $K \leq \rho(K)^M$. Для довільних $\beta \in K$ та $b \in B$ комутатор

$$[\beta, b_1] = \beta^{-1} {b_1}^{-1} \beta \, b_1 = (\beta(1)^{-1} b^{-1} \beta(1) \, b)_1$$

належить до K. Тому справедливе включення $[\rho(K), B] \leq \rho_1(K)$, звідки дістаємо абелевість $\rho(K)/\rho_1(K)$. □

Лема 6. *Нехай T_1 і T_2 — нормальні підгрупи групи B такі, що фактор-група T_2/T_1 абелева. Тоді відрізок $[T_1^M, T_2^M]_N$ ґратки $\mathbf{N}_1(A \wr B)$ ізоморфний до ґратки $\mathbf{N}_1(A \wr (T_2/T_1))$.*

Доведення. Якщо $T_1 = E_B$ є одиничною підгрупою групи B, то $T_1^M = E_{A \wr B}$ є одиничною підгрупою групи $A \wr B$, і очевидно маємо $[T_1^M, T_2^M]_N = [E_{A \wr B}, T_2^M]_N \simeq \mathbf{N}_1(A \wr T_2)$. В загальному випадку природний гомоморфізм $\bar{\psi}\colon T_2 \to T_2/T_1$ продовжимо спочатку за правилом $\tilde{\psi}(\beta)\,(i) = \bar{\psi}(\beta(i))$ до гомоморфізму $\tilde{\psi}\colon T_2^M \to (T_2/T_1)^M$, а потім до гомоморфізму $\psi\colon A \wr T_2 \to A \wr (T_2/T_1)$, поклавши $\psi(a\beta) = a\,\tilde{\psi}(\beta)$. Легко переконатися, що $\ker \psi = T_1^M$. При гоморфізмі ψ глибина підгруп зберігається, тому маємо ґратковий гоморфізм $\psi\colon \mathbf{N}_1(A \wr T_2) \to \mathbf{N}_1(A \wr (T_2/T_1))$. □

Подамо конструкцію ґратки $\mathbf{N}_1(A \wr B)$ у припущенні, що будова таких ґраток у випадку абелевої бази вже відома. На множині нормальних дільників групи B введемо відображення $\delta, \zeta\colon N(B) \to N(B)$. Якщо T — нормальна підгрупа групи B, то $\delta(T) = [T, B]$, а $\zeta(T)$ є повним прообразом центру $Z(B/T)$ при природному гомоморфізмі B на B/T. З означення одразу випливає ізотонність відображень δ, ζ та співвідношення

$$\delta\zeta\delta(T) = \delta(T) \ , \quad \zeta\delta\zeta(T) = \zeta(T) \ , \quad \delta\zeta(T) \leq \zeta\delta(T) \ .$$

Оскільки для T_1 і T_2, підгруп з леми 6, $\delta\zeta(T_1) \leq T_1 \leq T_2 \leq \zeta(T_1) = \zeta\delta\zeta(T_1)$, то справедливі включення

$$[T_1^M, T_2^M]_N \subseteq [T_1^M, \zeta(T_1)^M]_N \subseteq [\delta\zeta(T_1)^M, \zeta(T_1)^M]_N = [\delta\zeta(T_1)^M, \zeta\delta\zeta(T_1)^M]_N \ .$$

Позначимо $\Phi = \delta\zeta(N(B))$. Множину $N_1(A \wr B)$ можна подати у вигляді об'єднання множин $\bigcup_{T \in \Phi} [T^M, \zeta(T)^M]_N$. Доповнимо це об'єднання новими елементами так, щоб не розривалося відношення покриття в ґратці $\mathbf{N}_1(A \wr B)$.

Нехай T_2 покриває T_1 в ґратці $\mathbf{N}(B)$, і фактор-група T_2/T_1 неабелева. Оскільки ґратка $\mathbf{N}(B)$ є модулярною, то підгрупа $K \in [T_1, \zeta(T_1)]_N$ покривається підгрупою $K \vee T_2 \in [T_2, \zeta(T_2)]_N$, і фактор-група $K \vee T_2/K \simeq T_2/T_1$ — неабелева.

Розглянемо множину пар

$$\Pi_B = \{(T_1, T_2) \mid T_2 \text{ покриває } T_1 \text{ в } \mathbf{N}(B),\ T_2/T_1 \text{ неабелева}\} .$$

Для $T_2 \in N(B)$ позначимо $\mu(T_2) = \{T_1 \in N(B) \mid (T_1, T_2) \in \Pi_B\}$. Тоді множина Π_B подається у вигляді об'єднання

$$\Pi_B = \bigcup_{T_2 \in \Phi} \ \bigcup_{T_1 \in \mu(\{T_2\})} \ \bigcup_{K \in [T_1, \zeta(T_1)]_N} (K, K \vee T_2) .$$

За множиною Π_B сконструюємо відповідну множину $\Pi_{A \wr B}$ для групи $A \wr B$. Якщо $(T_1, T_2) \in \Pi_B$, то фактор-група $T_2^M/T_1^M \simeq (T_2/T_1)^M$ — неабелева. З леми 5 випливає, що T_2^M покриває T_1^M в $\mathbf{N}_1(A \wr B)$. Єратка $\mathbf{N}_1(A \wr B)$ модулярна, отже, $K \in [T_1^M, \zeta(T_1)^M]_N$ покривається $K \vee T_2^M \in [T_2^M, \zeta(T_2)^M]_N$. Оскільки фактор-група $K \vee T_2^M/K \simeq T_2^M/T_1^M$ неабелева, то $(K, K \vee T_2^M) \in \Pi_{A \wr B}$ для кожної $K \in [T_1^M, \zeta(T_1)^M]_N$.

