УДК 517.51+517.98

СИМЕТРИЧНА КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ СУКУПНО КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк, В.В. Нестеренко

V.K. Maslyuchenko, V.V. Mykhajlyuk, V.V. Nesterenko. *Symmetrical quasicontinuity of joint quasicontinuous functions*, Matematychni Studii, **11**(1999) 204–208.

It is shown that if X is a second countable space, Y is either a second countable or metrizable space, Z is a separable metrizable space and $f\colon X\times Y\to Z$ is a quasicontinuous map, then there is a residual subset B of Y such that f is symmetrical quasicontinuous with respect to y at every point of the product $X\times B$.

В.К. Маслюченко, В.В. Михайлюк, В.В. Нестеренко. *Симметрическая квазинепрерывность совокупно квазинепрерывных функций* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.204–208.

Показано, что когда пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, пространство Y удовлетворяет второй аксиоме счетности или метризуемо, Z — сепарабельное метризуемое пространство и отображение $f\colon X\times Y\to Z$ квазинепрерывно, то существует остаточное в Y множество B такое, что отображение f симметрически квазинепрерывно относительно y в каждой точке произведения $X\times B$.

1. В роботі [1], що мала своїм відправним пунктом дослідження К. Бегеля [2], був уведений клас K_hC горизонтально квазінеперервних і неперервних відносно другої змінної функцій $f\colon X\times Y\to Z$ і для функцій з цього класу були доведені різні теореми про їх сукупну неперервність. Одна з них узагальнювала результат Брекеріджа і Нішіури [3], що стосувався функцій класу $\overline{K}C$, які квазінеперервні відносно першої змінної при фіксованих значеннях іншої, що пробігають деяку всюди щільну множину, і неперервні відносно другої змінної. Щоб з'ясувати істотність узагальнення, природно постало питання про співвідношення між класами K_hC і $\overline{K}C$, для яких виконується очевидне включення $K_hC\supset\overline{K}C$. Уже в [1] було встановлено, що це включення, взагалі кажучи, строге і що результат з [1] кращий ніж відповідний з [3]. Разом з тим залишалось неясним чи відрізняються ці класи у випадку дійснозначних функцій на $[0,1]^2$, а було лише доведено, що в тому випадку, коли X і Y — берівські простори з першою аксіомою зліченності, а Z метризовний, то для кожної функції f з K_hC і для кожного x з X множина тих точок $y\in Y$, для яких функція $f_y\colon X\to Z$, $f_y(x)=f(x,y)$, квазінеперервна в точці x, є всюди щільною в Y.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C08.

Тут ми показуємо, що для широкого класу просторів справджується рівність $K_hC = \overline{K}C$, більше того при певних умовах на простори для квазінеперервного відображення $f\colon X \times Y \to Z$ існує залишкова в Y множина B, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно y в кожній точці добутку $X \times B$. З цієї теореми одержується певний опис сукупно квазінеперервних відображень. Ми показуємо також істотність умови, накладеної на X, в основному результаті.

2. Всі типи квазінеперервності, які використовуються в даній роботі, одержуються як частині випадки наступного загального поняття. Нехай X і Y — топологічні простори і $\mathcal{A}$ — система підмножин простору X. Відображення $f\colon X \to Y$ ми називаємо *квазінеперервним відносно системи* $\mathcal{A}$ (коротше, $\mathcal{A}$-*квазінеперервним*) в точці $x_0 \in X$, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в просторі Y і для кожного околу U точки x_0 в X існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $A \subset U$ і $f(A) \subset V$. Якщо f квазінеперервне відносно $\mathcal{A}$ в кожній точці з X, то f називається просто $\mathcal{A}$-квазінеперервним. Звичайна квазінеперервність одержується, коли ми за $\mathcal{A}$ беремо всіх непорожніх відкритих множин в X.

Якщо простір Y метричний і $|y' - y''|$ — відстань між точками y' і y'' в Y, то для множини $E \subset X$ і точки $x_0 \in X$ число $\omega_{f,x_0}(E) = \sup_{x \in E} |f(x) - f(x_0)|$ ми називаємо *прив'язаним коливанням* відображення $f\colon X \to Y$ у точці x_0. Відображення $f\colon X \to Y$ зі значеннями в метричному просторі Y буде квазінеперевним відносно системи $\mathcal{A}$ в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожного околу U точки x_0 в X існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $A \subset U$ і $\omega_{f,x_0}(A) < \varepsilon$. Символом $\omega_f(E) = \sup\bigl\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in E\bigr\}$ ми позначаємо звичайне коливання відображення f на множині E.

