

УДК 513.88

**УМОВИ МАКСИМАЛЬНОЇ АКРЕТИВНОСТІ ТА
МАКСИМАЛЬНОЇ НЕВІД'ЄМНОСТІ ОДНОГО
КЛАСУ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ЗБУРЕНЬ
ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА**

О.Я. Мильо, О.Г. СТОРОЖ

O.Ya. Mylyo, O.G. Storozh. *Maximal accretiveness and maximal nonnegativeness conditions for a class of finite-dimensional perturbations of a positively defined operator*, Matematychni Studii, **12**(1999) 90–100.

Using methods of expansion theory in the terms of abstract boundary conditions criteria of maximal accretiveness and maximal nonnegativeness of investigated operators are established. In a special case the conditions of coercitivity for considered operators are obtained and corresponding energetic spaces are constructed. In this way the solvability of a certain variational problem is proved.

О.Я. Мильо, О.Г. Сторож. *Условия максимальной аккретивности и максимальной неотрицательности одного класса конечномерных возмущений положительно определенного оператора* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 1. – С.90–100.

Применяя методы теории расширений в терминах абстрактных краевых условий установлены критерии максимальной аккретивности и максимальной неотрицательности исследуемых операторов. В одном частном случае получены условия положительной определенности рассматриваемых операторов и построены соответствующие энергетические пространства. Тем самым доказана разрешимость некоторой вариационной задачи.

Протягом останніх років увагу багатьох математиків привертала диференціальні оператори з різного роду неklasичними (наприклад, інтегральними, багатоточковими і т. п.) крайовими умовами. При цьому будувалися відповідні теоретико-функціональні моделі. Одна з таких моделей запропонована в [6, 8]. Однак в цих роботах розглядаються лише оператори, визначені на гладких елементах, тобто таких, які у випадку диференціальних операторів не виходять за межі області визначення відповідного максимального оператора.

В працях авторів [1, 2] досліджено один клас збурень додатно визначеного оператора, які (збурення) можуть бути визначені й на негладких елементах.

1991 *Mathematics Subject Classification*. 47A55, 47B25, 47B44.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською Програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) грант APU071105

Keywords: expansion theory, abstract boundary conditions, maximal accretiveness, maximal nonnegativeness, operator coercivity

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T $\mathcal{E}\mathcal{X}$

doi:10.30970/ms.12.1.90-100

Зокрема, встановлено умови самоспряженості та максимальної дисипативності розглядуваних операторів.

Ця стаття є продовженням згаданих праць. Її метою є встановлення критеріїв максимальної невід'ємності та максимальної акретивності операторів, про які йшла мова в [1, 2], зокрема, отримання опису максимально акретивних розширень додатно визначеного оператора з скінченними дефектними числами.

У цій роботі, як і в статтях [1, 2], використовуються такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення, область значень і ядро оператора T ; $\mathcal{B}(X, Y)$ — сукупність лінійних неперервних операторів $A: X \rightarrow Y$ таких, що $D(A) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$; $A|E$ — звуження оператора A на множину E . Якщо $A_i: X \rightarrow Y_i$ ($i = 1, \dots, n$) — лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ означає, що $Ax = (A_1x, \dots, A_nx)$.

Роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$ з індексом дефекту $(m; m)$ ($0 < m < \infty$), де H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$, а $\mathcal{C}(H)$ — клас лінійних замкнених операторів у цьому просторі зі щільною областю визначення. Через L_F позначаємо жорстке (фрідріхсівське) розширення оператора L_0 , а через H_e та $(\cdot|\cdot)_e$ — його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток див. [3, 4]. Під $\mathcal{P}$ розуміємо проектор $D(L_0^*) \rightarrow D(L_F)$ паралельно до $\ker L_0^*$, а під $D[T]$, де $T \in \mathcal{C}(H)$, — гільбертів простір $D(T)$ зі скалярним добутком $(y|z)_T = (y|z) + (Ty|Tz)$. Якщо $G \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, то оператор G^0 визначаємо з умови: $(\forall u \in H_e) (\forall h \in \mathcal{H}) (Gu|h)_{\mathcal{H}} = (u|G^0h)_e$. Далі, нехай $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивний простір граничних значень (ПГЗ) оператора L_0 , що відповідає розширенню L_F (див. [4, 5]),

$$\begin{aligned} \Psi &\in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H}), R(\Psi^0) \cap D(L_F) = \{0\}; \quad \Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H}); \\ \chi &= \Psi\mathcal{P} + \Phi, \chi^0 \stackrel{\text{def}}{=} (\chi|H_e)^0 = \Psi^0 + \Phi^0 = \Psi^0 + L_F^{-1}\Phi^*; \\ C_i, A_{ij} &\in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \Psi_i = C_i\Psi, \Phi_i = C_i\Phi, \chi_i = C_i\chi \quad (i, j = 1, 2); \\ A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathcal{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

$P(P_2)$ — ортопроектор з $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ на $\mathcal{H} \oplus R(\chi)$ (на $\mathcal{H} \oplus R(\chi_2)$), $P_{\chi}(P_{\chi_2}, P_{\Psi})$ — ортопроектор з $\mathcal{H}$ на $R(\chi)$ (на $R(\chi_2)$, на $R(\Psi)$), $U = U_1 \oplus U_2 = A\Gamma$, де $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$.

