УДК 517.5

ПРО ЗРОСТАННЯ НА ДІЙСНІЙ ПІВОСІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

О.В. Шаповаловський

O.V. Shapovalovskyi. *On the growth of Dirichlet series with complex exponents on the real half-axis*, Matematychni Studii, **11**(1999) 213–215.

We establish conditions such that for Dirichlet series $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n\exp(\lambda_n z)$ the following equality $\overline{\lim\limits_{x\to 0-}}|x|\ln^+\ln^+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|d_n|\exp(x\operatorname{Re}\lambda_n)=\overline{\lim\limits_{x\to 0-}}|x|\ln^+\ln^+|F(x)|$ holds.

А.В. Шаповаловский. *О росте на действительной полуоси рядов Дирихле с комплексными показателями* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.213–215.

Найдены условия, при которых для ряда Дирихле $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n\exp(\lambda_n z)$ выполняется равенство $\overline{\lim\limits_{x\to 0-}}|x|\ln^+\ln^+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|d_n|\exp(x\operatorname{Re}\lambda_n)=\overline{\lim\limits_{x\to 0-}}|x|\ln^+\ln^+|F(x)|$.

Нехай (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел із $\mathbb{C}_+=\{z:\operatorname{Re}z>0\}$ і ряд

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n\exp(\lambda_n z) \tag{1}$$

абсолютно збіжний у півплощині $\mathbb{C}_-=\{z:\operatorname{Re}z<0\}$, а $\mathfrak{M}_F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|\exp(x\operatorname{Re}\lambda_n)$. Крім цього, нехай $z=x+iy=re^{i\varphi}$, $n(t)=\sum_{|\lambda_n|\leqslant t}1$, $B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar\lambda_n}$ і

$$\beta_0=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\ln^+|d_n|,\quad \beta=\overline{\lim_{x\to 0-}}|x|\ln^+\ln^+\mathfrak{M}_F(x),$$

$$\beta^*=\overline{\lim_{x\to 0-}}|x|\ln^+\ln^+|F(x)|,\quad q=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\operatorname{Re}\lambda_n}{\operatorname{Re}\lambda_n}\ln\frac{1}{|B'(\lambda_n)|}.$$

Через K, K_1, ..., $K(\varepsilon)$, $K_1(\varepsilon)$, ... позначаємо додатні сталі.

. *Якщо виконуються умови*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}<\infty, \tag{2}$$

$$|\arg\lambda_n|\leqslant\alpha_0<\pi/2, \tag{3}$$

то

$$\beta^*\leqslant\beta\leqslant\beta^*+q, \tag{4}$$

і для кожної послідовності (λ_n), *для якої виконуються умови (2), (3) і* $0<q<+\infty$, *існує ряд Діріхле вигляду (1), для якого* $\beta=\beta^*+q$.

У випадку $\operatorname{Im}\lambda_n=0$ перша частина теореми доведена в [1], а друга — в [2].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

1. *Якщо виконуються умови (2) і (3), то для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $x \in (-\infty; 0)$*

$$|d_n| \exp(x Re\, \lambda_n) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2 Re\, \lambda_n}\, |B'(\lambda_n)|} \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{x} |F(t)|^2 dt \Bigg)^{1/2}. \tag{5}$$

Це твердження випливає із оцінок, встановлених при доведенні леми 1 із [4] (див. також [3]).

2. *Нехай виконуються умови (2) і (3). Тоді для добутку $B(z)$ існують півкола $C_n = \{z : |z| = R_n, |\arg z| \leqslant \pi/2\}$, $0 < R_n \uparrow +\infty$, на яких для кожного $\varepsilon > 0$ виконується*

$$|B(z)| \geqslant K(\varepsilon) \exp(-\varepsilon R_n \cos\varphi). \tag{6}$$

Доведення. Нехай спочатку $|\varphi| \leqslant \alpha_1$, де $\alpha_0 < \alpha_1 < \pi/2$. В [5, с.386] показано, що існує послідовність (R_n), $0 < R_n \uparrow +\infty$ така, що в куті $|\varphi| \leqslant \alpha_1$ виконується

$$|B(R_n e^{i\varphi})| \geqslant K_1(\varepsilon) \exp(-\varepsilon R_n). \tag{7}$$

