

УДК 517.51

ПОБУДОВА НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ ВІД n ЗМІННИХ З ДАНОЮ ДІАГОНАЛЛЮ

В.К. МАСЛЮЧЕНКО, В.В. МИХАЙЛЮК, О.В. СОБЧУК

V.K. Maslyuchenko, V.V. Mykhaylyuk, O.V. Sobchuk. *Construction of a separately continuous function of n variables with given diagonal*, Matematychni Studii, **12**(1999) 101–107.

It is shown that for arbitrary topological space X with normal n -th power and G_δ -diagonal and arbitrary the $(n - 1)$ -th Baire class function $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ there exists a separately continuous function $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}$ diagonal of which coincides with the function g .

В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк, О.В. Собчук. *Построение раздельно непрерывной функции n переменных с заданной диагональю* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 1. – С.101–107.

Показано, что для произвольного топологического пространства X с нормальной n -той степенью и G_δ -диагональю и произвольной функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ $(n - 1)$ -го класса Бэра существует раздельно непрерывная функция $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}$, диагональ которой совпадает с функцией g .

1. Для довільної множини X і натурального числа $n \geq 2$ розглянемо діагональне відображення $d_n: X \rightarrow X^n$, яке кожному x з X співставляє набір $d_n(x) = (x, \dots, x)$ з X^n . Множину $\Delta_n = d_n(X)$ звичайно називають *діагоналлю добутку* X^n , а композицію $g = f \circ d_n: X \rightarrow Y$ — *діагоналлю відображення* $f: X^n \rightarrow Y$.

У випадку дійсних змінних Р. Бер [1] з'ясував, що функції першого класу і тільки вони є діагоналями нарізно неперервних функцій двох змінних. Цей результат він одержав обхідним шляхом за допомогою своєї характеристики функцій першого класу як точково розривних на кожній досконалій множині, яка виявилася ідентичною з відкритою ним такою ж характеристикою діагоналей нарізно неперервних функцій від двох дійсних змінних. Попередні повідомлення на цю тему були ним дані в [2, 3].

А. Лебєє, запропонувавши в [4] просте доведення того, що нарізно неперервна функція від n дійсних змінних належить до $(n - 1)$ -го класу (звідки, зокрема, легко одержується, що її діагональ є такого ж класу) у праці [5, с.201] повернувся до цього питання і показав, що і навпаки кожна функція $(n - 1)$ -го класу є діагоналлю деякої нарізно неперервної функції від n дійсних змінних. Цю свою останню побудову А. Лебєє здійснив індуктивно спочатку при $n = 2$, помістивши неперервні функції g_k , які апроксимують дану функцію g першого класу, на парах паралельних прямих $|x - y| = \eta_k$, де (η_k) — спеціально підібрана спадна послідовність дійсних чисел, що прямує до нуля, і застосувавши далі

відповідну лінійну інтерполяцію, а потім для довільного n , розібравши при доведенні індуктивного кроку тільки перехід від $n = 2$ до $n = 3$. При цьому Лебеєс зауважує [5, с.203], що у 1899 році Бер сповістив йому одне доведення цього факту, яке йшло від В. Вольтерри і годилося для випадку $n = 2$ (а не для довільного n , як про це помилково твердиться в [6, с.150]).

Побудова Лебеєса використовує мову евклідової геометрії (прямі, площини, кути), яка на перший погляд видається для його конструкції дуже істотною. Принаймні Г. Ган, маючи вже досить великий досвід у роботі з абстрактними просторами, у своїй монографії [7, с.328] розглядає це питання лише для функцій дійсних змінних, правда, подає його у значно детальнішому і повнішому викладі, реалізувавши при цьому вказівки Лебеєса, хоча попередньо він тут же встановлює, що нарізно неперервна функція на добуткові n метризованих просторів, $n - 1$ з яких є сепарабельними, належить до $(n - 1)$ -го класу Бера.