Навпаки, нехай $(K_1, K_2) \in \Pi_{A \wr B}$. Підгрупа K_2 покриває K_1, отже, $\rho_1(K_2)^M \wedge K_1 = \rho_1(K_1)^M$, $K_2 \vee \rho(K_1)^M = \rho(K_2)^M$. Фактор-група K_2/K_1 неабелева, тому з леми 5 випливає, що $\rho_1(K_1) \neq \rho_1(K_2)$, $\rho(K_1) \neq \rho(K_2)$, $\rho_1(K_2)^M$ покриває $\rho_1(K_1)^M$, $\rho(K_2)^M$ покриває $\rho(K_1)^M$, і фактор-група $\rho(K_2)^M/\rho(K_1)^M \simeq K_2/K_1 \simeq \rho_1(K_2)^M/\rho_1(K_1)^M$ — неабелева. Звідси $(\rho_1(K_1), \rho_1(K_2))$, $(\rho(K_1), \rho(K_2)) \in \Pi_B$.

Отже, множина $\Pi_{A \wr B}$ допускає зображення

$$\Pi_{A \wr B} = \bigcup_{T_2 \in \Phi} \ \bigcup_{T_1 \in \mu(\{T_2\})} \ \bigcup_{K \in [T_1^M, \zeta(T_1)^M]_N} (K, K \vee T_2^M) .$$

Якщо тепер об'єднання $\bigcup_{T \in \Phi} [T^M, \zeta(T)^M]_N$ доповнити об'єднанням із $\Pi_{A \wr B}$, дістанемо родину, яка за умови рівності

$$\mathbf{N}(B) = \left(\biguplus_{T \in \Phi} [T, \zeta(T)]_N \right) \biguplus \left(\biguplus_{(T_1, T_2) \in \Pi_B} [T_1, T_2]_N \right) \tag{1}$$

задовольняє умови леми 2. Отримана

Теорема 2. *Підґратка всіх нормальних дільників глибини 1 вінцевого добутку $A \wr B$, для групи B якого виконана умова (1), є амальгамованим об'єднанням вигляду*

$$\mathbf{N}_1(A \wr B) = \left(\biguplus_{T \in \Phi} [T^M, \zeta(T)^M]_N \right) \biguplus \left(\biguplus_{(T_1, T_2) \in \Pi_{A \wr B}} [T_1, T_2]_N \right) .$$

Для кожної підгрупи $T \in \Phi$ відрізок $[T^M, \zeta(T)^M]_N$ ізоморфний підґратці всіх нормальних підгруп глибини 1 вінцевого добутку групи A з абелевою фактор-групою $\zeta(T)/T$:

$$[T^M, \zeta(T)^M]_N \simeq \mathbf{N}_1(A \wr (\zeta(T)/T)) .$$

Для кожної пари $(T_1, T_2) \in \Pi_{A\wr B}$ *відрізок* $[T_1, T_2]_N$ *ізоморфний лінійно впорядкованій множині з двох елементів.*

5. Опис ґратки $\mathbf{N}(A \wr B)$**.** В пунктах 3.1 та 3.2 охарактеризовані верхня напівґратка $\mathbf{N}_0(A \wr B)$ та ґратка $\mathbf{N}_1(A \wr B)$. За зображенням множини

$$\mathbf{N}_0(A \wr B) = \bigcup_{T \in \Upsilon} \Big([\,\eta(T), A \wr B]_N \cap \mathbf{N}_0(A \wr B) \Big) \, .$$

означимо

$$\overline{\mathbf{N}_0(A \wr B)} = \bigcup_{T \in \Upsilon} [\,\eta(T), A \wr B]_N \, .$$

Перетин множин $\overline{\mathbf{N}_0(A \wr B)}$ та $\mathbf{N}_1(A \wr B)$ визначається рівністю

$$\overline{\mathbf{N}_0(A \wr B)} \cap \mathbf{N}_1(A \wr B) = \bigcup_{T \in \Upsilon} [\eta(T), B^M]_N \, .$$

Якщо ці множини розглядати як частини ґратки $\mathbf{N}(A \wr B)$, то для них виконані умови леми 2, внаслідок чого справджується

Теорема 3. *Гратка* $\mathbf{N}(A \wr B)$ *нормальних підгруп вінцевого добутку груп є амальгамованим об'єднанням верхньої напівґратки* $\overline{\mathbf{N}_0(A \wr B)}$ *та підґратки* $\mathbf{N}_1(A \wr B)$ *нормальних підгруп глибини 1*

$$\mathbf{N}(A \wr B) = \overline{\mathbf{N}_0(A \wr B)} \biguplus \mathbf{N}_1(A \wr B).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Холл М. Теория групп. – М.: ИЛ, 1962. – 468с.
2. Crouch R. *Monomial groups* Trans. Amer. Math. Soc. – 1955, V.80. – P.187–215.
3. Gray A. *Normal subgroups of monomial groups* Pasif. J. Math. – 1962. – V.12. – P.527–532.
4. Kaloujnine L. *La structure de p-groupe de Sylow du groupe symmetrique du degre* p^2 C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris. – 1945. – V.222. – P.1424–1425.
5. Meldrum J. Wreath product. – London, 1995. – 322 p.
6. Neumann P. *On the structure of standard wreath products of groups* Math. Z. – 1964. – V.84. – P.343–373.
7. Ore O. *Theory of monomial groups* Trans. Amer. Math. Soc. – 1942. – V.51. – P.15–64.

Надійшло 19.02.1999