Нехай тепер $\varphi \in [-\pi/2; -\alpha_1) \bigcup (\alpha_1; \pi/2]$. Маємо $\ln|B(z)| \geqslant \sum\limits_{|\lambda_n| \leqslant 8r} \ln|b_n(z)| - \sum\limits_{|\lambda_n| > 8r} |\ln|b_n(z)|| = I_1(z) - I_2(z)$, де $b_n(z) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n}$. Оскільки [6] $|b_n|^2 \geqslant \exp(-2K_2 \cos\varphi)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}_+$, то $I_1(z) \geqslant -K_3 n(8r) \cos\varphi$. З умови (2) випливає $n(t) = o(t)$ при $t \to +\infty$. Відомо [7], що при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$ виконується $I_2(z) \leqslant K_4 x r \sum\limits_{|\lambda_n| > 8r} \frac{\mathrm{Re}\, \lambda_n}{|\lambda_n|^3}$. Тому $I_1(z) - I_2(z) \geqslant -\varepsilon r \cos\varphi - K_4 x r \int_{8r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^2} \geqslant -K_5 \varepsilon r \cos\varphi$, $\quad |z| \geqslant r_0(\varepsilon)$. Отже, при $\varphi \in [-\pi/2; -\alpha_1) \bigcup (\alpha_1; \pi/2]$ маємо

$$|B(z)| \geqslant K_6(\varepsilon) \exp(-\varepsilon r \cos\varphi). \tag{8}$$

Звідси і з (7) випливає твердження леми 2.

3. *Нехай (λ_n) — послідовність додатних чисел, таких що $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} = \tau < 1$ і ряд (1) абсолютно збіжний в $\mathbb{C}_-$. Тоді $\beta = \beta_0$.*

Ця лема доведена в [8]. Правда, у [8] замість $\mathfrak{M}_F(x)$ використовується $M_F(x) = \sup\limits_{-\infty < y < +\infty} |F(x + iy)|$. Але із доведення у [8] видно, що лема 3 справедлива і в наведеній вище формі, оскільки її доведення базувалося на нерівностях $|d_k| \exp(x\lambda_k) \leqslant M_F(x) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |d_n| \exp(x\lambda_n)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in (-\infty; 0)$, які справедливі і при заміні $M_F(x)$ функцією $\mathfrak{M}_F(x)$.

Доведення теореми. Доведемо спочатку першу частину теореми. З означення β^* для кожного $\varepsilon > 0$, $x \in [x_0(\varepsilon); 0)$ маємо

$$|F(x)| \leqslant \exp\bigg(\exp\Big(\frac{\beta_1}{|x|}\Big)\bigg), \quad \beta_1 = \beta^* + \varepsilon, \tag{9}$$

а з означення q отримуємо

$$-\ln|B'(\lambda_n)| \leqslant \frac{q_1 \mathrm{Re}\ \lambda_n}{\ln \mathrm{Re}\ \lambda_n}, \quad q_1 = q + \varepsilon,\ n \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{10}$$

Враховуючи (9), (10) і те, що $|F(t)| \sim |d_1| \exp(t \mathrm{Re}\, \lambda_1)$, $t \to -\infty$, із (5) маємо

$$|d_n| \leqslant \frac{K_7}{|B'(\lambda_n)|} \bigg(\int_{-\infty}^{x_0(\varepsilon)} |F(t)|^2 dt + \int_{x_0(\varepsilon)}^{x} (\exp(\exp(\beta_1/|t|)))^2 dt \bigg)^{1/2} \times$$
$$\times \exp(-x \mathrm{Re}\, \lambda_n) \leqslant K_8 \exp\left(\exp\Big(\frac{\beta_1}{|x|}\Big) + x \mathrm{Re}\, \lambda_n + \frac{q_1 \mathrm{Re}\, \lambda_n}{\ln \mathrm{Re}\, \lambda_n} \right), \quad x < 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ця нерівність справедлива, зокрема, і для тих x, для яких $\frac{1}{|x|} = \frac{\alpha_n}{\beta_1} \ln \mathrm{Re}\, \lambda_n$, де $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\ln \mathrm{Re}\, \lambda_n)^2}{\ln \mathrm{Re}\, \lambda_n}$. Тому

