УДК 517.53

ПРО ВЕЛИЧИНУ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ В ТЕОРЕМІ ВІМАНА

О.Б. Скасків, П.В. Філевич

O.B. Skaskiv, P.V. Filevych. *On the size of an exceptional set in the Wiman theorem*, Matematychni Studii, **12**(1999) 31–36.

We establish the sharpness of a classical estimate of the size of an exceptional set such that the maximum modulus of an entire function $M(r, f)$ is equivalent to the maximum of its real part $A(r, f)$ or the maximum modulus of its real part $R(r, f)$ as $r \to +\infty$ outside of this set.

О.Б. Скаскив, П.В. Филевич. *О величине исключительного множества в теореме Вимана* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 1. – С.31–36.

Установлена точность классической оценки величины исключительного множества, вне которого максимум модуля целой функции $M(r, f)$ эквивалентен при $r \to +\infty$ максимуму её действительной части $A(r, f)$ или максимуму модуля её действительной части $R(r, f)$.

Вступ

Нехай f — ціла функція, $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ — максимум модуля цієї функції, $A(r, f) = \max\{\operatorname{Re} f(z) : |z| = r\}$ — максимум її дійсної частини, $\mu(r, f) = \max\{|f^{(n)}(0)/n!|r^n\}$ — максимальний член степеневого розвинення f, а $K(r, f) = rM'(r, f)/M(r, f)$. Нехай, також, H — клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ на $[1; +\infty)$ функцій.

Добре відомо [1], що співвідношення, які отримуються методом Вімана–Валірона, переважно виконуються при $r \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри, тобто такої, що

$$\int_{E \cap [1;+\infty)} \frac{dr}{r} < +\infty. \tag{1}$$

Зокрема, це стосується нерівності Вімана–Валірона

$$M(r, f) < \mu(r, f) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu(r, f), \tag{2}$$

співвідношення Вімана

$$A(r, f) \sim M(r, f) \quad (r \to +\infty) \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B20.

Ця робота виконана за часткової підтримки Міжнародної Соросівської програми підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант APU 071097

та співвідношення Бореля

$$\ln \mu(r,f) \sim \ln M(r,f) \quad (r \to +\infty). \tag{4}$$

Й.В. Островський в усній бесіді з першим із співавторів поставив наступне запитання: наскільки точною є оцінка (1) множини E, зовні якої виконується нерівність (2)? У цьому зв'язку цікаво було б визначити також, для яких множин вигляду $E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$ існують $\varepsilon > 0$ і ціла функція f такі, що $E_1 = \{r : M(r,f) \geq \mu(r,f)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu(r,f)\}$. Зрозуміло, що природно розглядати обидва питання і для співвідношень (3) та (4).

Що стосується співвідношення (4), то за теоремою Р. Лондона [2] воно справджується при $r \to +\infty$ зовні деякої множини $E_4(f)$ скінченної міри, тобто $\int_{E_4(f)\cap[1;+\infty)} dr < +\infty$. Не складно [3], використовуючи подібні як і в [2] міркування, показати, що $\int_{E_4(f)\cap[1;+\infty)} h(r)dr < +\infty$ для кожної $h \in H$ такої, що $\ln h(r) = O(\ln r)$ $(r \to +\infty)$.

Відзначимо також деякі результати, які вказують на те, що виняткова множина у співвідношенні (4) (а, отже, і у співвідношенні (2)) може існувати. Зокрема, в [4] наведено побудований А.А. Гольдбергом приклад цілої функції g, для якої $\overline{\lim}_{r\to+\infty} \ln M(r,g)/\ln\mu(r,g) > 1$. Приклад функції з аналогічною властивістю, як це стверджується в [2], наведено також в [5, с.33]. Найбільш загальний результат у цьому напрямку отримали П. Локгарт і Е.Г. Страус [6]: для довільної функції двох змінних Ψ, визначеної на $\mathbb{R}_+^2$, існує така ціла функція g, що $\overline{\lim}_{r\to+\infty} M(r,g)/\Psi(r,\mu(r,g)) \geq 1$.