Нижче скрізь припускається, що існує бієкція $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ така, що $A = P_2\mathcal{A}$ (тобто, згідно з термінологією, запропонованою в [1, 2], $(U_1, U_2) \in \chi_2$). Покладемо $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 = A\Gamma$ і позначимо через $\tilde{\mathcal{U}}_1, \tilde{\mathcal{U}}_2 \in \mathcal{B}(D[L_0^*], \mathcal{H})$ оператори, які однозначно (див. [6]) визначаються умовою:

$$\forall y, z \in D(L_0^*) \quad (L_0^*y|z) - (y|L_0^*z) = (\mathcal{U}_1y|\tilde{\mathcal{U}}_2z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2y|\tilde{\mathcal{U}}_1z).$$

Далі вважаємо що оператори Γ , U , $\mathcal{U}$, $\tilde{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{U}}_2$, Γ_i , U_i , $\mathcal{U}_i$, $\tilde{\mathcal{U}}_i$ ($i = 1, 2$) продовжені за лінійністю нулем на $R(\Psi^0)$.

Визначимо оператор $\Gamma_3: D_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} D(L_0^*) \dot{+} R(\Psi^0) \rightarrow R(\Psi)$ виходячи з умови: $\Gamma_3y = h \Leftrightarrow y + \Psi^0h \in D(L_0^*)$, а оператори $L_{\max}$ та $L_{\min}$ — за допомогою співвідношень

$$D(L_{\max}) = D_{\max}, \forall y \in D_{\max} \quad L_{\max}y = L_0^*(y + \Psi^0\Gamma_3y), \quad (2)$$

$$D(L_{min}) = \{y \in D(L_0) : \Psi y = 0\}, L_{min} \subset L_0. \quad (3)$$

1°. Нагадаємо (див. [5, 7]), що оператор T називається θ -акретивним ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), якщо $\forall y \in D(T)$, $\arg(Ty|y) \in [\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}]$ і максимально акретивним, якщо, крім цього, він не має θ -акретивних розширень. Акретивним оператором називається 0-акретивний оператор.

Метою цього пункту є встановлення умов максимальної θ -акретивності та максимальної невід'ємності оператора T такого, що

$$\begin{aligned} D(T) &= \{y \in D_{max} : y + \chi_2^0 U_2 y \in D(L_0^*), U_1 y = \chi_1 y\} = \\ &= \{y \in D(L_{max}) : U_1 y - \Psi_1 \mathcal{P} y = \Phi_1 y, \Gamma_3 y = P_\Psi C_2^* U y\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = L_0^*(y + \chi_2^0 U_2 y) = L_{max} y + \Phi_2^* U_2 y. \quad (5)$$

У випадку диференціальних операторів умови (4) — це неklasичні крайові умови (наприклад, багатоточкові або інтегральні). Абстрактні аналоги операторів з такими умовами розглядалися у багатьох працях, див., наприклад, [8–10] та цитовану там літературу. Відзначимо також, що задача, поставлена вище, розв'язана в [11] для випадку, коли $\Psi = 0$, в [12, 13] — для випадку коли $\theta = 0, C_1 = 0$ або $\theta = 0, C_2 = 0$ і що подібні задачі досліджено в [14–16].

З результатів, викладених в [8, 9], випливає, що $T \in \mathcal{C}(H)$, тому (див. [17, 18]) його максимальна θ -акретивність (максимальна невід'ємність) рівносильна максимальній ($-\theta$)-акретивності (максимальній невід'ємності) оператора T^* .

Розглянемо деякі властивості цього оператора. Як видно з теореми 2 (про вигляд спряженого оператора) [1],

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \{z \in D_{max} : z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z \in D(L_0^*), \tilde{\mathcal{U}}_1 z = \chi_2 z\} = \\ &= \{z \in D(L_{max}) : \tilde{\mathcal{U}}_1 z - \Psi_2 \mathcal{P} z = \Phi_2 z, \Gamma_3 z = P_\Psi C_1^* \tilde{\mathcal{U}}_2 z\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\forall z \in D(T^*) \quad T^* z = L_0^*(z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z) = L_{max} z + \Psi_1^* \tilde{\mathcal{U}}_2 z.$$

Безпосередньо з (6) і леми 2 [2] випливає, що

$$\{(\tilde{\mathcal{U}}_2 z, -\chi z) : z \in D(T^*)\} = \mathcal{H} \oplus R(\chi). \quad (7)$$

Для будь-якого $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$ покладемо:

$$\begin{aligned} D_h &= \{z \in D_{max} : z + \chi_1^0 h_1 \in D(L_0^*), \Gamma_1 z = -(A_{12}^* h_1 + A_{22}^* C_2 h_2), \\ &\quad \Gamma_2 z = A_{11}^* h_1 + A_{21}^* C_2 h_2, \chi z = -h_2\} \end{aligned} \quad (8)$$

і визначимо оператор $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ у наступний спосіб:

$$\forall h = (h_1, h_2) \quad Jh = (ih_2, -ih_1).$$

Лема 1. Елемент $z \in D_{max}$ належить до $D(T^*)$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$ $z \in D_h$. При цьому $h_1 = \tilde{\mathcal{U}}_2 z$.

