УДК 512.8

МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ МЕНГЕРОВСКОГО ТИПА

В.В. Вареник

V.V. Varenyk. *Multioperator algebras of Menger type*, Matematychni Studii, **11**(1999) 199–203.

In the paper main derivative polylinear operations on Ω-algebra over infinite field are considered. For the vector space, partial algebra-clone over the field is constructed and some of its properties are considered. We also found examples to illustrate the statements presented in the paper.

В.В. Вареник. *Мультиоператорные алгебры менгеровского типа* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.199–203.

В статье рассматриваются главные производные операции на Ω-алгебре над бесконечным полем. Для векторного пространства над полем строится частичная алгебра-клон и рассматриваются некоторые его свойства. Также найдены примеры, которые иллюстрируют изложенные в статье утверждения.

Будем рассматривать главные производные полилинейные операции на Ω-алгебре A над бесконечным полем P. Дадим их описание в терминах частичных алгебр — клонов.

Идея рассмотрения клонов идет от книги Кона [1] и от работ Я.В. Хивона [2], В.А. Артамонова [3]. Используются также некоторые понятия, относящиеся к линейным пространствам, из книг Б.А. Розенфельда [4] и Л.А. Калужнина [5].

Заметим, что качественным различием между построенными мультиоператорными алгебрами менгеровского вида и объектами статьи [3] есть разница в построении операции $\otimes(2)$. При этом за основу взята теория систем Менгера (в частности в [2]), явное применение которой заложено в примере 1.

Также, нужно сказать, что наряду с представлением с помощью векторных пространств, системы Менгера представимы функциями, матрицами, отношениями и другими объектами.

Построим для векторного пространства A над полем P частичную алгебру — клон $O(A)$ и рассмотрим некоторые его свойства.

Пусть A — векторное пространство над полем P. Положим для $n \in \mathbb{N}$ $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ раз}}$, $A^0 = P$. Обозначим $O^n(A) = \mathrm{Hom}_p(A^n, A)$, $n \geq 0$. Поэтому $O^n(A)$ является векторным пространством над P с операциями: $(\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$, $(\lambda\alpha)\bar{x} = \lambda(\alpha\bar{x})$, где $\bar{x} \in A^n$; $\alpha, \beta \in O^n(A)$, $\lambda \in P$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 8A40, 20N15.

Пример 1. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_1 = P$, $A_2 = P^2$, $A_3 = P^3$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} := (a_1 + b_1 + c_1, b_2 + c_2, c_3)$.

Пример 2. $A = V_2$ — множество векторов двумерного пространства — плоскости; $\alpha = f_{\alpha_2}^{\alpha_1}$; $\beta = f_{\beta_2}^{\beta_1}$ — множество функций, действующих на предыдущие векторы;

$\bar{x}(x_1, x_2)$; $\alpha\bar{x} = f_{\alpha_2}^{\alpha_1}(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)$, $\beta\bar{x} = f_{\beta_2}^{\beta_1}(x_1, x_2) = (\beta_1 x_1, \beta_2 x_2)$, $\lambda\bar{x} = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$; $(\alpha + \beta)\bar{x} = (f_{\alpha_2}^{\alpha_1} + f_{\beta_2}^{\beta_1})(x_1, x_2) = f_{\alpha_2+\beta_2}^{\alpha_1+\beta_1}(x_1, x_2) = f_{\alpha_2}^{\alpha_1}(x_1, x_2) + f_{\beta_2}^{\beta_1}(x_1, x_2) = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$; $(\lambda\alpha)\bar{x} = \lambda(\alpha\bar{x})$ аналогично.

