Математичні Студії. Т.11, №2 Matematychni Studii. V.11, No.2

УДК 517.43

СИМЕТРИЧНІ ОПЕРАТОРИ І АНАЛІТИЧНІ ВЕКТОРИ

О.Л. Горбачук

O.L. Horbachuk. *Symmetric operators and analytic vectors*, Matematychni Studii, **11**(1999) 216–218.

We establish that the set of analytic vectors of a simple symmetric operator consists only the zero vector. We consider an initial value problem for an evolutionary equation in Banach space in neighborhood of a complex point.

Е.Л. Горбачук. *Симметрические операторы и аналитические векторы* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.216–218.

Устанавливается, что множество аналитических векторов простого симметрического оператора состоит только из нулевого вектора. Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве в окрестности точки комплексной плоскости.

Нехай A — лінійний оператор у гільбертовому просторі H над полем комплексних чисел.

1. Вектор $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ ($\mathcal{D}(A^n)$ — область визначення оператора A^n) називається *аналітичним* для оператора A, якщо для деякого $t > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n f\|}{n!} t^n < \infty. \tag{1}$$

Зауважимо, що умова (1) еквівалентна тому, що існують додатні сталі M і α такі, що $\|A^n f\| \leq M\alpha^n n!, \quad n \in N$. Якщо розглянути оператор A, породжений виразом $i\frac{d}{dx}$ в просторі $L_2(a,b)$, то функція f є аналітичним вектором для A тоді і тільки тоді, коли вона аналітична на (a,b) (див. [1], с.69).

З означення видно, що множина всіх аналітичних векторів оператора A утворює лінійний многовид, який позначатимемо через $\mathcal{U}(A)$. Використовуючи спектральну теорему, неважко переконатися, що для самоспряженого оператора $A: H \to H$ множина $\mathcal{U}(A)$ є всюди щільною в H. Відома теорема Нельсона стверджує, що якщо для замкненого симетричного оператора множина аналітичних векторів всюди щільна, то оператор є самоспряженим.

2. Замкнений симетричний оператор $A: H \to H$ називається *простим*, якщо не існує ненульового інваріантного підпростору H_0 такого, що звуження $A|H_0$ є самоспряженим оператором (див. [2], с. 360).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 46G05.

1. *Множина аналітичних векторів для простого замкненого симетричного оператора складається тільки з нульового вектора.*

Доведення. Припустимо, що f — ненульовий аналітичний вектор простого замкненого симетричного оператора $A\colon H \to H$. Нехай $\mathcal{L}$ — лінійна оболонка множини $\{A^n f\}_{n=0}^{\infty}$ і $H_0 = \bar{\mathcal{L}}$. З означення 1 випливає, що $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}(A)$. Очевидно також, що $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Розглянемо оператор $A_0\colon H_0 \to H_0$ такий, що $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{L}$, $A_0 = A|\mathcal{L}$. Зрозуміло, що замикання $\bar{A}_0$ оператора A_0 є замкненим симетричним оператором, при цьому $\bar{A}_0 \subset A$, а також $\mathcal{U}(\bar{A}_0) \supset \mathcal{U}(A_0) \supset \mathcal{L}$. Звідси, зокрема, випливає, що $\mathcal{U}(\bar{A}_0)$ всюди щільна в H_0, а отже, за теоремою Нельсона оператор A_0 є самоспряженим. Покажемо, що H_0 є інваріантним підпростором оператора A і $A|H_0 = \bar{A}_0$. Справді, візьмемо довільний вектор $g \in \mathcal{D}(A) \cap H_0$ і нехай h — ортогональна проекція на H_0 вектора $(A - iI)g$, тобто

$$h \in H_0, \qquad \big((A - iI)g - h\big) \in H_0^{\perp}. \tag{2}$$

Розглянемо вектор $g_0 = g - (\bar{A}_0 - iI)^{-1}h$. Пригадуючи, що $\bar{A}_0 \subset A$, з (2) отримуємо $g_0 \in \mathcal{D}(A) \cap H_0$ і $(A - iI)g_0 \in H_0^{\perp}$. Тому для довільного $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{A}_0)$ маємо $0 = \big((A - iI)g_0, \varphi\big) = \big(g_0, (A+iI)\varphi\big) = \big(g_0, (\bar{A}_0+iI)\varphi\big)$, і отже, g_0 ортогональний до $\operatorname{Im}(\bar{A}_0+iI)$. Але $\operatorname{Im}(\bar{A}_0+iI) = H_0$ і $g_0 \in H_0$, а тому $g_0 = 0$. Отже, $g = (\bar{A}_0 - iI)^{-1}h$. Тобто ми довели, що $\mathcal{D}(A) \cap H_0 = \mathcal{D}(\bar{A}_0)$ і $A|H_0 = \bar{A}_0$. А це суперечить тому, що оператор A є простим замкненим симетричним оператором. Отримана суперечність і доводить правильність твердження теореми 1.

2. *Нехай A — лінійний замкнений щільно заданий оператор у банаховому просторі $\mathcal{B}$. Задача Коші*

$$\frac{dy(z)}{dz} = Ay(z), \quad y(0) = y_0, \tag{3}$$

має розв'язок в околі нуля комплексної площини $\mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли $y_0 \in \mathcal{U}(A)$.

Доведення. Якщо $y_0 \in \mathcal{U}(A)$, то функція $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n y_0$ є розв'язком задачі (3).

Нехай $y(z)$ — розв'язок задачі (3) в деякому околі нуля. Всі необхідні факти та теореми, зв'язані із задачею (3) і функціями, які набувають значень у банаховому просторі, подано у книзі [3]. Покажемо, що $y_0 \in \mathcal{U}(A)$. Оскільки функція $y(z)$ аналітична в околі нуля, то для деякого $r > 0$ маємо

$$y^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} \frac{y(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

З (4), враховуючи замкненість оператора A, отримуємо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$, $y^{(n)}(0) \in \mathcal{D}(A)$ і

$$Ay^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} \frac{Ay(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} \frac{y'(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi = y^{(n+1)}(0).$$

Отже, $y(0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ і $A^n y(0) = y^{(n)}(0)$. Тому, приймаючи до уваги (4), маємо

$$\|A^n y(0)\| = \|y^{n+1}(0)\| = \left\| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} \frac{y'(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi \right\| \le \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^{n+1}} \max_{|\xi|=r} \|y'(\xi)\| = Mr^{-n} n!,$$

тобто $y_0 \in \mathcal{U}(A)$ (див. [1]). Теорему доведено.

Зауваження 1. Оскільки задача (3) лінійна, то точку $z = 0$ можна замінити довільною точкою z_0 комплексної площини.

Зауваження 2. Теорема 2 показує, що умова $y_0 \in \mathcal{U}(A)$ дозволяє зняти умову теореми Коші-Ковалевської (див. [4], с.80), що похідна, яка стоїть зліва має бути найвищого порядку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наукова думка, 1984. – 284 с.

2. Ахиезер И.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1976. – 464 с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 527 с.
5. Горбачук О.Л. *Представления решений эволюционных уравнений* IX школа по теории операторов, Тернополь. – 1984. – С.36.

Львівський університет, механіко-математичний факультет.

Надійшло 28.10.1998