В той час коли питання берівської класифікації нарізно неперервних відображень добутків топологічних просторів вивчене досить добре (див., наприклад, огляд [8] чи дисертацію [9] і вказану там літературу), задача про побудову нарізно неперервної функції з даною діагоналлю впродовж тривалого періоду залишалася поза увагою. Лише порівняно недавно дослідження цієї задачі відновлено з нашої ініціативи. Спочатку було показано [10, 8, 9], що кожна функція $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ першого класу на топологічному просторі з нормальним квадратом X^2 , діагональ Δ_2 якого має тип G_δ , є діагоналлю деякої нарізно неперервної функції $f: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$. При цьому метод доведення, на відміну від застосованих Бером і Лебеєсом міркувань, не був прив'язаний безпосередньо до геометрії площини, а використовував лему Урисона і техніку функціональної інтерполяції, яка раніше була успішно застосована з іншою метою в [12]. Пізніше в [11, 9] цей результат було узагальнено: за тих самих умов на X для кожної функції $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ скінченного класу $n \geq 1$ існує функція $f: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ з діагоналлю g , яка неперервна відносно однієї змінної і є класу $n - 1$ відносно іншої (відповідна стаття відправлена до друку в "Математичні студії"). Нарешті, у цій статті ми показуємо, що при $n \geq 2$ для кожної функції $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ класу $n - 1$ на топологічному просторі X з нормальним n -тим степенем X^n і G_δ -діагоналлю Δ_n існує нарізно неперервна функція $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}$ з діагоналлю g .

Щоб пояснити ідею доведення, введемо деякі позначення. Для точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ та індекса $i = 1, \dots, n$ покладемо $\hat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $q_i(x) = \hat{x}_i$ і $D_i = q_i^{-1}(\Delta_{n-1})$ при $n \geq 3$. Якщо потрібно вказати розмірність, то замість q_i і D_i будемо писати q_i^n і D_i^n . Відображення $q_i^n: X^n \rightarrow X^{n-1}$ ми називаємо *проекцією паралельно до i -тої осі*, а множину D_i^n — *i -тим бісектором в X^n* . Зрозуміло, що $q_i^n(\Delta_n) = \Delta_{n-1}$ і $D_i^n \cap D_j^n = \Delta_n$, як тільки $i \neq j$.

Доведення, як і у Лебеєса, полягає у здійсненні ідуктивного переходу від $n - 1$ до n при $n \geq 3$. Щоб його здійснити, ми подаємо діагональ Δ_n у вигляді перетину послідовності відкритих множин G_k , для яких $\overline{G_{k+1}} \subseteq G_k$, і, користуючись лемою Урисона, будемо відповідну послідовність неперервних функцій $\varphi_k: X^n \rightarrow [0, 1]$, таких, що $\varphi_k(x) = 0$ поза множиною $G_{k-1} \setminus \overline{G_{k+2}}$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = 1$ поза Δ_n . Для заданої функції $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ класу $n - 1$ знаходимо послідовність функцій $g_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ класу $n - 2$, яка поточно збігається до g на X , і згідно з індуктивним припущенням для кожного k визначаємо нарізно неперервну функцію $f_k: X^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $g_k = f_k \circ d_{n-1}$. Якщо тепер покласти для $i = 1, \dots, n$

$$h_i(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) f_k(\hat{x}_i), & \text{якщо } x \in X^n \setminus \Delta_n, \\ g(d_n^{-1}(x)), & \text{якщо } x \in \Delta_n, \end{cases}$$

то ми одержимо нарізно неперервну на $X^n \setminus \Delta_n$ і неперервну відносно i -тої змінної на Δ_n функцію $h_i: X^n \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $h_i \circ d_n = g$. Після цього визначаємо функції $\psi_i: X^n \rightarrow [0, 1]$, які неперервні на $X^n \setminus \Delta_n$ і для яких $\psi_i(x) = 1$ на $D_i \setminus \Delta_n$ і $\psi_i(x) = 0$ на D_j при $j \neq i$. Існування цих функцій легко випливає з функціональної замкненості бісекторів D_i . Тоді шукана функція $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}$ визначається формулою