Тут отримаємо остаточну і близьку до остаточної відповіді на запитання Й.В. Островського відповідно для співвідношень (3) та (2).

Нехай $R(r,f) = \max\{|\mathrm{Re}\, f(z)| : |z| = r\}$, а $\Delta(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\lim}_{r\to+\infty} M(r,f)/R(r,f)$. Оскільки $R(r,f) \geq A(r,f)$, то відповідь на запитання Й.В. Островського щодо співвідношення (3) випливає з наступної теореми.

Теорема 1. *Для кожної функції $h \in H$ існує ціла функція f така, що при деякому $\varepsilon > 0$ для множини $E = \{r > 1 : M(r,f) > (1+\varepsilon)R(r,f)\}$ виконується рівність $\int_E r^{-1}h(r)dr = +\infty$.*

Теорему 1 отримаємо з наведеної нижче теореми 2, з якої, скориставшись правилом Лопіталя, можна зробити також і такий висновок: існують трансцендентні цілі функції, логарифм максимума модуля яких зростає як завгодно повільно, і для яких існує виняткова множина у співвідношенні (3).

Теорема 2. *Для кожної функції $h \in H$ існує ціла функція f така, що $\Delta(f) > 1$ і $K(r,f) \leq h(r)$ $(r \geq r_0)$.*

Стосовно співвідношення (2), то, як це легко показати за аналогією з доведенням наведеної нижче теореми 3, для кожної $h \in H$, для якої $\ln h(r) = o(\ln\ln r)$ $(r \to +\infty)$, і для кожного $\varepsilon > 0$ маємо $\int_{E_2(f)\cap[1;+\infty)} h(r)/r dr < +\infty$, де $E_2(f)$ — виняткова множина в (2).

Теорема 3. *Нехай $h \in H$ така, що $h(r) \leq \ln^{1/2} r$ $(r > 2)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність*

$$M(r,f) \leq \mu(r,f)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu(r,f)\ln^{1/2} r$$

виконується для всіх $r \in [1;+\infty)\backslash E_5(f)$, де $E_5(f)$ така, що

$$\int_{E_5(f)\cap[1;+\infty)} r^{-1}h(r)dr < +\infty.$$

Теорему 3, взагалі кажучи, не можна покращити у наступному сенсі.

Теорема 4. *Для кожного $\beta > 0$ існує ціла функція f така, що при деякому $\varepsilon > 0$ для множини $E_5 = \{r > 1 : M(r,f) > \mu(r,f)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu(r,f)\}$ виконується рівність*

$$\int_{E_5(f)} r^{-1}(\ln r)^{\beta+1/2}dr = +\infty.$$

Допоміжні результати

Розглянемо розвинення довільної цілої функції f у степеневий ряд: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$, де $\{\lambda_n\}$ — строго зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних цілих чисел, $a_n \neq 0$ $(n \geq 0)$. Нехай $\mu(r,f) = \max\{|a_n|r^{\lambda_n} : n \geq 0\}$ — максимальний член функції f, $G(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^{\lambda_n}$, $c_n = (|a_n|/|a_{n+1}|)^{\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}$, $d_n = c_n/c_{n+1}$.

Добре відомим є таке твердження (див., наприклад, [7]).

Лема 1. *Якщо $c_n \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, то $\mu(r,f) = |a_n|r^{\lambda_n}$ для всіх $r \in [c_{n-1}; c_n]$ і $\mu(c_n,f) = |a_n|c_n^{\lambda_n} = |a_{n+1}|c_n^{\lambda_{n+1}}$.*

Лема 2. *Якщо $c_n \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, $d_n \to 0$ $(n \to +\infty)$, то*

$$\left(\sum_{n=1}^{k-1} + \sum_{n=k+2}^{\infty}\right)|a_n|c_k^{\lambda_n} = o(\mu(c_k,f)) \quad (k \to +\infty).$$

