УДК 512.553.1

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ФУТОРНОГО ДЛЯ АЛГЕБРИ ЛІ ТИПУ A_2

О.М. Хоменко

O.M. Khomenko. *A proof of the Futorny theorem for a Lie algebra of type* A_2, Matematychni Studii, **11**(1999) 209–212.

We present a simple proof of the Futorny theorem on submodules of generalized Verma modules over a Lie algebra of type A_2.

О.М. Хоменко. *Доказательство теоремы Футорного для алгебры Ли типа* A_2 // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.209–212.

Мы предлагаем более простое доказательство теоремы Футорного о подмодулях обобщенных модулей Верма над алгеброй Ли типа A_2.

У цьому повідомленні запропоновано нове доведення теореми Футорного [2], яка встановлює необхідні та достатні умови існування підмодуля в узагальненому модулі Верма над алгеброю $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ (див. [1]). Оригінальне доведення грунтується на прямому підрахунку і в загальному випадку вимагає розв'язання деякої системи лінійних рівнянь розміру $n \times n$. Запропоноване в даній статті доведення спирається виключно на теорію $\mathrm{sl}(2)$-модулів і технічно менш громіздке. Всі поняття та позначення, що використовуватимуться у статті без визначення, можна знайти в [3].

Нехай $\mathfrak{G}$ позначає алгебру Лі $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$; Δ — її система коренів з стандартним розбиттям $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ відносно бази $\pi = \{\alpha, \beta\}$; $\mathfrak{H}$ — підалгебра Картана алгебри $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}_-$ та $\mathfrak{N}_+$— підалгебри , що відповідають множинам Δ^- та Δ^+. Тоді $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}_+$. Позначимо через $U(\mathfrak{G})$ універсальну обгортуючу алгебри $\mathfrak{G}$. Покладемо $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$. Фіксуємо $\alpha \in \pi$. Нехай $N^\alpha_\pm = \sum_{\gamma\in\Delta^+\setminus\{\alpha\}} \mathfrak{G}_{\pm\gamma}$, $\mathfrak{H}^\alpha = \{h \in \mathfrak{H} | \alpha(h) = 0\}$, $\mathfrak{G}^\alpha \simeq \mathrm{sl}(2)$ — підалгебра, породжена $\mathfrak{G}_{\pm\alpha}$ та $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}^\alpha$.

Для $\mathfrak{G}$-модуля V позначимо $V_\lambda := \{v \in V | hv = \lambda(h)v, \forall h \in H\}$. Модуль V називається ваговим, якщо $V = \bigoplus_{\lambda\in H^*} V_\lambda$.

Добре відомо, що $c_\alpha = (H_\alpha + 1)^2 + 4X_{-\alpha}X_\alpha$ породжує центр $\mathfrak{G}^\alpha$. Довільна пара $a, b \in \mathbb{C}$ задає нерозкладний ваговий $\mathfrak{G}^\alpha$-модуль $N(a, b)$ на якому $X_{-\alpha}$ діє ін'єктивно, a є власним значенням H_α, а b є власним значенням c_α. Справедлива наступна лема.

1. *Наступні твердження еквівалентні:*
1) $N(a, b)$ *незвідний.*
2) $N(a, b)$ *без скруту.*
3) $b \neq (a + 2l + 1)^2$ *для всіх* $l \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Випливає з конструкції $N(a, b)$. $\square$

Оскільки $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\alpha \oplus \mathfrak{H}^\alpha$, то довільний елемент $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ однозначно записується у вигляді $\lambda = \lambda_\alpha + \lambda^\alpha$, де $\lambda_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$, $\lambda^\alpha \in \mathfrak{H}^\alpha$. Нехай $a, b \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ такі, що $(\lambda - \rho)(H_\alpha) = (\lambda_\alpha - \rho)(H_\alpha) = a$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 17B35, 22E47.

Визначимо структуру $\mathfrak{H}$-модуля на $N(a,b)$, поклавши $hv = \lambda^\alpha(h)v$ для довільного $h \in \mathfrak{H}^\alpha$ та $v \in N(a,b)$. Далі ми можемо розглядати $N(a,b)$ як $D = \mathfrak{H} + \mathfrak{G}^\alpha \oplus N_+^\alpha$-модуль, поклавши $nv = 0$ для всіх $n \in N_+^\alpha, v \in N(a,b)$.