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \psi_i(x) h_i(x), & \text{якщо } x \in X^n \setminus \Delta_n, \\ g(d_n^{-1}(x)), & \text{якщо } x \in \Delta_n. \end{cases}$$

2. Перейдемо тепер до детального викладу. Для його повноти ми розберемо тут і випадок $n = 2$, дещо модифікувавши при цьому побудову з [8, с.240].

Почнемо з одного елементарного твердження, яке є простим наслідком леми Урисона [13, с.75]. При цьому для функції $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}$ ми покладаємо $\text{supp } \varphi = \{t \in T: \varphi(t) \neq 0\}$, а через χ_A позначаємо характеристичну функцію множини A .

Лема 1. *Нехай F — замкнена, а W_k — відкриті підмножини нормального простору T такі, що $F \subseteq W_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді існують послідовності відкритих в T множин G_k і неперервних функцій $\varphi_k: T \rightarrow [0, 1]$, такі, що $G_0 = T$, $F \subseteq \overline{G_{k+1}} \subseteq G_k \subseteq W_k$ і $\text{supp } \varphi_k \subseteq G_{k-1} \setminus \overline{G_{k+2}}$ при $k \in \mathbb{N}$ і до того ж $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) = 1$ на множині $H = T \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = T \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{G_k}$.*

Доведення. Послідовність множин G_k будемо визначати індуктивно. Покладемо $G_0 = T$ і нехай при деякому m множини G_k вже побудовані для $k \leq m$. Оскільки $F \subseteq G_m \cap W_{m+1}$, то на основі нормальності T існує така відкрита множина G_{m+1} , що $F \subseteq G_{m+1}$ і $\overline{G_{m+1}} \subseteq G_m \cap W_{m+1}$, що і дає нам змогу просунутись у нашій побудові ще на один крок. Розглянемо тепер для кожного $k \in \mathbb{N}$ замкнені множини $A_k = \overline{G_k} \setminus G_{k+1}$ і $B_k = (T \setminus G_{k-1}) \cup \overline{G_{k+2}}$, які, очевидно, не перетинаються. На основі леми Урисона ми можемо знайти неперервні функції $\tilde{\varphi}_k: T \rightarrow [0, 1]$, для яких $\tilde{\varphi}_k(t) = 1$ на A_k і $\tilde{\varphi}_k(t) = 0$ на B_k , причому $\tilde{\varphi}_1(t) > 0$ на $T \setminus G_1$. Оскільки послідовність відкритих множин $H_k = G_{k-1} \setminus \overline{G_{k+2}}$ локально скінченна в H і $\text{supp } \tilde{\varphi}_k \subseteq H_k$ для кожного k , то функція $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(t)$ визначена і неперервна в кожній точці відкритої множини H , причому $\varphi(t) > 0$ на H . Покладемо $\varphi_k(t) = \tilde{\varphi}_k(t)/\varphi(t)$ при $t \in H$ і $\varphi_k(t) = 0$ при $t \in T \setminus H$. Нескладно перевірити, що функції φ_k і будуть шуканими. $\square$

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір з нормальним квадратом X^2 , в якому діагональ Δ_2 має тип G_δ , і $g: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функція першого класу Бера. Тоді існує така нарізно неперервна функція $f: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що $f(t) = g(t)$ на Δ_2 .*