Ясно, что $O^n(A)$ есть пространство всех n-арных полилинейных операций на A. В частности, $O^0(A) \simeq A$ есть пространство всех 0-арных операций на A, причем $\alpha \in O^0(A)$ есть нульарная операция, фиксирующая элемент $\alpha 1$ из A, где 1 — единица поля P. В дальнейшем, для удобства обозначения мы будем обозначать нульарную операцию из $O^0(A)$, фиксирующую элемент $x \in A$, через Θ_x. Отметим также, что в $O^1(A)$ содержится тождественная операция ε, для которой $\varepsilon x = x$, для всякого $x \in A$.

Итак, нами построена система пространств $O(A) = \{O^n(A)\}_{n0}$. Определим на $O(A)$ частичные операции: $\varphi_n \colon O^n(A)(O^{k_1}(A), \ldots, O^{k_n}(A)) \to O^k(A)$, для всех $k_1, \ldots, k_n \geq 0$, $n \geq 1$, где $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, и $\varphi_0 \colon O^0(A) \to O^0(A)$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

Введем некоторые обозначения. Пусть V_k, V_{k_1}, ... , V_{k_n} — векторные пространства над P, причем $V_k = V_{k_1} \otimes \cdots \otimes V_{k_n}$ и $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, где $k_1, \ldots, k_n \geq 0$.

Рассмотрим элемент $x = y_{k_1} \otimes \cdots \otimes y_{k_n}$, где $y_{k_1} \in V_{k_1}$, ... , $y_{k_n} \in V_{k_n}$. Определим для $i = 1, \ldots, n$:

$$x^{k_i} = \begin{cases} 1 \in P, & \text{если } k_i = 0, \\ y_{k_i}, & \text{если } k_i > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Так как в дальнейшем мы будем отождествлять для любого векторного пространства L над полем P пространства $P \times L$ и L, то мы можем считать, что $x^{k_1} \otimes \cdots \otimes x^{k_n} = x_k \in V_k$.

Приступим теперь к определению операций φ_n, $n \geq 0$. При $n = 0$ мы определим φ_0 как тождественное преобразование на $O^0(A)$. Если же $n > 0$ и $\beta_1 \in O^{k_1}(A)$, ... , $\beta_n \in O^{k_n}(A)$, $\alpha \in O^n(A)$, то $\varphi_n(\alpha \otimes \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_n)$ должна быть k-арной полилинейной функцией на A, где $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Положим для $\bar{x} = (y_1 \otimes \cdots \otimes y_k)$, где $\bar{x} \in A^k$:

$$\varphi_n(\alpha \otimes \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_n)\bar{x} = \alpha(\beta_1 x^{k_1} \otimes \cdots \otimes \beta_n x^{k_n}). \tag{2}$$

Пример 3. Пусть $A = V_2$. Рассмотрим функции $f_{\alpha_2}^{\alpha_1}$, действующие на векторы $\bar{a}(a_1, a_2) \in V_2$ таким образом: $f_{\alpha_2}^{\alpha_1}(a_1, a_2) = (\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2)$. Для упрощения операцию φ_n (в нашем случае композицию функций φ_2 — при ней в двуместную фунцию в качестве аргументов подставляются две другие функции) будем записывать следующим образом: $\varphi_2(f_{\alpha_2}^{\alpha_1} \otimes f_{\beta_2}^{\beta_1} \otimes f_{\gamma_2}^{\gamma_1})(a_1, a_2) = f_{\alpha_2}^{\alpha_1}[f_{\beta_2}^{\beta_1} f_{\gamma_2}^{\gamma_1}](a_1, a_2) = f_{\alpha_2}^{\alpha_1}((\beta_1 a_1, \beta_2 a_2) + (\gamma_1 a_1, \gamma_2 a_2)) = f_{\alpha_2}^{\alpha_1}((\beta_1 + \gamma_1)a_1, (\beta_2 + \gamma_2)a_2) = (\alpha_1(\beta_1 + \gamma_1)a_1, \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2)a_2) = f_{\alpha_2(\beta_2+\gamma_2)}^{\alpha_1(\beta_1+\gamma_1)}$.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств операции φ_n.