Визначимо $\mathfrak{G}$-модуль $M_\alpha(\lambda, b) = U(\mathfrak{G}) \bigotimes_{U(D)} N(a,b)$ асоційований з α, λ, b. Називатимемо його узагальненим модулем Верма. На відміну від класичного, узагальнений модуль Верма не має старшої ваги, але може мати примітивний елемент. Змінимо параметризацію модулів $M_\alpha(\lambda, b)$, поклавши $M(\lambda, p) = M(\lambda, b)$, де $p^2 = b$. Модулі $M(\lambda, p)$ є універсальними об'єктами в категорії $\mathfrak{G}$-модулів, породжених α-примітивними елементами.

Ваговий модуль V називається α-розшарованим, якщо X_α діє ін'єктивно. Модуль $M(\lambda, p)$ є α-розшарованим тоді і лише тоді, коли $p^2 \neq (\lambda(H_\alpha) + 2l)^2$ для всіх $l \in \mathbb{Z}$. Позначимо $\lambda_1 = \lambda(H_\alpha), \lambda_2 = \lambda(H_\beta)$.

Дослідження стуктури підмодулів модуля $M(\lambda, p)$ у найпростішому випадку алгебри A_2 проведене у роботі [2], в якій встановлена наступна теорема.

1 (). *Нехай $\mathfrak{G} = \mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$, $M(\lambda, p)$— α-розшарований модуль, над $\mathfrak{G}$ та $N^\pm = (\lambda_1 + 2\lambda_2 \pm p)/2$, тоді справедливі наступні твердження:*
1. Якщо $N^\pm \bigcap \mathbb{N} = \varnothing$, то $M(\lambda, p)$ — незвідний.
2. Якщо $N^\pm \bigcap \mathbb{N} = N$,то існує единий $M(\lambda', p') \subset M(\lambda, p)$, причому $\lambda_1' = \lambda_1 + N$, $\lambda_2' = \lambda_2 - 2N$, $p' = p \mp N^\pm$.
3. Якщо $N^\pm \bigcap \mathbb{N} = N_{1,2}$, то $M(\lambda_2, p_2) \subset M(\lambda_1, p_1) \subset M(\lambda, p)$, причому для відповідних параметрів маємо $\lambda_1^i = \lambda_1 + N_i$, $\lambda_2^i = \lambda_2 - 2N_i$, $p_i = p \mp N^\pm$, $i = 1, 2$.

В цій статті пропонується інше доведення цієї теореми.

2. *Оператори $X_\pm^{\lambda,p} = 1/2(\lambda_1 \mp p)X_{-\alpha-\beta} + X_{-\alpha}X_{-\beta} \in U(\mathfrak{G})$ задовольняють наступні умови:*
1) $X_\pm^{\lambda,p} M(\lambda, p)_{\mu-\rho} \subset M(\lambda, p)_{\mu-\rho-\alpha-\beta}$.
2) Якщо $v \in M(\lambda, p)_{\mu-\rho}$ та $c_\alpha v = q^2 v$, тоді $c_\alpha X_\pm^{\mu,q} v = (q \pm 1)^2 X_\pm^{\mu,q} v$.
Оператори $Y_\pm^{\lambda,p} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm p)X_{\alpha+\beta} + X_\beta X_\alpha \in U(\mathfrak{G})$ задовольняють наступні умови:
3) $Y_\pm^{\lambda,p} M(\lambda, p)_{\mu-\rho} \subset M(\lambda, p)_{\mu-\rho+\alpha+\beta}$.
4) Якщо $v \in M(\lambda, p)_{\mu-\rho}$ та $c_\alpha v = q^2 v$, тоді $c_\alpha Y_\pm^{\mu,q} v = (q \pm 1)^2 Y_\pm^{\mu,q} v$.