Доведення. Нехай $z \in D(T^*)$, $h_1 = \tilde{\mathcal{U}}_2 z$, $h_2 = -\chi z$, $h = (h_1, h_2)$. З результатів, викладених в [6], випливає, що $\Gamma = JA^*J\tilde{\mathcal{U}}$. Враховуючи (6), отримуємо:

$$\Gamma z = \begin{pmatrix} 0 & -1_{\mathcal{H}} \\ 1_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix} A^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} h, \quad (9)$$

тобто $z \in D_h$.

Навпаки, нехай $z \in D_h$. Тоді зрозуміло, що справедлива рівність (9), яка еквівалентна такій:

$$\tilde{\mathcal{U}}z = i\tilde{\mathcal{A}}JA^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} h,$$

де $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ визначається з умови: $\tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{A}}\Gamma$. Відомо [6], що $JA\tilde{\mathcal{A}}^* = J$, тому $\tilde{\mathcal{U}}_1 z = -C_2 h_2$, $\tilde{\mathcal{U}}_2 z = h_1$. Для завершення доведення досить використати третю з рівностей, якими визначається многовид D_h (див. (8)). $\square$

Перед тим, як переходити до формулювання основних результатів, покладемо $Z \stackrel{\text{def}}{=} (\Gamma_1 L_F^{-1})^*$, нагадаємо, що (див. [4–6, 11])

$$\forall y \in D(L_0^*) \quad \mathcal{P}y = y - Z\Gamma_2 y, \quad (10)$$

$$\forall u, v \in D(L_0^*) \quad (L_0^* u | v) = (L_F \mathcal{P}u | \mathcal{P}v) + (\Gamma_1 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}}, \quad (11)$$

і введемо такі позначення:

$$\mathcal{Y}_1 = \mathcal{P} \left[- \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} A \mathfrak{X} A^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1^* \end{pmatrix} \mathfrak{X}^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \right] \mathcal{P},$$

$$\mathcal{Y}_2 = \mathcal{P} \left[2\text{Re} \begin{pmatrix} \chi_1 Z A_{11}^* & \chi_1 Z A_{21}^* C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \chi_1 \chi_1^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \mathcal{P}.$$

Лема 2. Нехай $h \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$. Тоді

$$\forall z \in D_h \quad (T^* z | z) = (L_F(z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z - Z\Gamma_2 z) | z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z - Z\Gamma_2 z) + (\mathcal{Y}_1 h | h)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + (\mathcal{Y}_2 h | h).$$

Доведення. Нехай $z \in D_h$, а $u \stackrel{\text{def}}{=} z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z$. З (11) випливає, що

$$(T^* z | z) = (L_F \mathcal{P}u | \mathcal{P}u) + (\Gamma_1 u | \Gamma_2 u)_{\mathcal{H}} - (L_0^* u | L_F^{-1} \Phi_1^* \tilde{\mathcal{U}}_2 z) - (L_0^* u | \Psi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z).$$

Виходячи звідси і з теореми 1 [1] (абстрактний аналог формули Лагранжа), бачимо, що

$$\begin{aligned} (T^* z | z) &= (L_F \mathcal{P}u | \mathcal{P}u) + (\Gamma_1 u | \Gamma_2 u)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{P}u | \Phi_1^* \tilde{\mathcal{U}}_2 z) - (u | L_{max} \Psi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z) - \\ &- (\Gamma_1 u | \Gamma_2 \Psi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_2 u | \Gamma_1 \Psi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_3 u | \Psi \mathcal{P} \Psi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} + (\Psi \mathcal{P} u | \Gamma_3 \Psi^0 C_1^* \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Тому, беручи до уваги (10) і лему 2.3 [13] $\ker L_{max} = \ker L_0^* + R(\Psi^0)$, робимо такий висновок:

$$(T^* z | z) = (L_F \mathcal{P}u | \mathcal{P}u) + (\Gamma_1 u | \Gamma_2 u)_{\mathcal{H}} - (\chi_1 u | \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} + (\Phi_1 Z \Gamma_2 u | \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}}.$$

Але $\Psi_1 \mathcal{P}Z = 0$, тобто

$$\Phi_1 Z = \chi_1 Z. \quad (12)$$

Далі, як показує рівність (10),

$$\mathcal{P}u = z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z - Z\Gamma_2 z. \quad (13)$$

Крім цього, як легко бачити,

$$\Gamma_1 u = \Gamma_1 z + (\chi_1 Z)^* \tilde{\mathcal{U}}_2 z, \quad (14)$$

$$\Gamma_2 u = \Gamma_2 z, \quad (15)$$

$$\chi_1 u = \chi_1 z + (\chi_1 \chi_1^0) \tilde{\mathcal{U}}_2 z. \quad (16)$$

Враховуючи (12)–(16), переконаємося в справедливості рівності

$$\begin{aligned} (T^* z | z) &= (L_F(z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z - Z\Gamma_2 z) | z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z - Z\Gamma_2 z) + (\Gamma_1 z | \Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} + \\ &+ (\tilde{\mathcal{U}}_2 z | (\chi_1 Z)\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\chi_1 z | \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} - ((\chi_1 \chi_1^0) \tilde{\mathcal{U}}_2 z | \tilde{\mathcal{U}}_2 z) + ((\chi_1 Z)\Gamma_2 z | \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Але (див. (1), (8), (9) і лему 1) $\forall z \in D_h$