$$|d_n| \leqslant K_8 \exp\left(\frac{\mathrm{Re}\, \lambda_n}{\ln^2 \mathrm{Re}\, \lambda_n} + \frac{\beta_1 \mathrm{Re}\, \lambda_n}{\alpha_n \ln \mathrm{Re}\, \lambda_n} + \frac{q_1 \mathrm{Re}\, \lambda_n}{\ln \mathrm{Re}\, \lambda_n} \right),$$

звідки отримуємо $\beta_0 \leqslant \beta_1 + q_1$ і тому, завдяки довільності $\varepsilon > 0$, $\beta_0 \leqslant \beta^* + q$. З умов (2) і (3) одержуємо, що $\ln\ln n = o(\ln \operatorname{Re}\lambda_n)$ при $n \to +\infty$. Отже, за лемою 3 $\beta \leqslant \beta^* + q$, що разом з очевидною нерівністю $\beta^* \leqslant \beta$ завершує доведення першої частини теореми.

Доведемо другу частину теореми. Покажемо, що шуканою є функція

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z\lambda_n}}{(1+\lambda_n)^2 B'(\lambda_n)}. \tag{11}$$

Оскільки $0 < q < +\infty$, то легко переконатись, що ряд (11) абсолютно збігається при $z \in \mathbb{C}_-$. З леми 2 випливає, що

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{tx}}{(1+t)^2 B(t)} dt, \quad x < 0. \tag{12}$$

Справді, оскільки $|B(it)| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, то інтеграл (12) абсолютно збіжний при $x < 0$. Крім цього, якщо C_n — півкола із леми 2, то за теоремою про лишки

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-iR_n}^{iR_n} \frac{e^{tx}}{(1+t)^2 B(t)} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{e^{tx}}{(1+t)^2 B(t)} dt = \sum_{|\lambda_n| \leqslant R_n} \frac{e^{x\lambda_n}}{(1+\lambda_n)^2 B'(\lambda_n)}.$$

Але, завдяки (6), при фіксованому $x < 0$ маємо

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{e^{tx}}{(1+t)^2 B(t)} dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{xR_n \cos\varphi}}{R_n |B(R_n e^{i\varphi})|} d\varphi \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Тому (12) виконується.

Для ряду (11) $\beta_0 = q$. Тому за лемою 3 $\beta = q$. З іншого боку із (12) отримуємо, що $|F(x)| = O(1)$, $x \in (-\infty; 0)$. Отже, $\beta^* = 0$. Тому $\beta = \beta^* + q$ і теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сорокивский В.М. *О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле* Укр. мат. журн. – 1984. – Т.36, 4. – С.524–528.
2. Скаскив О.Б., Сорокивский В.М. *О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле* Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, 3. – С.363–371.
3. Anderson J.M., Binmore K.G. *On entire functions with gap power series* Glasgow Math. J. – 1971. – V.12, 2. – P.89–97.
4. Винницкий Б.В., Шаповаловский А.В. *О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле с комплексными показателями* Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, 7. – С.882–888.
5. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.:Наука, 1970. – 592 с.
6. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В. *Про зростання функцій зображених рядами Діріхле з комплексними показниками на дійсній осі* Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49, 12. – С.1610–1616.
7. Гришин А.Ф. *Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций, I* Математическая физика, анализ, геометрия. – 1994. – Т.1, 2. – С.193–215.
8. Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле в полуполосе* Матем. сб. – 1982. – Т.117(159), 3. – С.412–424.

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка.

Надійшло 19.11.1998
Після переробки 25.03.1999