Доведення. Розглянемо деяку послідовність неперервних функцій $g_k: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка поточно збігається до g . Для кожної точки $t = (x, x) \in \Delta_2$ і номера k знайдемо такий відкритий окіл $U_k(x)$ точки x у просторі X , що коливання $\omega_{g_{k+1}}(V_k(t))$ функції g_{k+1} на квадратному околі $V_k(t) = U_k(x) \times U_k(x)$ точки t в X^2 не перевищує $\frac{1}{k}$, і покладемо $V_k = \bigcup_{t \in \Delta_2} V_k(t)$. Зрозуміло, що множини V_k відкриті і при цьому, якщо точка $p = (x, y) \in V_k$, то для точок $a = (x, x)$ і $b = (y, y)$ виконуються нерівності $|g_{k+1}(p) - g_{k+1}(a)| \leq \frac{1}{k}$ і $|g_{k+1}(p) - g_{k+1}(b)| \leq \frac{1}{k}$. Справді, взявши таке $t \in \Delta_2$, що $p \in V_k(t)$, ми одержимо, очевидно, що $a, b \in V_k(t)$, отже, числа $|g_{k+1}(p) - g_{k+1}(a)|$ і $|g_{k+1}(p) - g_{k+1}(b)|$ не перевищують коливання $\omega_{g_{k+1}}(V_k(t))$, яке в свою чергу $\leq \frac{1}{k}$.

Виберемо тепер таку послідовність відкритих множин U_k в X^2 , що $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \Delta_2$. З нормальності простору X^2 випливає гаусдорфовість простору X , а звідси — замкненість діагоналі Δ_2 в X^2 . Тому на основі леми 1, застосованої до простору $T = X^2$, множини $F = \Delta_2$ і множин $W_k = U_k \cap V_k$, ми можемо побудувати відповідні послідовності множин G_k і функцій φ_k . Покладемо

$$f = g \cdot \chi_{\Delta_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k g_k$$

і покажемо, що функція f шукана.

Оскільки $\Delta_2 \subseteq G_k \subseteq U_k$ і $\overline{G_{k+1}} \subseteq G_k$ для кожного k , то $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{G_k} = \Delta_2$. Функція $h = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k g_k$ неперервна в кожній точці відкритої множини $H = X^2 \setminus \Delta_2$, адже функції $h_k = g_k \varphi_k$ неперервні, $\text{supp } h_k \subseteq H_k = G_{k-1} \setminus \overline{G_{k+2}}$, $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ і послідовність відкритих множин H_k локально скінченна в H . Але $f|_H = h|_H$ і множина H відкрита, отже, і f неперервна в кожній точці з H .

Виберемо довільну точку $t = (x, x)$ на діагоналі Δ_2 . Оскільки $\varphi_k(t) = 0$ для кожного k , то $f(t) = g(t)$. Отже, залишилося показати, що f нарізно неперервна в точці t . Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер k_0 , що $k_0 > 2$, $\frac{1}{k_0-2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ і $|g_k(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $k \geq k_0 - 1$. Розглянемо такий окіл U точки x в просторі X , що $U^2 \subseteq G_{k_0}$, а також візьмемо довільні точки $p_1 \in U \times \{x\}$ і $p_2 \in \{x\} \times U$, що відрізняються від точки t , і з'ясуємо, що $|f(p_i) - f(t)| \leq \varepsilon$ при $i = 1, 2$.

Оскільки $p_i \in H$, то $p_i \in G_m \setminus G_{m+1}$ для деякого m . Крім того, $p_i \in G_{k_0}$, отже, $m \geq k_0$. Але $H_k \subseteq G_{m+1}$ при $k \geq m + 2$ і $H_k \cap G_m = \emptyset$ при $k \leq m - 2$. Тому, $p_i \notin H_k$ при $|k - m| \geq 2$, тобто, $\varphi_k(p_i) = 0$ при таких k . Звідси

$$\begin{aligned} |f(p_i) - f(t)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (g_k(p_i) - g(t)) \varphi_k(p_i) \right| \leq \sum_{|k-m| \leq 1} |g_k(p_i) - g(t)| \varphi_k(p_i) \leq \\ &\leq \sum_{|k-m| \leq 1} |g_k(p_i) - g_k(t)| \varphi_k(p_i) + \sum_{|k-m| \leq 1} |g_k(t) - g(t)| \varphi_k(p_i). \end{aligned}$$