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 z | \Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} &= - \left(\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} A \mathfrak{X} A^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} h | h \right)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}, \\ -(\chi_1 z | \tilde{\mathcal{U}}_2 z) &= \left(\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1^* \end{pmatrix} \mathfrak{X} \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} h | h \right)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}, \\ ((\chi_1 \chi_1^0) \tilde{\mathcal{U}}_2 z | \tilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} \chi_1 \chi_1^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h | h \right)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}, \\ ((\chi_1 Z)\Gamma_2 z | \tilde{\mathcal{U}}_2 z) + (\tilde{\mathcal{U}}_2 z | (\chi_1 Z)\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} &= \\ &= \left(\begin{pmatrix} C_1(\chi Z)A_{11}^* + A_{11}(\chi Z)^*C_1^* & C_1(\chi Z)A_{12}^*C_2 \\ C_2^*A_{21}(\chi Z)C_1^* & 0 \end{pmatrix} h | h \right)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}. \quad \square \end{aligned}$$

Визначимо оператори $F, F_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus R(\chi), R(\chi))$ за допомогою співвідношень

$$Fh = \chi Z A_{11}^* h_1 + (1_{\mathcal{H}} + \chi Z A_{21}^* C_2) h_2, \quad F_0 h = -\chi \chi_1^0 h_1, \quad (h = (h_1, h_2)). \quad (17)$$

Лема 3. Нехай $\hat{\mathcal{P}}z \stackrel{\text{def}}{=} z + \chi_1^0 \tilde{\mathcal{U}}_2 z - Z\Gamma_2 z$,

$$R_h \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in D(L_F) : \Gamma_1 u = -(A_{12}^* h_1 + A_{22}^* C_2 h_2) + \chi_1 Z h_1, \chi u = -(F + F_0)h\}.$$

Тоді $\hat{\mathcal{P}}D_h = R_h$.

Доведення. Припустимо, що $z \in D_h$. Як показують безпосередні обчислення, $\Gamma_2 \hat{\mathcal{P}}z = 0$, $\Gamma_1 \hat{\mathcal{P}}z = -(A_{12}^* h_1 + A_{22}^* C_2 h_2) + (\chi_1 z)^* h_1$, $\chi \hat{\mathcal{P}}z = -(F + F_0)h$ (див. лему 1, (8), (17)), тому $\hat{\mathcal{P}}D_h \subset R_h$.

Навпаки, нехай $u \in R_h$, а $v = u + z - \hat{\mathcal{P}}z$ де z — довільний елемент з D_h . Як легко бачити, $\Gamma_1 v = \Gamma_1 z$, $\Gamma_2 v = \Gamma_2 z$, $\chi v = -h_2 = \chi z$. Отже, $v \in D_h$, зокрема, $\tilde{\mathcal{U}}_2 v = h_1 = \tilde{\mathcal{U}}_2 z$. Крім цього, $\hat{\mathcal{P}}v = u$, так що $R_h \subset \hat{\mathcal{P}}D_h$. $\square$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= -P \left[\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} A \mathfrak{X} A^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1^* \end{pmatrix} \mathfrak{X}^* \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \right] P, \\ \mathcal{F} &= P F^* (\chi \chi^0)^{-1} F P, \quad \hat{\mathcal{F}} = P (F + F_0)^* (\chi \chi^0)^{-1} (F + F_0) P, \end{aligned}$$

де F, F_0 такі як в (17), а $\chi \chi^0$ трактується як відображення $R(\chi) \rightarrow R(\chi)$.

Лема 4. $\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 + \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{Y} + \mathcal{F}$.

Справедливість цієї леми перевіряється за допомогою елементарних обчислень.

Теорема 1. *Оператор T визначений згідно з (4), (5), максимально θ -акретивний (відповідно аксимально невід'ємний) тоді і тільки тоді, коли $\cos \theta \cdot \mathcal{F} + \operatorname{Re}(e^{i\theta} \mathcal{Y}) \geq 0$ (відповідно $\mathcal{F} + \mathcal{Y} \geq 0$).*

Доведення. З леми 1 і з (7) випливає, що $D(T^*) = \bigcup_h D_h$, де об'єднання береться по всіх $h \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$, а з леми 3 і з рівності

$$\overline{\{u \in D(L_F) : \chi u = a, \Gamma_1 u = b\}} = \{u \in H_e : \chi u = b\},$$

де замикання береться за нормою простору H_e (див. [11–13]), що $\inf_{z \in D_h} (L_F \hat{\mathcal{P}}z | \hat{\mathcal{P}}z) = (\hat{\mathcal{F}}h | h)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}$. Тому, за лемами 2 та 4, T^* є $(-\theta)$ -акретивним тоді і тільки тоді, коли

$$\forall h \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$$

$$\inf_{z \in D_h} \operatorname{Re}\{e^{i\theta} [(L_F \hat{\mathcal{P}}z | \hat{\mathcal{P}}z) + ((\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)h | h)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}]\} = ((\cos \theta \cdot \mathcal{F} + \operatorname{Re}(e^{i\theta} \mathcal{Y}))h | h) \geq 0.$$

Подібно доводиться твердження щодо невід'ємності оператора T^* . Для завершення доведення досить використати цитовані вище результати праць [8, 9 17, 18], зокрема, теорему 8.2 [9] (про індекс споріднених операторів).