Лемма 1. *Элемент $\varepsilon \in O^1(A)$ является единичным элементом по отношению к операции φ_n, то есть обладает следующими двумя свойствами:*

$$\text{если } \beta \in O^n(A) \text{ и } n \geq 0, \quad \text{то } \varphi_1(\varepsilon \otimes \beta) = \beta; \tag{3}$$

$$\text{если } \beta \in O^n(A) \text{ и } n \geq 1, \quad \text{то } \varphi_1(\beta \otimes \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon) = \beta. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\beta \in O^0(A)$. В этом случае для $1 \in P$ будет выполнятся $(\varphi_1(\varepsilon \otimes \beta))1 = \varepsilon(\beta 1) = \beta 1$, т.е. нульарные операции $\varphi_1(\varepsilon \otimes \beta)$ и β фиксируют в A один и тот же элемент. Поэтому, $\varphi_1(\varepsilon \otimes \beta) = \beta$. Предположим теперь, что $\beta \in O^n(A)$, $n > 0$ и $\bar{x} = y_1 \otimes \dots \otimes y_n \in A^n$. В этом случае, в силу определения 2 $(\varphi_1(\varepsilon \otimes \beta))\bar{x} = \varepsilon(\beta(y_1 \otimes \dots \otimes y_n)) = \beta(y_1 \otimes \ldots \otimes y_n) = \beta\bar{x}$, откуда вытекает, что $\varphi_1(\varepsilon \otimes \beta) = \beta$, так как элементы $\bar{x}$ вида $\bar{x} = y_1 \otimes \ldots \otimes y_n$ порождают пространство A^n. С другой стороны, $(\varphi_n(\beta \otimes \varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon))\bar{x} = \beta(y_1 \otimes \ldots \otimes y_n) = \beta\bar{x}$, откуда, по тем же причинам, следует, что $\varphi_n(\beta \otimes \varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon) = \beta$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\alpha \in O^n(A)$, $\beta_1 \in O^{k_1}(A), \dots, \beta_n \in O^{k_n}(A)$, $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$, $\gamma_1 \in O^{m_1}(A), \dots \gamma_k \in O^{m_k}(A)$. В этом случае имеет место тождество сверхассоциативности (где $\bar{\gamma} = \gamma_1 \otimes \ldots \otimes \gamma_k \in O^{m_1}(A) \times \dots \times O^{m_k}(A)$);*

$$\alpha[\beta_1 \ldots \beta_n][\gamma_1 \ldots \gamma_n] = \alpha[\beta_1[\gamma_1 \ldots \gamma_n] \ldots \beta_n[\gamma_1 \ldots \gamma_n]], \tag{5}$$

где арности левой и правой части равны $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$.

Доказательство. Положим $\bar{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \in A^m, & \text{если } m > 0, y_1, \dots, y_n \in A. \end{cases}$
Для того, чтобы доказать равенство (5), нам достаточно проверить, что его левая и правая части действуют одинаково на элементе $\bar{x}$. Ввиду (2) имеем:

$$\alpha[\beta_1 \ldots \beta_n][\bar{\gamma}](\bar{x}) = \alpha[\beta_1 \ldots \beta_n](\gamma_1 x^{m_1} \otimes \ldots \otimes \gamma_k x^{m_k}) = \alpha(\beta_1(\bar{\gamma}\bar{x})^{k_1} \otimes \ldots \otimes \beta_n(\bar{\gamma}\bar{x})^{k_n}),$$