Але $p_i \in G_m \subseteq G_{m-1} \subseteq G_{m-2}$ і за побудовою $G_k \subseteq V_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, отже, $p_i \in V_m \cap V_{m-1} \cap V_{m-2}$, і тому, згідно з вибором множин V_k маємо, що $|g_k(p_i) - g_k(t)| \leq \frac{1}{k-1}$ при $k = m - 1, m, m + 1$. Тоді і $|g_k(p_i) - g_k(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при цих же k , адже $\frac{1}{m} < \frac{1}{m-1} < \frac{1}{m-2} \leq \frac{1}{k_0-2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Крім того, і $|g_k(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $k = m - 1, m, m + 1$, адже тоді $k \geq m - 1 \geq k_0 - 1$. Отже, отримуємо

$$|f(p_i) - f(t)| \leq \varepsilon \sum_{|k-m| \leq 1} \varphi_k(p_i) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p_i) = \varepsilon,$$

що й треба було довести. $\square$

Оскільки кожна функція $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, яка є першого класу на просторі X , є діагоналлю деякої функції $\tilde{g}: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що є першого класу на X^2 , наприклад, функція $\tilde{g}(x, y) = g(x)$, то з доведеної теореми негайно одержується

Наслідок. Кожна функція $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ першого класу на просторі X з нормальним квадратом і діагоналлю типу G_δ є діагоналлю деякої нарізно неперервної функції $f: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

3. Перейдемо до розгляду загального випадку. Спочатку вивчимо умови, за яких діагональ Δ_n простору X^n є множиною типу G_δ . Ми кажемо, що множина A в топологічному просторі T є типу $\overline{G_\delta}$, якщо існує така послідовність

відкритих в T множин G_k , що $\overline{G_{k+1}} \subseteq G_k$ для кожного k і $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Зрозуміло, що тоді і $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{G_k} = A$, отже, множина типу $\overline{G_\delta}$ обов'язково замкнена. Навпаки, як показує лема 1, замкнена G_δ -множина у нормальному просторі є типу $\overline{G_\delta}$ і, крім того, функціонально замкненою [13, с.76]. Функціонально замкнена множина у довільному просторі є типу $\overline{G_\delta}$.

Лема 2. *Нехай X — топологічний простір з нормальним квадратом. Тоді наступні умови рівносильні:*

- (i) для кожного n діагональ Δ_n є типу G_δ в X^n ;
- (ii) для деякого n діагональ Δ_n є типу G_δ в X^n ;
- (iii) діагональ Δ_2 є типу G_δ в X^2 ;
- (iv) діагональ Δ_2 є функціонально замкненою в X^2 ;
- (v) для кожного n діагональ Δ_n функціонально замкнена в X^n ;
- (vi) для кожного n всі бісектори D_i^n в X^n функціонально замкнені;
- (vii) хоча б один бісектор D_i^n в X^n для деякого n є функціонально замкненим;
- (viii) для кожного n діагональ Δ_n є типу $\overline{G_\delta}$ в X^n .

Доведення. Імплікації (i) $\implies$ (ii), (iii) $\implies$ (iv), (v) $\implies$ (vi), (vi) $\implies$ (vii), (v) $\implies$ (viii) і (viii) $\implies$ (i) або очевидні, або легко випливають з означень чи сказаного вище. Залишається довести імплікації (ii) $\implies$ (iii), (iv) $\implies$ (v) і (vii) $\implies$ (ii).