Застосовуючи відоме (див. [19]) узагальнення критерію Сильвестра: якщо $B_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($i, j = 1, 2$) $B = (B_{ij})_{i,j=1}^2$, причому $B = B^*$, $B_{22} \gg 0$, то $B \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли $B_{11} \geq B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}$, та виходячи з теореми 1, приходимо до наступного наслідку.

Наслідок 1. *Нехай*

$$A_{11}, A_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H}), \Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H}) \quad (18)$$

$$\chi = \Psi \mathcal{P} + \Phi, A_1(h_1, h_2) = A_{11}h_1 + A_{12}h_2 \quad (h_1, h_2 \in \mathcal{H}), \quad (19)$$

при цьому

$$R(\Psi^0) \cap D(L_F) = \{0\}, R(A_1) = \mathcal{H}. \quad (20)$$

Оператор T , визначений за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{y \in D(L_0^*) : A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = \chi y\}, \quad T \subset L_0^*,$$

максимально акретивний тоді і тільки тоді, коли

$$4\operatorname{Re}[A_{11}(\chi Z - A_{12})^*] \geq \chi \chi^0. \quad (21)$$

Зауважимо, що, як показано в [12, 13], будь-яке максимально акретивне звуження T оператора L_0^* задовольняє умови наслідку 1, тому задача про опис максимально акретивних розширень оператора L_0 зводиться до задачі про побудову оператора T^* , розв'язаній в [1]. Тому справедливі наступні наслідки.

Наслідок 2. Для того щоб $S \in \mathcal{C}(H)$ був максимально акретивним розширенням оператора L_0 , необхідно і достатньо, щоб існували оператори A_{11} , A_{12} , Ψ , Φ , χ , A_1 , які задовольняють умови (18)–(21) і такі, що

$$D(S) = \{z \in D(L_0^*) + R(\chi^0) \mid \exists h_1 \in \mathcal{H} : z + \chi^0 h_1 \in D(L_0^*), \Gamma_1 z = -A_{12}^* h_1, \Gamma_2 z = A_{11}^* h_1\},$$

$$\forall z \in D(S) \quad Sz = L_0^*(z + \chi^0 h_1).$$

Наслідок 3. Оператор $S \in \mathcal{C}(H)$ є максимально акретивним розширенням оператора L_0 тоді і тільки тоді, коли існують $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($i, j = 1, 2$), $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, $\Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H})$ (а отже $\chi \stackrel{\text{def}}{=} \Psi\mathcal{P} + \Phi$, $A \stackrel{\text{def}}{=} (A_{ij})_{i,j=1}^2$) такі, що

$$R(A) = \mathcal{H} \oplus R(\chi), R(\Psi^0) \cap D(L_F) = \{0\}, \quad P \left[F^* (\chi \chi^0)^{-1} F - \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathcal{H}} \\ 1_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix} A^* \right] \geq 0,$$

(де $F(h_1, h_2) = (\chi Z) A_{11}^* h_1 + (1_{\mathcal{H}} + (\chi Z) A_{21}^*) h_2$, P — ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus R(\chi)$),

$$D(S) = \{z \in D(L_0^*) + R(\chi^0) : z + \chi^0 (A_{21} \Gamma_1 z + A_{22} \Gamma_2 z) \in D(L_0^*),$$

$$A_{11} \Gamma_1 z + A_{12} \Gamma_2 z = 0\},$$

$$\forall z \in D(S) \quad Sz = L_0^*(z + \chi^0 (A_{21} \Gamma_1 z + A_{22} \Gamma_2 z)).$$

2°. Нехай $B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$D(\hat{L}_B) = \{y \in D(L_0^*) + R(\chi^0) : y + \chi^0 \Gamma_2 y \in D(L_0^*), \Gamma_1 y - B \Gamma_2 y = \chi y\},$$

$$\forall y \in D(\hat{L}_B) \quad \hat{L}_B y = L_0^*(y + \chi^0 \Gamma_2 y).$$

У цьому пункті встановлено критерій додатної визначеності оператора $\hat{L}_B$, побудовано його енергетичний простір і, на основі цього, доведено розв'язність певного класу варіаційних задач. Відзначимо, що $\hat{L}_B$ можна інтерпретувати як збурення (із зміною області визначення) оператора $L_B \stackrel{\text{def}}{=} L_0^*|_{\ker(\Gamma_1 - B \Gamma_2)}$, який є абстрактним аналогом оператора задачі типу третьої крайової, розглянутої в [4].