Доведення. Використовуючи лему 1, отримуємо:

$$\left(\sum_{n=1}^{k-1} + \sum_{n=k+2}^{\infty}\right)|a_n|c_k^{\lambda_n} = \mu(c_k,f)\left(\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|a_n|}{|a_k|}c_k^{\lambda_n-\lambda_k} + \sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{|a_{k+1}|}c_k^{\lambda_n-\lambda_{k+1}}\right) =$$

$$= \mu(c_k,f)\left(\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\frac{|a_{n+1}|}{|a_{n+2}|}\cdots\frac{|a_{k-1}|}{|a_k|}c_k^{\lambda_n-\lambda_k} + \sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{k+2}|}{|a_{k+1}|}c_k^{\lambda_n-\lambda_{k+1}}\right) \leq$$

$$\leq \mu(c_k,f)\left(\sum_{n=1}^{k-1}\Big(\frac{c_{k-1}}{c_k}\Big)^{\lambda_k-\lambda_n} + \sum_{n=k+2}^{\infty}\Big(\frac{c_k}{c_{k+1}}\Big)^{\lambda_n-\lambda_{k+1}}\right) \leq$$

$$\leq \mu(c_k,f)\Big(\frac{d_{k-1}}{1-d_{k-1}} + \frac{d_k}{1-d_k}\Big) = o(\mu(c_k,f)) \quad (k \to +\infty). \quad \Box$$

Лема 3. *Якщо виконуються умови леми 2 і існує така стала p, що $\lambda_{n+1} \leq p\lambda_n$ $(n \geq 0)$, то*

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\lambda_n|a_n|c_k^{\lambda_n} = o(\lambda_k\mu(c_k,f)) \quad (k \to +\infty).$$

Доведення. Оскільки $pd_n < 1$ $(n \geq n_0)$, то знову ж використавши лему 1, одержуємо:

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\lambda_n|a_n|c_k^{\lambda_n} = \lambda_{k+1}\mu(c_k,f)\sum_{n=k+2}^{\infty}p^{\lambda_n-\lambda_{k+1}}\left(\frac{c_k}{c_{k+1}}\right)^{\lambda_n-\lambda_{k+1}} \leq$$

$$\leq \lambda_k\mu(c_k,f)\frac{p^2d_k}{1-pd_k} = o(\lambda_k\mu(c_k,f)) \quad (k \to +\infty). \quad \Box$$

Лема 4. *Якщо виконуються умови леми 3, то для довільного* $r \in [c_k; c_{k+1})$ *маємо* $rG'(r,f)/G(r,f) \le p(p+2)\lambda_k$ $(k \ge k_1)$.

Доведення. Справді, при $k \ge k_1$, за лемами 2 і 3,

$$c_k \frac{G'(c_k,f)}{G(c_k,f)} \le \frac{(2\lambda_k + \lambda_{k+1})\mu(c_k,f)}{\mu(c_k,f)} \le (p+2)\lambda_k.$$

Оскільки $rG'(r,f)/G(r,f)$ зростає з ростом r, то для $r \in [c_k, c_{k+1})$ маємо:

$$r\frac{G'(r,f)}{G(r,f)} \le (p+2)\lambda_{k+1} \le p(p+2)\lambda_k \quad (k \ge k_1). \quad \square$$

Лема 5 ([8]). *Нехай* $C(r,f) = r(\ln G(r,f))'$, *а* $D^2(r,f) = rC'(r,f)$. *Для довільної цілої функції* f *виконується нерівність*

$$G(r,f) < \mu(r,f)\left(3\sqrt{3}D(r) + \frac{3}{2}\right) \quad (r > 0).$$

Доведення теорем

Доведення теореми 2. Як звично [9], функцію $l \in H$ називаємо повільно зростаючою, якщо $l(3r)/l(r) \to 1$ $(r \to +\infty)$. Неважко показати, що для кожної функції $h \in H$ існує повільно зростаюча функція $l \in H$ така, що $l(r) \le h(r)$ $(r \ge r_0)$.