где $\bar{\gamma}\bar{x} = \gamma_1 x^{m_1} \otimes \ldots \otimes \gamma_k x^{m_k} \in A^m = A^{m_1} \otimes \ldots \otimes A^{m_n}$. Так как у нас $m = \max\{m_1, \dots, m_n\}$, то учитывая обозначение (1) для случая $V_1 = A^{m_1}, \dots, V_{m_n} = A^{m_n}$, мы получаем для $\bar{z} = x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n} \in A^{m_n}$ представление $\bar{z} = z^{k_1} \otimes \ldots \otimes z^{k_n}$. Покажем теперь, что справедливо равенство

$$\beta_s(\bar{\gamma}\bar{x})^{k_s} = \varphi_{k_s}(\beta_s \otimes \gamma^{k_s}) z^{k_s}, \quad 1 \leq s \leq n. \tag{6}$$

В самом деле, если $k_s = 0$, то $\beta_s(\bar{\gamma}\bar{x}) = \beta_s 1 = \varphi_0(\beta_s \otimes 1)1 = \varphi_{k_s}(\beta_s \otimes \gamma^{k_s}) z^{k_s}$. Если же $k_s > 0$, то в соответствии с (1) $(\bar{\gamma}\bar{x})^{k_s} = \gamma_1 x^{m_1} \otimes \ldots \otimes \gamma_{k_s} x^{m_{k_s}}$. Но, с другой стороны, $z^{k_s} = x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_{k_s}}$. Поэтому, равенство (6) следует из определения (2).

Учитывая (6), продолжим наши первоначальные равенства. Имеем $\alpha[\beta_1(\bar{x}\bar{\gamma})^{k_1} \otimes \ldots \otimes \beta_n(\bar{x}\bar{\gamma})^{k_n}] = \alpha\{\varphi_{k_1}(\beta_1 \otimes \gamma^{k_1}) z^{k_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}(\beta_n \otimes \gamma^{k_n}) z^{k_n}\} = \{\varphi_n[\alpha \otimes \varphi_{k_1}(\beta_1 \otimes \gamma^{k_1}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{k_n}(\beta_n \otimes \gamma^{k_n})]\}\bar{z}$. Для завершения доказательства леммы остается только заметить, что $\bar{z} = x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n} = \bar{x}$.

Итак, нами построена система пространств $O(A) = \{O^n(A)\}_{n0}$ с системой частных полилинейных операций φ_n $(n \geq 0)$, удовлетворяющих условиям: 1) φ_0 — тождественная операция на $O^0(A)$; 2) существует единичный элемент $\varepsilon \in O^1(A)$ со свойствами (3) и (4); 3) выполняется тождество сверхассоциативности (5).

Поэтому целесообразно ввести следующее

Определение 1. Система векторных пространств $A = (A_n)_{n0}$ над полем P называется менгеровским T-клоном, если заданы частичные линейные операции $\varphi_n\colon A_{k_1} \otimes \ldots \otimes A_{k_n} \to A_k$ $(n \geq 1)$, $\varphi_0\colon A_0 \to A_0$, удовлетворяющие условиям 1)–3), где $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$.

Можно сразу отметить, что единичный элемент $\varepsilon \in A_1$ единственен. В самом деле, пусть существуют два единичных элемента ε' и ε''. Тогда, в силу свойств (3) и (4) $\varepsilon' = \varphi_1(\varepsilon'' \otimes \varepsilon') = \varepsilon''$.

Заметим, что название „тождество сверхассоциативности" легко объясняется следующими рассуждениями. Для любого менгеровского T-клона $A = (A_n)_{n0}$ пространство A_1 является линейной алгеброй над P с операцией умножения $\varphi_1\colon A_1 \otimes A_1 \to A_1$, причем равенство (5) утверждает, что операция φ_1 на A_1 ассоциативна.

В самом деле, из определения φ_1 следует, что умножение $\alpha \cdot \beta = \varphi_1(\alpha \otimes \beta)$ для всех $\alpha, \beta \in A_1$ дистрибутивно относительно сложения, причем для всех $\lambda \in P$: $(\alpha\lambda)\beta = \alpha(\lambda\beta)$. Если теперь даны три элемента $\alpha, \beta, \gamma \in A_1$, то $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Отметим, что роль единицы по отношению к умножению φ_1 играет единичный элемент $\varepsilon \in A_1$. Это непосредственно следует из равенств (3) и (4).