Введемо в розгляд оператор $\hat{L}_0 \subset \hat{L}_B$ такий, що

$$D(\hat{L}_0) = \{y \in D(L_B) : \Gamma_2 y = 0\} = \{y \in D(L_F) : \Gamma_1 y = \chi y\}. \quad (22)$$

Лема 5.

$$D(\hat{L}_0^*) = \{z \in D(L_0^*) + R(\chi^0) : z + \chi^0 \Gamma_2 z \in D(L_0^*)\},$$

$$\forall z \in D(\hat{L}_0^*) \quad \hat{L}_0^* z = L_0^*(z + \chi^0 \Gamma_2 z).$$

Доведення. Нехай $L_{\max}$ та $L_{\min}$ такі, як в (2), (3), $\Gamma_4 = \Psi\mathcal{P}$. Зрозуміло, що $\hat{L}_0 \subset L_{\max}$ і $D(\hat{L}_0) = \{y \in D(L_{\max}) : \Gamma_3 y = 0, \Gamma_2 y = 0, \Gamma_1 y - \Gamma_4 y = \Phi y\}$. Зокрема, $\hat{L}_0$ споріднений з парою $(L_{\max}, L_{\min})$ в сенсі [8,9], так що $D(\hat{L}_0^*) \subset D(L_{\max})$. З теореми 1 [1] випливає, що

$$\forall y \in D(\hat{L}_0), \forall z \in D(L_{\max}) \quad (\hat{L}_0 y | z) = (y | L_{\max} z + \Phi^* \Gamma_2 z) + (\Gamma_4 y | P_{\Psi} \Gamma_2 z - \Gamma_3 z)_{\mathcal{H}}. \quad (23)$$

Введемо тимчасово в розгляд оператор S , визначений за допомогою співвідношень $D(S) = \{z \in D(L_{\max}) : \Gamma_3 z = P_{\Psi} \Gamma_2 z\}$, $\forall z \in D(S) \quad Sz = L_{\max} z + \Phi^* \Gamma_2 z$. Як видно з (23), $S \subset \hat{L}_0^*$. Використовуючи теорему про індекс споріднених операторів (теорема 8.2 [9]), бачимо, що $\hat{L}_0^* = S$. $\square$

Лема 6. $(\mathcal{H}, \Gamma_1 - \chi, \Gamma_2)$ — ПГЗ оператора $\hat{L}_0$.

Доведення. З теореми 1 [1] та леми 4.8.7 [6] випливає, що $R((\Gamma_1 - \chi) \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Крім цього, як видно з леми 5,

$$\forall y, z \in D(\hat{L}_0^*) \quad (\hat{L}_0^* y | z) - (y | \hat{L}_0^* z) = (\Gamma_1 y - \chi y | \Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y | \Gamma_1 z - \chi z)_{\mathcal{H}}. \quad \square$$

Позначимо через $M(\lambda)$ функцію Вейля оператора L_0 , що відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ (означення див. [20]) і покладемо: $L_\lambda = (L_F - \lambda 1_H)^{-1}$, $Z_\lambda = (\Gamma_1 L_\lambda)^*$ ($\lambda \leq 0$).

Відомо [6, 16, 20, 21, 22], що $M(\lambda) = \Gamma_1 Z_\lambda$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} M(\lambda)^{-1} = 0, \quad M(0) = 0, \quad (24)$$

$$\Gamma_2 Z_\lambda = 1_{\mathcal{H}}, \quad (25)$$

$$y = Z_\lambda a \iff L_0^* y = \lambda y, \Gamma_2 y = a. \quad (26)$$

Лема 7. Для будь-якого $\lambda \leq 0$

$$(\chi L_\lambda)^* = (\lambda L_\lambda + 1_H) \chi^0, \quad (27)$$

$$\Gamma_1 (\chi L_\lambda)^* = (\chi Z_\lambda)^* = \lambda Z_\lambda^* \chi^0 + (\chi Z)^*. \quad (28)$$

Справедливість цих співвідношень перевіряється за допомогою прямих обчислень, при цьому слід використати (26).

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= 2Re(\chi Z) - \chi \chi^0, \quad \hat{\Gamma}_1 = (\Gamma_1 - \chi) + \tilde{B} \Gamma_2, \\ \tilde{M}(\lambda) &= \tilde{B} - 2Re(\chi Z_\lambda) + \chi (\chi L_\lambda)^*, \quad \hat{B} = B + \tilde{B}. \end{aligned} \quad (29)$$

Лема 8. $(\mathcal{H}, \hat{\Gamma}_1, \Gamma_2)$ — позитивний ПГЗ оператора $\hat{L}_0$, функція Вейля $\hat{M}(\lambda)$ якого має такий вигляд:

$$\hat{M}(\lambda) = M(\lambda) + \tilde{M}(\lambda). \quad (30)$$

Доведення. Оскільки, за лемою 6, $(\mathcal{H}, \Gamma_1 - \chi, \Gamma_2)$ — ПГЗ оператора $\hat{L}_0$, а $\tilde{B} = \tilde{B}^*$, то $(\mathcal{H}, \hat{\Gamma}_1, \Gamma_2)$ — ПГЗ оператора $\hat{L}_0$.