У зв'язку з цим можемо вважати, не зменшуючи загальності, що $h(r) = 15l(r)$ $(r \ge 1)$, де l — повільно зростаюча до $+\infty$ функція така, що $l(1) = 1$ і $l(r) \le \ln\ln r$ $(r \ge e^2)$.

Нехай $\lambda_n = 3^n$, $c_n = L(\lambda_n)$, де L — обернена до l функція, а $d_n = c_n/c_{n+1}$ $(n \ge 0)$. Легко бачити, що $c_0 = 1$ і $c_n \ge \exp(\exp(\lambda_n))$ $(n \ge 1)$. Елементарно також показується, що $L(x)/L(3x) \to 0$ $(x \to +\infty)$, а тому $d_n \to 0$ $(n \to +\infty)$.

Розглянемо послідовність b_n, визначену так: 1) $b_1 = 1$; 2) $b_{n+1} = (c_0^{\lambda_1-\lambda_0} c_1^{\lambda_2-\lambda_1} \ldots c_n^{\lambda_{n+1}-\lambda_n})^{-1}$ $(n \ge 0)$. Оскільки $b_{n+1} \le c_n^{-2\lambda_{n+1}/3}$, то $b_n^{1/\lambda_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$, тобто функція $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} ib_n z^{\lambda_n}$ є цілою. Скориставшись лемою 2, бачимо, що

$$M(c_k,f) \sim 2\mu(c_k,f) \quad (n \to +\infty). \tag{6}$$

З іншого боку, з цієї ж леми випливає, що

$$R(c_k,f) = \mu(c_k,f) \max_{\varphi \in [0;2\pi)} |\sin(\lambda_k\varphi) + \sin(\lambda_{k+1}\varphi)| + o(\mu(c_k,f)) =$$

$$= \mu(c_k,f) \max_{t \in [0;2\pi)} |\sin t + \sin 3t| + o(\mu(c_k,f)) = \frac{8}{3\sqrt{3}}\mu(c_k,f) + o(\mu(c_k,f)) \quad (k \to +\infty).$$

Звідси і з (6) випливає, що $\Delta(f) > 1$.

Оскільки $M(r,f) = G(r,f)$ $(r \ge 0)$, то за лемою 4 для довільного $r \in [c_k; c_{k+1})$ при $k \ge k_1$ отримуємо $K(r,f) \le 15\lambda_k = 15l(c_k) \le 15l(r) = h(r)$. Отже, для всіх $r \ge r_0$ виконується нерівність $K(r,f) \le h(r)$, що й вимагалось.
$\square$

Доведення теореми 1. Нехай f — функція, побудована при доведенні теореми 2, а ε і δ — такі числа, що $0 < \varepsilon < \delta < \Delta(f) - 1$. Розглянемо множину $E = \{r > 1 : M(r, f) > (1 + \varepsilon)R(r, f)\}$. Вона відкрита і тому є об'єднанням зліченої кількості інтервалів, які попарно не перетинаються. Отже, як легко бачити, існують послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ дійсних чисел такі, що: 1) $(x_n; y_n) \subset E$ $(n \geq 0)$; 2) $x_n < y_n < x_{n+1}$ $(n \geq 0)$; 3) $x_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$; 4) $M(x_n, f) = (1 + \varepsilon)R(x_n, f)$ $(n \geq 0)$; 5) $M(y_n, f) = (1 + \varepsilon)R(y_n, f)$ $(n \geq 0)$; 6) на інтервалі $(x_n; y_n)$ існує точка t_n, в якій

$$M(t_n, f) = (1 + \delta)R(t_n, f) \quad (n \geq 0). \tag{7}$$

Доведемо, що

$$\varlimsup_{n\to+\infty}(\ln M(y_n, f) - \ln M(x_n, f)) > 0. \tag{8}$$

Справді, якщо $\ln M(y_n, f) - \ln M(x_n, f) \leq K$ $(n \geq n(K))$ для кожного $K > 0$, то

$$\begin{gathered}\ln M(t_n, f) \leq \ln M(y_n, f) \leq K + \ln M(x_n, f) = K + \ln(1 + \varepsilon) + \ln R(x_n, f) \leq \\ \leq K + \ln(1 + \varepsilon) + \ln R(t_n, f) < \ln(1 + \delta) + \ln R(t_n, f) \quad (n \geq n(K)),\end{gathered}$$