Доведення. Нехай $v_0 \in M(\mu, q)_{\lambda-\rho}$ такий, що $c_\alpha v_0 = p^2 v_0$. Розглянемо вектори $X_{-\alpha-\beta}v_0$ та $X_{-\alpha}X_{-\beta}v_0$. Вони утворюють базу деякого підпростору $M(\mu, q)_{\lambda-\rho-\alpha-\beta}$. Знайдемо у цьому підпросторі власну базу оператора c_α. Безпосередніми обчисленнями отримуємо

$$[(H_\alpha + 1)^2, X_{-\gamma}] = -\gamma(H_\alpha)X_{-\gamma}(2(H_\alpha + 1) - \gamma(H_\alpha)), \tag{1}$$

$$[4X_{-\alpha}X_\alpha, X_{-\alpha-\beta}] = -X_{-\alpha}X_{-\beta}, \tag{2}$$

$$[4X_{-\alpha}X_\alpha, X_{-\beta}] = -X_{-\alpha-\beta}X_\alpha. \tag{3}$$

З формул (1)–(3) легко випливає, що

$$c_\alpha X_{-\alpha-\beta}v_0 = (p^2 - 2\lambda_1 + 1)X_{-\alpha-\beta}v_0 - 4X_{-\alpha}X_{-\beta}v_0,$$
$$c_\alpha X_{-\alpha}X_{-\beta}v_0 = (\lambda_1^2 - p^2)X_{-\alpha-\beta}v_0 + (p^2 + 2\lambda_1 + 1)X_{-\alpha}X_{-\beta}v_0.$$

Отже матриця оператора c_α в базі $\langle X_{-\alpha-\beta}v_0, X_{-\alpha}X_{-\beta}v_0\rangle$ матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} p^2 - 2\lambda_1 + 1 & \lambda_1^2 - p^2 \\ -4 & p^2 + 2\lambda_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що $(p \pm 1)^2$ є її власними числами, а їхні власні вектори мають вигляд:

$$\hat{X}_\mp^{\lambda,p} = \left(\frac{1}{2}(\lambda_1 \pm p)X_{-\alpha-\beta} + X_{-\alpha}X_\beta\right)v_0$$

Очевидно, що $X_-^{\lambda,0} = X_+^{\lambda,0}$. Звідси отримуємо твердження леми для $X_\pm^{\lambda,p}$. Для $Y_\pm^{\lambda,p}$ доведення подібне. □

Кожний ваговий підпростір $M(\lambda,p)_{\mu-\rho}$ можна розглядати як пряму суму кореневих підпросторів оператора c_β. Тому характеризуватимемо вектори з $M(\lambda,p)$ парою величин (μ,q), де μ — вага вектора відносно $\mathfrak{H}$, а q таке, що оператор $(c_\beta-q^2)$ нільпотентний.

Отже, для оператора c_α ми побудували оператори $X_\pm^{\lambda,p}, Y_\pm^{\lambda,p}$, які переводять вектор v з параметрами (λ,p) у вектор з параметрами $(\lambda\pm(\alpha+\beta),p\pm1)$.

Подібними обчисленнями для $c_\beta=(H_\beta+1)^2+4X_{-\beta}X_\beta$ переконуємось у справедливості наступної леми.

3. *Оператори* $\tilde X_\pm^{\lambda,p}=-\frac12(\lambda_2\mp p-2)X_{-\alpha-\beta}+X_{-\alpha}X_{-\beta}$, $\tilde Y_\pm^{\lambda,p}=-\frac12(\lambda_2\pm p-2)X_{\alpha+\beta}+X_\beta X_\alpha$ *задовольняють умови:*

1) $\tilde X_\pm^{\lambda,p}M(\lambda,p)_{\mu-\rho}\subset M(\lambda,p)_{\mu-\rho-\alpha-\beta}$.

2) Якщо $v\in M(\lambda,p)_{\mu-\rho}$ *та* $c_\beta v=q^2v$, *тоді* $c_\beta\tilde X_\pm^{\mu,q}v=(q\pm1)^2\tilde X_\pm^{\mu,q}v$.

3) $\tilde Y_\pm^{\lambda,p}M(\lambda,p)_{\mu-\rho}\subset M(\lambda,p)_{\mu-\rho+\alpha+\beta}$.

4) Якщо $v\in M(\lambda,p)_{\mu-\rho}$ *та* $c_\alpha v=q^2v$, *тоді* $c_\alpha\tilde Y_\pm^{\mu,q}v=(q\pm1)^2\tilde Y_\pm^{\mu,q}v$.