(ii) $\implies$ (iii). Нехай Δ_n є множиною типу G_δ в X^n при деякому $n \geq 3$. Розглянемо, наприклад, бісектор

$$D_1^n = q_1^{-1}(\Delta_{n-1}) = \{(x, y, \dots, y) : x \in X, y \in X\} = X \times \Delta_{n-1},$$

наділений індукованою з X^n топологією, яка, очевидно, збігається з топологією добутку на $X \times \Delta_{n-1}$. Легко перевірити, що відображення $h = \text{id}_X \times d_{n-1}^{-1} : D_1^n \rightarrow X^2$ є гомеоморфізмом, для якого $h(\Delta_n) = \Delta_2$. Оскільки Δ_n є типу G_δ в D_1^n , то Δ_2 є типу G_δ в X^2 .

(iv) $\implies$ (v). Застосуємо індукцію відносно n . Нехай $n \geq 3$ і діагональ Δ_{n-1} в просторі X^{n-1} є функціонально замкненою, тобто існує така неперервна функція $\varphi : X^{n-1} \rightarrow [0, 1]$, що $\Delta_{n-1} = \varphi^{-1}(0)$. Для кожного $i = 1, \dots, n$ розглянемо неперервну функцію $\varphi_i = \varphi \circ q_i$, де $q_i : X^n \rightarrow X^{n-1}$ — проекція паралельно i -тій осі. Оскільки $\varphi_i^{-1}(0) = q_i^{-1}(\varphi^{-1}(0)) = q_i^{-1}(\Delta_{n-1}) = D_i^n$, то всі бісектори D_i^n в X^n є функціонально замкненими. Але $\Delta_n = \bigcap_{i=1}^n D_i^n$, отже, і Δ_n функціонально замкнена.

(vii) $\implies$ (ii). Нехай існує таке $n \geq 3$ і індекс $i = 1, \dots, n$, що бісектор D_i^n функціонально замкнений в X^n . Розглянемо довільний індекс $j = 1, \dots, n$, відмінний від i . Відображення $\varphi_{ij} : X^n \rightarrow X^n$, яке переставляє місцями координати x_i і x_j , є, очевидно, гомеоморфізмом простору X^n і при цьому $\varphi_{ij}(D_i^n) = D_j^n$. Звідси випливає, що кожний бісектор D_j^n в X^n є функціонально замкнений, отже, таким є і їх перетин Δ_n . Тоді Δ_n є типу G_δ в X^n , отже, справджується (ii). $\square$

Наступна лема служить для склейки функцій, побудованих при попередньому відокремленні змінних, коли ми здійснюємо індуктивний перехід від $n - 1$ до n у доведенні основної теореми.

Лема 3. *Нехай X — топологічний простір з нормальним квадратом, в якому діагональ є типу G_δ . Тоді для довільного $n \geq 3$ і індекса $i = 1, \dots, n$ існує функція $\psi_i : X^n \rightarrow [0, 1]$, яка неперервна на $X^n \setminus \Delta_n$, дорівнює 1 на $D_i^n \setminus \Delta_n$ і 0 на D_j^n при $j \neq i$.*

Доведення. З леми 2 випливає, що всі бісектори D_j^n функціонально замкнені в X^n , тобто існують такі неперервні функції $\tilde{\psi}_j: X^n \rightarrow [0, 1]$, що $D_j^n = \tilde{\psi}_j^{-1}(0)$. Покладемо $D_i^* = \bigcup_{j \neq i} D_j^n$ і $\psi_i^* = \prod_{j \neq i} \tilde{\psi}_j$. Зрозуміло, що ψ_i^* — неперервна функція і $(\psi_i^*)^{-1}(0) = D_i^*$. Функції ψ_i визначимо рівністю

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{\psi_i^*(x)}{\tilde{\psi}_i(x) + \psi_i^*(x)}, & \text{якщо } x \in X^n \setminus \Delta_n, \\ 0, & \text{якщо } x \in \Delta_n. \end{cases}$$