як тільки $K < \ln(1 + \delta) - \ln(1 + \varepsilon)$, а це суперечить співвідношенню (7).

Отже, співвідношення (8) є правильним. Тому $\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}(x_n;y_n)} d(\ln M(r, f)) = +\infty$. Оскільки $\bigcup_{n=0}^{\infty}(x_n; y_n) \subset E$, то

$$\int_E \frac{K(r, f)}{r} dr \geq \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}(x_n;y_n)} d(\ln M(r, f)) = +\infty.$$

Залишилось пригадати, що $K(r, f) \leq h(r)$ $(r \geq r_0)$. $\square$

Доведення теореми 3. Вважаємо, що f — трансцендентна ціла функція, тобто

$$\ln r = o(\ln G(r, f)) \quad (r \to +\infty). \tag{9}$$

Нехай $r_0 = \min\{r \geq 1 : \ln\ln G(r, f) \geq 1,\ \ln C(r, f) \geq 1\}$, а $E_6(f) = \{r \geq r_0 : C(r, f) > h(r) \ln G(r, f) \ln^{1+\varepsilon/2} \ln G(r, f)\}$, $E_7(f) = \{r \geq r_0 : D^2(r, f) > h(r)C(r, f) \ln^{1+\varepsilon/2} C(r, f)\}$. Тоді

$$\begin{gathered}\int_{E_6(f)} \frac{h(r)}{r} dr < \int_{E_6(f)} \frac{(\ln G(r, f))' dr}{\ln G(r, f) \ln^{1+\varepsilon/2} \ln G(r, f)} \leq \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{1+\varepsilon/2}} < +\infty, \\ \int_{E_7(f)} \frac{h(r)}{r} dr < \int_{E_7(f)} \frac{C'(r, f) dr}{C(r, f) \ln^{1+\varepsilon/2} C(r, f)} \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon/2}} < +\infty,\end{gathered}$$

причому, використавши лему 5 і співвідношення (9), зовні об'єднання цих двох множин при $r \geq r_1$ отримуємо: $G(r, f) < \mu(r, f)h(r) \ln^{1/2} G(r, f) \ln^{1+3\varepsilon/4} \ln G(r, f)$, $\ln G(r, f) < 2 \ln \mu(r, f)$. Звідси випливає, що $G(r, f) < \mu(r, f) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu(r, f) \ln^{1/2} r$ зовні множини $E_5(f) = E_6(f) \cup E_7(f) \cup [1; r_2)$, що й вимагалось. $\square$

Доведення теореми 4. Оскільки $\beta_1 = \beta + 1/2 > 1/2$, то можна вибрати $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ так, щоб $\beta_1\delta = (1 + \delta)(1/2 + \varepsilon)$. Визначимо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n = \left[\exp(\lambda_{n-1}^{\delta})\right]$,

$A_{\lambda_n} = \lambda_n^{-\lambda_n}$, $\beta_2 = \beta_1\delta$, $p_n = 2\left[\lambda_n^{\beta_2}\right]$, $\Delta_n = \frac{1}{np_n}$. Для $0 \le k \le p_n - 1$ покладемо $A_{k+\lambda_n} = A_{\lambda_n}\exp(-k\varkappa_{n+1})$, де

$$\varkappa_{n+1} = \frac{\ln A_{\lambda_n} - \ln A_{\lambda_{n+1}}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \sim \ln\lambda_{n+1} \quad (n \to +\infty).$$

Відзначимо, що $\varkappa_n \uparrow +\infty$, $\varkappa_n = o(\varkappa_{n+1})$, $\lambda_n = o(\lambda_{n+1})$, $\ln\lambda_n = o(\ln\lambda_{n+1})$ $(n \to +\infty)$.