Зауважимо, що справедливі наступні рівності:

$$X_\pm^{\mu-\alpha-\beta,q\pm1}=X_\pm^{\mu,q}-X_{-\alpha-\beta},\quad \tilde X_\pm^{\mu-\alpha-\beta,q\pm1}=\tilde X_\pm^{\mu,q}-X_{-\alpha-\beta}$$
$$[X_\pm^{\mu,q},X_{-\alpha-\beta}]=0,\quad [\tilde X_\pm^{\mu,q},X_{-\alpha-\beta}]=0.$$

Легко переконатись, що

$$X_\pm^{\mu-\alpha-\beta,q\mp1}=X_\pm^{\mu,q};\quad \tilde X_\pm^{\mu-\alpha-\beta,q\mp1}=\tilde X_\pm^{\mu,q}. \tag{4}$$

Розглянемо модуль $M(\lambda,p)$. Нехай $q^2=\lambda_2^2$ — власне значення оператора c_β на породжуючому векторі. Розглянемо випадок $q=\lambda_2$ (випадок $q=-\lambda_2$ аналогічний). Оскільки $M(\lambda,p)$ є α-розшарованим, то $M(\lambda,p)\simeq M(\lambda+k\alpha,p)$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$. Тому можна підібрати k так, щоб $(\lambda+k\alpha)(H_\beta)<0$. Надалі вважатимемо $\lambda_2<0$.

Нехай v_0 — породжуючий елемент модуля $M(\lambda,p)$. Припустимо, що існує $M(\lambda-n(\alpha+\beta))\subset M(\lambda,p)$. Нехай v — його породжуючий вектор. Тоді v — це власний вектор оператора c_α ; $X_\beta v=0$, тому $c_\beta v=((H_\beta+1)^2+4X_{-\beta}X_\beta)v=(\lambda_2-n)^2v={q'}^2v$. Далі $q'=\lambda_2-n$, бо зважаючи на те, що $\lambda_2<0$, вектор з параметрами $(\lambda-n(\alpha+\beta),-(\lambda_2-n))$, не можна отримати із v_0 ніякою комбінацією операторів $\tilde X_\pm$. Оскільки для всіх $k\geq0$ вимірність простору $V\subset M(\lambda,p)_{\lambda-\rho-k(\alpha+\beta)}$, власного для оператора c_β з власним числом $(q-k)^2$ дорівнює 1, то без обмеження загальності можна вважати, що існує лише одна можливість:

$$v=\Bigl(\prod_{k=0}^{n-1}\tilde X_-^{\lambda_2-k(\alpha+\beta),q-k}\Bigr)v_0=\Bigl(\prod_{k=0}^{n-1}(\tilde X_-^{\lambda,q}+kX_{-\alpha-\beta})\Bigr)v_0. \tag{5}$$

Крім цього вектор v є власним вектором оператора c_α, тому повинна існувати така послідовність операторів $X_\pm$, що $v=(\mathrm{const}\,X_\pm^{\lambda,p}X_\pm^{\lambda-\alpha-\beta,p\pm1}\dots)v_0$. Враховуючи (4), можна згрупувати множники у наступний спосіб:

$$v=\Bigl(\prod_{k=0}^{n_1-1}(X_-^{\lambda,p}-kX_{-\alpha-\beta})\prod_{m=0}^{n-n_1-1}(X_+^{\lambda,p}-mX_{-\alpha-\beta})\Bigr)v_0. \tag{6}$$

Розглянемо випадок, коли у рівності (6) $n_1=0$. Зауважимо, що $M(\lambda,p)$ є $U(\mathfrak{N})$-вільним. Порівнявши (6) і (5) та переставивши в (5) множники у зворотньому порядку, отримаємо:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(\tilde X_-^{\lambda,q}+(n-1)X_{-\alpha-\beta}-kX_{-\alpha-\beta})=\mathrm{const}\prod_{k=0}^{n-1}(X_+^{\lambda,p}-kX_{-\alpha-\beta}).$$