Далі, як було вказано вище, $\hat{M}(\lambda) = \hat{\Gamma}_1 \hat{Z}_\lambda$, де $\hat{Z}_\lambda a$ ($a \in \mathcal{H}$) — розв'язок задачі

$$\hat{L}_0^* y = \lambda y, \quad \Gamma_2 y = a \quad (31)$$

(пор. з (26)). Виходячи з леми 5, (27) та (31), переконуємось, що

$$\hat{Z}_\lambda = Z_\lambda - (\chi L_\lambda)^* \quad (\lambda \leq 0). \quad (32)$$

Тому (див. (25), (28)) $\hat{M}(\lambda) = [(\Gamma_1 - \chi) + \tilde{B} \Gamma_2][Z_\lambda - (\chi L_\lambda)^*] = M(\lambda) + \tilde{M}(\lambda)$, тобто справджується (30).

Нарешті, з (24), (27), (29), (30) випливає, що $\hat{M}(0) = 0$, тобто (див. [20]) $(\mathcal{H}, \hat{\Gamma}_1, \Gamma_2)$ — позитивний ПГЗ оператора L_0 в сенсі [4, 5]. $\square$

Лема 9. L_F є жорстким розширенням оператора $\hat{L}_0$.

Доведення. З (22) і леми 4.8.7 [6] випливає, що

$$D(\hat{L}_0) = \bigcup_{a \in R(\chi)} \{y \in D(L_F) : \Gamma_1 y = a, \chi y = a\}.$$

Виходячи звідси і повторюючи міркування, наведені на початку доведення теореми 1, робимо такий висновок: енергетичний простір оператора $\hat{L}_0$ — це H_e . Крім цього, з леми 5 зрозуміло, що $D(\hat{L}_0^*) \cap H_e = D(L_F)$, тому L_F — жорстке розширення оператора $\hat{L}_0$. $\square$

Наслідок 4. Оператор $\hat{L}_B$ додатно визначений тоді і тільки тоді, коли $\hat{B} \gg 0$.

Доведення. Як легко бачити,

$$D(\hat{L}_B) = \{y \in D(\hat{L}_0^*) : \hat{\Gamma}_1 y = \hat{B} \Gamma_2 y\}, \quad \hat{L}_B \subset \hat{L}_0^*. \quad (33)$$

Тому справедливість наслідку випливає з результатів, викладених в [4, 5, 7], а також з лем 8 та 9. $\square$

Зауваження 1. Легко бачити, що

$$H_e \dot{+} \ker L_0^* = H_e \dot{+} \ker \hat{L}_0^*. \quad (34)$$

Це випливає з того, що ця рівність еквівалентна рівності $H_e \dot{+} R(Z) = H_e \dot{+} R(\hat{Z})$, де $\hat{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{Z}_0$ і співвідношення $\hat{Z} = Z - \chi^0$, яке отримаємо поклавши в (27), (32) $\lambda = 0$.

Зауваження 2. Відомо [23, теорема 1], що оператори $\mathcal{P}$ та Γ_2 допускають неперервні продовження до відображень $H_e \dot{+} \ker L_0^* \rightarrow H_e$ та $H_e \dot{+} \ker L_0^* \rightarrow \mathcal{H}$ відповідно (ці продовження також позначатимемо через $\mathcal{P}$ та Γ_2). При цьому

$$\forall u \in H_e \dot{+} \ker L_0^* \quad \mathcal{P}u = u - Z\Gamma_2 u. \quad (35)$$

Застосовуючи цей результат до оператора $\hat{L}_0$ (замість L_0) робимо висновок, що

$$\forall u \in H_e \dot{+} \ker \hat{L}_0^* \quad \hat{\mathcal{P}}u = u - \hat{Z}\Gamma_2 u, \quad (36)$$

де $\hat{\mathcal{P}}$ — неперервне продовження проектора $D(L_0^*) \rightarrow D(L_F)$ до проектора $H_e \dot{+} \ker \hat{L}_0^* \rightarrow H_e$ паралельно $\ker \hat{L}_0^*$.

Далі, покладемо $\forall u, v \in H_e \dot{+} \ker L_0^*$

$$\pi_B(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{P}u | \mathcal{P}v)_e + (B\Gamma_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}}. \quad (37)$$

В [23] доведено, що якщо $B \gg 0$, то $H_e \dot{+} \ker L_0^*$ — енергетичний простір оператора $L_B = L_0^* | \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2)$, а π_B — відповідний енергетичний скалярний добуток (див. також [24, 25]).

Теорема 2. Нехай $\hat{B} \gg 0$, а $\hat{H}_B$ та $\hat{\pi}_B$ — відповідно енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток оператора $\hat{L}_B$. Справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} \hat{H}_B &= H_e \dot{+} \ker L_0^*, \\ \forall u, v \in \hat{H}_B \quad \hat{\pi}_B(u, v) &= \pi_B(u, v) + (\chi u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_2 u | \chi v)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Доведення. Враховуючи (33), бачимо, що справедливість рівності (38) випливає з (34) і результатів, цитованих в зауваженні 2. З цих же результатів, застосованих до оператора $\hat{L}_0$ (замість L_0), з лем 8, 9, рівностей (35)–(37) і того факту, що H_e є енергетичним простором оператора $\hat{L}_0$ (див. доведення леми 9), випливає, що