Для відображень $f\colon X \times Y \to Z$, де X, Y, Z — топологічні простори, ми будемо розглядати багато різновидів квазінеперервності. Позначимо через $\mathcal{G}$ систему всіх відкритих непорожніх підмножин топологічного добутку $X \times Y$, а через $\mathcal{H}_1$ — систему всіх підмножин вигляду $U \times \{y\}$, де U — відкрита непорожня множина в X і $y \in Y$, і через $\mathcal{H}_2$ — систему всіх підмножин вигляду $\{x\} \times V$, де $x \in X$ і V — відкрита непорожня множина в Y. Для точки $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ позначимо через $\mathcal{G}_{y_0}$ відповідно $\mathcal{G}^{x_0}$ систему відкритих множин G в $X \times Y$, для яких $y_0 \in \mathrm{pr}_Y(G)$ чи відповідно $x_0 \in \mathrm{pr}_X(G)$, де $\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$ і $\mathrm{pr}_Y\colon X \times Y \to Y$ — проекції відповідно на X чи Y. Тоді сукупно квазінеперервні або просто квазінеперервні відображення — це $\mathcal{G}$-квазінеперервні, $\mathcal{H}_i$-квазінеперервність для $i = 1$ чи $i = 2$ називається відповідно *горизонтальною* чи *вертикальною квазінеперервністю*. Якщо f квазінеперервне в точці $p_0 = (x_0, y_0)$ відносно системи $\mathcal{G}^{x_0}$ чи відповідно $\mathcal{G}_{y_0}$, то кажуть, що f *симетрично квазінеперервне* відносно x чи відповідно відносно y в точці p_0.

3. Теорема 1. *Нехай простір X задовольняє другу аксіому зліченності, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності або метризовний, Z — сепарабельний метризовний простір і відображення $f\colon X \times Y \to Z$ квазінеперервне. Тоді існує залишкова в Y множина B така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно y в кожній точці добутку $X \times B$.*

Доведення. Оскільки кожний сепарабельний метризовний простір гомеоморфно вкладається в деякий метризовний компакт, то можемо вважати, що Z — метричний компактний простір, відстань між точками z' і z'' якого ми позначатимемо через $|z' - z''|$.

Будемо міркувати від супротивного. Нехай висновок теореми не справджується. Тоді існує множина G_0 другої категорії в Y, у якої для кожного $y \in G_0$ існує точка $x_y \in X$ така, що f не є симетрично квазінеперервне відносно другої змінної в точці $p_y = (x_y, y)$. В такому разі для кожного $y \in G_0$ існує $\varepsilon_y > 0$ і околи U_y і V_y відповідно точок x_y і y такі, що для кожної відкритої непорожньої множини U в X і для кожного відкритого околу V точки y в Y, для яких $U \times V \subset U_y \times V_y$, виконується нерівність $\omega_{f,p_y}(U \times V) > \varepsilon$.

Нехай $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база топології простору X. Припустимо спочатку, що Y задовольняє другу аксіому зліченності і нехай $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ — база топології в Y. Кожній точці $y \in G_0$ можна поставити у відповідність трійку $(n_y, m_y, k_y) \in \mathbb{N}^3$, для якої $x_y \in U_{n_y} \subset U_y$, $y \in V_{m_y} \subset V_y$ і $\omega_{f,p_y}(U \times V) > 1/k_y$ для кожної відкритої непорожної множини U в X і для кожного відкритого околу V точки y в Y таких, що $U \times V \subset U_{n_y} \times V_{m_y}$. Оскільки G_0 другої категорії, то існує множина $G_1 \subset G_0$ також другої категорії така, що кожному y з G_1 відповідає одна і та ж трійка (n, m, k).

Нехай тепер Y метризовний і його топологія породжується метрикою d. Позначимо через $V_\delta(y)$ відкриту кулю з центром в точці y і радіуса δ в просторі (Y, d). В цьому випадку ми ставимо у відповідність кожній точці y з G_0 трійку $(n_y, m_y, k_y) \in \mathbb{N}^3$, для якої $x_y \in U_{n_y} \subset U_y$, $y \in V_{m_y} = V_{1/m_y}(y) \subset V_y$ і $\omega_{f,p_y}(U \times V) > 1/k_y$ для всіх U і V таких як і раніше. Знову ж, оскільки G_0 другої категорії в Y, то існує множина $G \subset G_0$ другої категорії в Y така, що кожному y з G відповідає одна і та ж трійка (n, m, k). Оскільки G другої категорії, то існує така точка $y_1 \in G$, що $V_\delta(y_1) \cap G$ є множиною другої категорії для кожного $\delta > 0$ [6]. Покладемо $G_1 = V_{1/2m}(y_1) \cap G$ і $V_m = V_{1/2m}(y_1)$. Нехай $y \in G_1$, U — відкрита непорожна множина в X, V — відкритий окіл точки y, причому $U \times V \subset U_n \times V_m$. Зауважимо, що $V_m \subset V_{1/m}(y)$, бо $d(y, y_1) < 1/2m$. Оскільки $y \in G$, то $n_y = n$, $m_y = y$ і $k_y = k$. Але $U \times V \subset U_{n_y} \times V_{1/m_y}(y)$. Тому $\omega_{f.p_y}(U \times V) > 1/k_y = 1/k$ за побудовою.