Оскільки $\tilde{\psi}_i$ і ψ_i^* невід'ємні, то $(\tilde{\psi}_i + \psi_i^*)^{-1}(0) = \tilde{\psi}_i^{-1}(0) \cap (\psi_i^*)^{-1}(0) = D_i^n \cap D_i^* = \Delta_n$. Тому функція ψ_i визначена і неперервна на $X^n \setminus \Delta_n$, адже вона на відкритій множині $X^n \setminus \Delta_n$ збігається з часткою двох неперервних функцій. Нехай $x \in D_j^n \setminus \Delta_n$. Якщо $j = i$, то $\tilde{\psi}_i(x) = 0$, отже, $\psi_i(x) = 1$. Якщо ж $j \neq i$, то $x \in D_i^* \setminus \Delta_n$, тому $\psi_i^*(x) = 0$, звідси, $\psi_i(x) = 0$, і, отже, лему доведено. $\square$

У доведенні наступної основної теореми через $\varphi \cdot \chi_A$ позначається функція на T , яка на множині $A \subseteq T$ збігається з функцією $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$, а поза A дорівнює нулю.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, у якого степінь X^n нормальний і діагональ Δ_n є типу G_δ в X^n , і $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — функція $(n-1)$ -го класу Бера. Тоді існує нарізно неперервна функція $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}$, діагональ якої дорівнює g .*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n . При $n = 2$ твердження теореми збігається з наслідком теореми 1. Припустимо, що $n \geq 3$ і теорему доведено, коли число змінних дорівнює $n - 1$. Розглянемо послідовність функцій g_k класу $n - 2$ на X , яка поточною прямує до функції g . Згідно з індуктивним припущенням для кожного k існує нарізно неперервна функція $f_k: X^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ з діагоналлю g_k . Застосувавши лему 1 у тому випадку, коли $T = X^n$, $F = \Delta_n$ і W_k — це відкриті в X^n множини, які в перетині дають Δ_n , одержимо відповідні послідовності відкритих множин G_k і функцій $\varphi_k: X^n \rightarrow [0, 1]$. Зрозуміло, що $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{G_k} = \Delta_n$. Для кожного $i = 1, \dots, n$ покладемо $h_i = g \circ d_n^{-1} \cdot \chi_{\Delta_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot (f_k \circ q_i^n)$. Оскільки послідовність відкритих множин $H_k = G_{k-1} \setminus \overline{G_{k+2}}$ покриває відкриту множину $H = X^n \setminus \Delta_n$ і є локально скінченною в H , звуження $h_i|_H = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k|_H \cdot (f_k \circ q_i^n)|_H$, функції $h_i^k = \varphi_k \cdot (f_k \circ q_i^n)$ нарізно неперервні і $\text{supp } h_i^k \subseteq H_k$, то і функція h_i нарізно неперервна в кожній точці множини H . Крім того, $h_i|_{\Delta_n} = g \circ d_n^{-1}$, бо $\varphi_k|_{\Delta_n} = 0$ для кожного k .

Переконаємось тепер, що кожна функція h_i неперервна відносно i -тої змінної в кожній точці діагоналі Δ_n . Нехай $p_0 = d_n(x_0) \in \Delta_n$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо такий номер k_0 , що $|g_k(x_0) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ для всіх $k \geq k_0$. Оскільки множина G_{k_0+1} відкрита і $p_0 \in G_{k_0+1}$, то існує такий окіл U точки x_0 в X , що $U^n \subseteq G_{k_0+1}$. Нехай $U_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n: x_i \in U \text{ і } x_j = x_0 \text{ при } j \neq i\}$. Розглянемо точку $p \in U_i \setminus \{p_0\}$ і покажемо, що $|h_i(p) - h_i(p_0)| \leq \varepsilon$. По-перше, зазначимо, що $q_i^n(p) = d_{n-1}(x_0)$, отже, $(f_k \circ q_i^n)(p) = f_k(q_i^n(p)) = f_k(d_{n-1}(x_0)) = g_k(x_0)$ згідно з вибором функцій f_k . Далі, при $k < k_0$ маємо, що $\text{supp } \varphi_k \cap G_{k_0+1} = \emptyset$, і $\varphi_k(p) = 0$ при $k < k_0$, адже $p \in U_i \subseteq U^n \subseteq G_{k_0+1}$. Тому