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \hat{H}_B \quad \hat{\pi}_B(u, v) &= (\hat{\mathcal{P}}u | \hat{\mathcal{P}}v)_e + (\hat{B}\Gamma_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} = \\ &= (\mathcal{P}u + \chi^0 \Gamma_2 u | \mathcal{P}v + \chi^0 \Gamma_2 v)_e + (\hat{B}\Gamma_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} = \\ &= (\mathcal{P}u | \mathcal{P}v)_e + (\chi u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} - ((\chi Z)\Gamma_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_2 u | \chi v)_{\mathcal{H}} - \\ &\quad - (\Gamma_2 u | (\chi Z)\Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + ((\chi \chi^0)\Gamma_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\hat{B}\Gamma_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} = \\ &= \pi_B(u, v) + (\chi u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_2 u | \chi v)_{\mathcal{H}} \quad \square \end{aligned}$$

Наслідок 5. Якщо $\hat{B} \gg 0$, то $\forall f \in H$ варіаційна задача

$$\hat{\pi}_B(u, u) - 2\operatorname{Re}(f | u) \rightarrow \min, \quad u \in H_e \dot{+} \ker L_0^*,$$

має єдиний розв'язок $u_0 = \hat{L}_B^{-1} f$.

Справедливість цього твердження випливає з теореми про мінімум квадратичного функціоналу [3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Мильо О.Я., Сторож О.Г. Про умови взаємної спряженості одного класу скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора Матем. студії. – 1995. – Вип.4. – С.67–74.
2. Mylo O.Ya., Storozh O.G. Selfadjointness and maximal dissipativeness conditions for a class of finite-dimensional perturbations of a positively defined operator Матем. Студії. – 1997. – Т.7, 1. – Р.97–102.
3. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.:Наука, 1968. – 576 с.
4. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук.думка, 1984. – 283 с.
5. Кочубей А.Н. Про розширення додатно визначеного симетричного оператора Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – Т.3. – С.168–171.
6. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. – К.: Наук. думка, 1983. – 212 с.
7. Михайлец В.А. О разрешимых и секториальных граничных задачах для операторного уравнения Штурма-Лиувилля Укр. мат. журн. – 1974. –Т.26, 4. – С.447–455.
8. Лянце В.Э. О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами ДАН СССР. – 1972. – Т.204, 3. – С.542–545.

9. Лянце В.Э. *О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве* Теор. функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков) – 1972. – Вып. 16. – С.165–186.
10. Кочубей А.Н. *Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи* Мат. заметки. – 1979. – Т.24, 3. – С.425–434.
11. Сторож О.Г. *Аккретивные операторы, родственные положительно определенному* Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, 6. – С.789–794.
12. Мильо О.Я., Сторож О.Г. *Про загальний вигляд максимально акретивного розширення додатно визначеного оператора* Доп. АН УРСР. – 1991. – Т.6. – С.19–22.
13. Мильо О.Я., Сторож О.Г. *Максимально акретивные расширения положительно определенного оператора с конечным индексом дефекта.* – Львов. ун-т, Львов. – 1993. – 31 с. – Деп. в ГНТБ Украины 28.10.93, 2139 – Ук 93.
14. Арлинский Ю.М. *Максимально секториальные расширения секториальных операторов* Доп. НАН України. – 1993. – Т.6. – С.22–28.
15. Кужель А.В., Роткевич Э.С. *Аккретивные расширения неотрицательных операторов. Нормальные расширения эрмитовых операторов с сохранением нормы* Функц. анализ. Лин. оп-ры, Ульяновск. – 1983. – Вып. 21. – С.94–107.
16. Штраус А.В. *О расширениях полуограниченного оператора* ДАН СССР. – 1973. – Т.231, 3. – С.543–546.
17. Филлипс Р.С. *Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных* Математика. – 1962. – Т.6, 4. – С.11–70.
18. Штраус А.В. *О расширениях и характеристической функции симметрического оператора* Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т.32, 1. – С.186–207.
19. Крейн М.Г., Овчаренко И.Е. *О Q -функциях и sc -резольвентах неплотно заданных эрмитовых сжатий* Сиб. мат. журн. – 1977. – Т.18, 5. – С.1032–1056.
20. Деркач В.А., Маламуд М.М. *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов* Укр. мат. журн. – 1992. – Т.44, 4. – С.435–459.
21. Деркач В.А., Маламуд М.М., Цекановский Э.Р. *Секториальные расширения положительно определенного оператора и характеристические функции* ДАН СССР. – 1988. – Т.298, 3. – С.537–541.
22. Сторож О.Г. *Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи* Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, 6. – С.858–860.
23. Сторож О.Г. *Дифференціально-граничний оператор другого порядку в просторі вектор-функцій, асоційований з квадратичною формою* Матем. студії. – 1993. – Вип.2. – С.59–63.
24. Бирман М.Ш. *К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов* Мат. сб. – 1956. – Т.38, 4. – С.431–450.
25. Маламуд М.М. *О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лагунами* Укр. мат. журн. – 1992. – Т.44, 2. – С.215–233.

Львівський державний університет ім. Ів. Франка, механіко-математичний факультет

Надійшло 27.03.1998
Після переробки 20.01.1999