Ў в першому, і в другому випадку ми знайшли множину G_1 другої категорії в Y, відкриті множини U_n і V_m відповідно в X і Y і число $k \in \mathbb{N}$ такі, що для кожного $y \in G_1$ маємо $p_y \in U_n \times V_m$ і $\omega_{f,p_y}(U \times V) > 1/k$ для довільної відкритої непорожньої множини U в X і довільного відкритого околу V точки y в Y таких, що $U \times V \subset U_n \times V_m$. Зауважимо, що при цьому $G_1 \subset V_m$.

У просторі Z для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сітка. Візьмемо таку сітку $z_1, \ldots, z_q$ для $\varepsilon = 1/4k$. Покладемо $W_\varepsilon(z_0) = \{z \in Z : |z - z_0| < \varepsilon\}$. Кулі $W_j = W_{1/4k}(z_j)$, $j = 1, \ldots, q$, покривають простір Z. Позначимо $g(y) = f(p_y)$. Для множин $E_j = G_1 \cap g^{-1}(W_j)$, $j = 1, \ldots, q$, маємо $\bigcup_{j=1}^q E_j = G_1$. Оскільки G_1 другої категорії, то існує таке j_0, що множина $E = E_{j_0}$ є другої категорії. Ясно, що $\omega_g(E) \le 1/2k$. З того що множина E є другої категорії випливає, що вона десь щільна, тобто $H = \operatorname{int} \bar{E} \ne \varnothing$. Тоді, як легко бачити, і $H \cap E \ne \varnothing$. Візьмемо довільну точку $y_0 \in H \cap E$. Оскільки $E \subset G_1 \subset V_m$, то $y_0 \in V_m$, отже, множина $U_n \times (V_m \cap H)$ буде околом точки $p_{y_0} = (x_{y_0}, y_0)$ в $X \times Y$. На основі квазінеперервності f в точці p_{y_0} існують такі відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y, що $U \times V \subset U_n \times (V_m \cap H)$ і $\omega_{f,p_{y_0}}(U \times V) < 1/2k$.

Оскільки $V \subset H \subset \bar{E}$, то існує точка $b \in V \cap E$. Тоді для кожної точки $p \in U \times V$ маємо:

$$|f(p) - f(p_b)| \leq |f(p) - f(p_{y_0})| + |f(p_{y_0}) - f(p_b)| < 1/2k + 1/2k = 1/k,$$

звідки $\omega_{f,p_b}(U \times V) \leq 1/k$. Але ж $U \subset U_n$, $V \subset V_m$ і V є відкритим околом точки $b \in E \subset G_1$. Отже, за побудовою $\omega_{f,p_b}(U \times V) > 1/k$. Одержана суперечність завершує доведення.

4. Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Символами K_hC і K_hK ми позначаємо сукупність усіх горизонтально квазінеперервних відображень $f\colon X \times Y \to Z$, які неперервні чи відповідно квазінеперервні відносно другої змінної. Через $\overline{K}C$ і $\overline{K}K$ позначаються множини всіх тих відображень $f\colon X \times Y \to Z$, для яких існує множина $B \subset Y$ (своя для кожного відображення) така, що $\bar{B} = Y$ і для кожного $y \in B$ відображення $f_y\colon X \to Z$, $f_y(x) = f(x, y)$, квазінеперервне, і які неперервні чи відповідно квазінеперервні відносно другої змінної.

В роботі [1] було доведено наступні узагальнення результатів Бегеля [2] і Мартіна [4]: якщо X — берівський простір, Y — топологічний простір з першою (другою) аксіомою зліченності і Z — метризовний простір, то кожне відображення з класу K_hC (K_hK) квазінеперервне. На основі нього з теореми 1 негайно одержуються такі результати:

Теорема 2. *Нехай X, Y і Z задовольняють умови теореми 1, причому X і Y — берівські простори. Тоді $K_hC = \overline{K}C$.*

Теорема 3. *Нехай X і Y — берівські простори з другою аксіомою зліченності і Z — сепарабельний метризовний простір. Тоді $K_hK = \overline{K}K$.*

Крім того, з теореми 1 легко одержується наступний результат, який пов'язує сукупну квазінеперервність з симетричною квазінеперервнісю відносно y і вертикальною квазінеперервністю.