Використовуючи формули для $\tilde X_-^{\lambda,q}$, $X_+^{\lambda,p}$, отримаємо $-1/2(\lambda_2+q-2)+n-1=1/2(\lambda_1-p)$. Остаточно з $q=\lambda_2$ випливає

$$n=\frac12(\lambda_1+2\lambda_2-p). \tag{7}$$

Подібно, припустивши, що в (6) $n_1 = n$ отримаємо:

$$n = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + p). \tag{8}$$

Припустимо тепер, що в рівності (6) $n_1 \neq 0, n$. Тоді

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Big(X_{-\alpha}X_{-\beta} - \frac{1}{2}(\lambda_2 + q - 2)X_{-\alpha-\beta} + (n-1)X_{-\alpha-\beta} - kX_{\alpha-\beta}\Big) =$$
$$= \prod_{k=0}^{n_1-1}\Big(X_{-\alpha}X_{-\beta} + \frac{1}{2}(\lambda_1 + p)X_{-\alpha-\beta} - kX_{-\alpha-\beta}\Big)\times$$
$$\times \prod_{m=0}^{n-n_1-1}\Big(X_{-\alpha}X_{-\beta} + \frac{1}{2}(\lambda_1 - p)X_{-\alpha-\beta} - mX_{-\alpha-\beta}\Big).$$

Позначивши $Z = X_{-\alpha}X_{-\beta}$, $Y = X_{-\alpha-\beta}$, маємо рівність добутків многочленів першого степеня. За теоремою Пуанкаре-Біркгофа-Вітта, це можливо лише тоді, коли множники цих добутків попарно рівні між собою. Тобто $-1/2(\lambda_2 + q - 2) + (n-1) = 1/2(\lambda_1 + p)$ та $1/2(\lambda_1 + p) - n_1 = 1/2(\lambda_1 - p)$. Отже ми отримали (8) з умовою $p = n_1 \in \mathbb{N}$. Подібно з $-1/2(\lambda_2 + q - 2) + (n-1) = 1/2(\lambda_1 - p)$, $1/2(\lambda_1 - p) - n_1 = 1/2(\lambda_1 + p)$, отримуємо (7) з умовою $-p = n_1 \in \mathbb{N}$. Отже, якщо в модулі $M(\lambda, p)$ є підмодуль, ізоморфний $M(\lambda - n\beta, p')$, то $n \in \{1/2(\lambda_1 + 2\lambda_2 \pm p)\}$; $p' = p \mp n$.

Навпаки, нехай

$$n \in \{1/2(\lambda_1 + 2\lambda_2 \pm p)\}\,; \quad p' = p \mp n, \tag{9}$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Звернемо увагу на те, що (9) не залежить від "зсуву" породжуючого вектора на $X^m_{\pm\alpha}$. Нехай v_0 — породжуючий модуля $M(\lambda, p)$, та $v = \prod_{k=0}^{n-1}(X^{\lambda,p}_{\pm} - kX_{-\alpha-\beta})v_0$. Тоді $c_\alpha v = (p \mp n)^2$. Крім цього з $v = \prod_{k=0}^{n-1}(\tilde{X}^{\lambda,q}_{\mp} - kX_{-\alpha-\beta})v_0$ випливає, що $c_\beta v = (q-n)^2 v = (\lambda_2 - n)^2 v$. З іншого боку

$$c_\beta v = \big((H_\beta + 1)^2 + 4X_{-\beta}X_\beta\big)v_0 = (\lambda_2 - n)^2 v_0 + 4X_{-\beta}X_\beta v_0.$$

Враховуючи ще, що $X_{-\beta}$ діє ін'єктивно, маємо $X_\beta v = 0$. Зваживши на те, що ця властивість не змінюється під дією $X_{\pm\alpha}$ (оскільки $M(\lambda, p)$ є α-розшарованим), маємо

$$X_{\alpha+\beta}v = [X_\alpha, X_\beta]v = X_\alpha X_\beta v - X_\beta X_\alpha v = 0.$$

Отже v є α-примітивним елементом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Футорный В.М. *Некоторое обобщение модулей Верма и неприводимые представления алгебры* sl(3) Укр. мат. журн. – 1986. – Т.38, 4. – С.492–497.
2. Футорный В.М. *Весовые* $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ *модули, порожденные полупримитивными элементами* Укр. мат. журн. – 1991. – Т.43, 2. – С.281–285.
3. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. – М.: Мир, 1978.

Київський університет ім Т.Шевченка, мех.-мат. факультет, кафедра алгебри,

Київ, 252033, Володимирська 64.

Надійшло 15.10.1997