Для цілої функції $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$, оскільки $\varkappa_n \uparrow +\infty$, то $\mu(r,f) = A_{\lambda_n} r^{\lambda_n}$ при $r \in [e^{\varkappa_n}; e^{\varkappa_{n+1}}]$. Елементарно також перевіряється, що для цілої функції $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{p_n-1} A_{k+\lambda_n} z^{k+\lambda_n}$ маємо $\mu(r,F) = \mu(r,f)$ при $r \in [e^{\varkappa_n}; e^{\varkappa_{n+1}}]$. Крім того, $A_{k+\lambda_n} r^{k+\lambda_n} = \mu(r,f)e^{-k(\varkappa_{n+1} - \ln r)}$ для $0 \le k < p_n$. Отже, для $r \in \left[e^{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}; e^{\varkappa_{n+1}}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{E}_n$ при $n \to +\infty$ отримуємо

$$F(r) \ge \sum_{k=0}^{p_n-1} A_{k+\lambda_n} r^{k+\lambda_n} \ge \mu(r,f) \sum_{k=0}^{p_n-1} e^{-k\Delta_n} = \mu(r,f)\frac{1 - e^{-\Delta_n p_n}}{1 - e^{-\Delta_n}} =$$
$$= \mu(r,F)(1 + o(1))p_n = 2\mu(r,F)(1 + o(1))\lambda_n^{\beta_1\delta}.$$

Зауважимо, що $\ln\mu\left(e^{\varkappa_{n+1}}, F\right) = -\lambda_n\ln\lambda_n + \varkappa_{n+1}\lambda_n \sim \lambda_n^{1+\delta}$ $(n \to +\infty)$, а тому для $r \in \widetilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$ при $r \to +\infty$ отримуємо $F(r) \ge 2(1+o(1))\mu(r,F)\left(\ln\mu(r,F)\right)^{\beta_1\delta/(1+\delta)}$. Залишилось пригадати, що $\beta_1\delta/(1+\delta) = 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а також зауважити, що

$$\int_{E_5(F)} \frac{\ln^{\beta_1} r}{r} dr \ge \int_{\widetilde{E}} \frac{\ln^{\beta_1} r}{r} dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}^{\varkappa_{n+1}} x^{\beta_1} dx.$$

Оскільки

$$\int_{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}^{\varkappa_{n+1}} x^{\beta_1} dx \sim \varkappa_{n+1}^{\beta_1}\Delta_n \sim \frac{1}{2n} \quad (n \to +\infty),$$

то теорему 4 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Виттих Г.В. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: Физматгиз, 1960. – 320 с.
2. London R. *Note on a lemma of Rosenbloom* Quart. J. Math. – 1970. – V.21, 81. – P.67–69.
3. Філевич П.В. *До теореми Лондона про співвідношення Бореля для цілих функцій* Укр. матем. журн. – 1998. – T.50, 11. – C.1578–1580.
4. Щучинская Е.Ф. Об исключительных значениях в теореме Вимана. – ВИНИТИ, 650–77 Деп., 1977.
5. Valiron G. Theory of integral functions. – Chelsea, 1949.
6. Lockhart P., Straus E.G. *Relations between the maximum modulus and maximum term of entire functions* Pacif. J. Math. – 1985. – V.118, 2. – P.479–485.
7. Шеремета М.Н. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* Матем. заметки. – 1987. – T.42, 2. – C.215–226.
8. Rosenbloom P.C. *Probability and entire functions* Studies Math. Analysis and Related Topics. – Stanford: Calif. Univ. Press. – 1962. – P.325–332.
9. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.

Львівський державний університет ім. Ів. Франка, механіко-математичний факультет

Надійшло 10.12.1998