Теорема 4. *Нехай X, Y і Z задовольняють умови теореми 1 і Y берівський. Тоді відображення $f\colon X \times Y \to Z$ буде квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f є вертикально квазінеперервним і існує всюди щільна в Y множина B така, що f симетрично квазінеперервне відносно y в кожній точці множини $X \times B$.*

Доведення. Необхідність негайно випливає з теореми 1. Для доведення достатності розглянемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, додатне число ε і околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно в просторах X і Y. Оскільки f вертикально квазінеперевне в точці p_0, то існують точка $x_1 \in U$ і відкрита непорожня множина $V_1 \subset V$ такі, що $\omega_{f,p_0}(\{x_1\} \times V_1) < \varepsilon/2$. Але $\bar{B} = Y$. Тому існує точка $y_1 \in B \cap V_1$. Відображення f квазінеперервне в точці $p_1 = (x_1, y_1)$. Тому існують такі відкриті непорожні множини U_2 і V_2 відповідно в X і Y, що $U_2 \times V_2 \subset U \times V$ і $\omega_{f,p_1}(U_2 \times V_2) < \varepsilon/2$. Тоді $\omega_{f,p_0}(U_2 \times V_2) < \varepsilon$.

5. Пьотровський показав [7], покращивши відповідний результат Мартіна [4], що кожна функція, яка квазінеперервна відносно першої і неперервна відносно другої змінної, є симетрично квазінеперервною відносно y, якщо X берівський,

Y задовольняє першу аксіому зліченності і Z цілком регулярний. Зараз ми наведемо приклад квазінеперервної функції $f\colon l_\infty \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, всі горизонтальні перерізи якої не є квазінеперервними, і тим самим покажемо, що наявність зліченної бази у просторі X у теоремі 1 істотна й що результат типу Пьотровського для квазінеперервних функцій не має місця.

Нехай T — система всіх непорожніх підмножин натурального ряду і $e_\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — характеристична функція множини $\tau \in T$. Як добре відомо, існує біекція $\tau \mapsto y_\tau$ множини T на числову пряму $\mathbb{R}$. Позначимо через U_τ кулю радіуса $1/3$ з центром в точці e_τ в банаховому протсорі l_∞ всіх обмежених послідовностей дійсних чисел. Покладемо $V_\tau = (y_\tau, +\infty)$ і $A = \bigcup_{\tau \in T}\big((U_\tau \times V_\tau) \cup \{(e_\tau, y_\tau)\}\big)$, і нехай $f\colon l_\infty \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — характеристична функція множини A. Тоді f квазінеперервна, але всі її горизонтальні перерізи $f_y\colon l_\infty \to \mathbb{R}$ не є квазінеперервними. А саме, при $y = y_\tau$ функція f_y не є квазінеперервною в точці e_τ.

Запропонована вище конструкція подібна до відповідного прикладу з [8]. Можна було б діяти інакше, беручи в ролі X пряму суму континуума числових прямих і будуючи відображення $f\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ як склейку неперервних функцій $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для яких горизонтальний переріз g_y не є квазінеперервним. Аналогічна конструкція розглядалась в [9].

ЛІТЕРАТУРА

1. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Горизонтальна квазінеперервність та її застосування. – Чернівці, 1996. – 15 с. – Деп. в УкрЎНТЕЎ 01.11.96, №98-Ук96.
2. Bögel K. *Über partiell differenzierbare Funtionen* Math. Z. – 1926. – S.490–498.
3. Breckenridge J.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasiconinuity and Baire spaces* Bull. inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – V.4, №2. – P.191–203.
4. Martin N.F.G. *Quasi-continuous functions on product spaces* Duke Math. J. – 1961. – P.39–44.
5. Piotrowski Z. *A survey of results concerning generalized continuity on topological spaces* Acta Math. Univ. Comen. – 1987(88). – 52–53. – P.91–110.
6. Куратовский К. Топология, Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594с.
7. Piotrowski Z. *Quasi-continuity and product spaces* Proc. Intern. Conf. Geam. Top., Warsaw., 1980. – P.349–352.
8. Вітренко О.В., Маслюченко В.К. *Про ледь неперервні функції* Матем. Студії. – 1996. – Т.6. – С.113–118.
9. Piotrowski Z. *Separate and joint continuity* Real Anal. Exch. – 1985–1986. – V.11, №2. – P.293–322.

Чернівецький державний університет, кафедра математичного аналізу.

Надійшло 19.03.1998