$$\begin{aligned} |h_i(p) - h_i(p_0)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p) g_k(x_0) - g(x_0) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p) (g_k(x_0) - g(x_0)) \right| = \\ &= \left| \sum_{k \geq k_0} \varphi_k(p) (g_k(x_0) - g(x_0)) \right| \leq \sum_{k \geq k_0} \varphi_k(p) |g_k(x_0) - g(x_0)| \leq \varepsilon \sum_{k \geq k_0} \varphi_k(p) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p) = 1$, адже $p \in X^n \setminus \Delta_n$, і, крім того, функції φ_k невід'ємні.

Розглянемо функції ψ_i з лемми 3 і покладемо $f = g \circ d_n^{-1} \cdot \chi_{\Delta_n} + \sum_{i=1}^n \psi_i h_i$. Зрозуміло, що f нарізно неперервна на $X^n \setminus \Delta_n$ як скінченна сума таких функцій і g є діагоналлю f . Покажемо, що f нарізно неперервна в кожній точці діагоналі Δ_n . Для того, щоб з'ясувати, що f неперервна відносно i -тої змінної на Δ_n , досить показати, що звуження $f|_{D_i^n}$ неперервне відносно i -тої змінної. Але коли $x \in D_i^n \setminus \Delta_n$, то $\psi_j(x) = 0$ при $j \neq i$, а $\psi_i(x) = 1$, отже, $f(x) = h_i(x)$, а при $x \in \Delta_n$ маємо, що $f(x) = g(d_n^{-1}(x)) = h_i(x)$. Таким чином, $f|_{D_i^n} = h_i|_{D_i^n}$, а за побудовою функція h_i неперервна відносно i -тої змінної, отже, і f неперервна відносно i -тої змінної, і тим самим теорему доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Baire R. *Sur les fonctions de variables réelles* Annali di mat. pura ed appl., ser.3. – 1899. – 3. – P.1–123.
2. Baire R. *Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles* C.R. Acad. Sci. Paris. – 1897. – T.125. – P.691–694.
3. Baire R. *Sur les fonctions discontinues développables en series de fonctions continues* C.R. Acad. Sci. Paris. – 1898. – T.126. – P.884–887.
4. Lebesgue H. *Sur l'approximation des fonctions* Bull. Sci. Math. – 1898. – T.22. – P.278–287.
5. Lebesgue H. *Sur les fonctions représentables analytiquement* Journ. de Math., ser.6. – 1905. – T.1. – P.139–216.
6. Медведев Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв. – Москва: Наука, 1976. – 232 с.
7. Hahn H. *Reelle Funktionen*. 1. Teil. Punktfunktionen. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932. – 416 S.
8. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Дослідження про нарізно неперервні функції* Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С.192–246.
9. Собчук О.В. Берівська класифікація нарізно неперервних відображень та дискретні обернені задачі. – Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1996. – 82 с.
10. Собчук О.В. *Нарізно неперервні функції з даною діагоналлю* Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10-15 жовтня 1994 р., Чернівці). Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 1994. – С.139.
11. Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Функції з діагоналлю скінченного класу* Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях", присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С.Казимірського (5–7 жовтня 1995 р.). Тези доповідей. Ч.1. – Львів, 1995. – С.82.
12. Маслюченко В.К., Собчук О.В. *Берівська класифікація і σ -метризовні простори* Мат. студії. – 1994. – Вип.3. – С.95–102.
13. Энгелькинг Р. *Общая топология*. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.

Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича, кафедра математичного аналізу

Надійшло 27.10.1998