Проиллюстрируем тождество сверхассоциативности для множества функций $F_2 = \{f_\alpha | f_\alpha\colon A_2 \to A_0\}$, $f_\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_1 + 2a_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Найдем выражение композиции. $f_\alpha[f_\beta f_\gamma](a_1, a_2) = f_\alpha(\beta(a_1 + 2a_2), \gamma(a_1 + 2a_2)) = \alpha(\beta(a_1 + 2a_2) + 2\gamma(a_1 + 2a_2)) = \alpha(\beta + 2\gamma)(a_1 + 2a_2) = f_{\alpha(\beta+2\gamma)}(a_1, a_2)$.

Итак, $f_\alpha[f_\beta f_\gamma] = f_{\alpha(\beta+\gamma)}$. Для доказательства сверх ассоциативности необходимо показать, что выполняется тождество:

$$f_\alpha[f_\beta f_\gamma][f_\tau f_\theta] = f_\alpha[f_\beta[f_\tau f_\theta] f_\gamma[f_\tau f_\theta]]. \tag{7}$$

Левая часть (7) по отношению композиции будет $f_\alpha[f_\beta f_\gamma][f_\tau f_\theta] = f_{\alpha(\beta+2\gamma)}[f_\tau f_\theta] = f_{\alpha(\beta+2\gamma)(\tau+2\theta)}$. Правая часть (7) $f_\alpha[f_\beta[f_\tau f_\theta] f_\gamma[f_\tau f_\theta]] = f_\alpha[f_{\beta(\tau+2\theta)} f_{\gamma(\tau+2\theta)}] = f_{\alpha(\beta(\tau+2\theta)+2\gamma(\tau+2\theta))} = f_{\alpha(\beta+2\gamma)(\tau+2\theta)}$. Как мы видим, левая и правая части (7) равны, поэтому тождество (7) выполняется.

Определенные нами клоны образуют многообразие частичных алгебр с операциями $\Sigma = \{O, \varepsilon, P, -, +, \varphi_n\}$. Поэтому, мы можем говорить о гомоморфизмах клонов, о системах образующих, о подклонах. Например, гомоморфизмом τ клона $A = \{A_n\}_{n0}$ в клон $B = \{B_n\}_{n0}$ называется такая система линейных отображений $\tau = \{\tau\colon A_n \to B_n\}_{n0}$, что: 1) $\tau_1(\varepsilon_A) = \varepsilon_B$, где ε_A и ε_B — единичные элементы клонов A и B; 2) для всех $n \geq 1$, $\beta_1 \in A_{k_1}, \ldots, \beta_n \in A_{k_n}$, $\alpha \in A_n$: $\tau(\alpha[\beta_1, \ldots, \beta_n]) = \tau_n(\alpha)[\tau_{k_1}(\beta_1) \ldots \tau_{k_n}(\beta_n)]$, где $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$.

Заметим, что перестановочность τ_0 с φ_0 выполняется автоматически, поскольку φ_0 — тождественная операция.

Укажем теперь на связь клонов и мультиоператорных Ω-алгебр. Отметим. что определению Ω-алгебры можно придать следующий вид (при этом унарные операции не исключаются).

Пусть дана система множеств $\Omega = (\Omega_n)_{n1}$. Мы скажем, что на векторном пространстве A над полем P задана Ω-структура f, если задано семейство отображений $f = \{f_n\colon \Omega_n \to O^n(A)\}_{n1}$. Пространство A вместе с заданной на нем Ω-структурой f называется Ω-алгеброй (A, Ω, f).

Предположим теперь, что нам дан клон $A = (A_n)_{n0}$. Положим $\Omega = (\Omega_n)_{n1}$, где $\Omega_n = A_n$ при $n \geq 1$.

Теорема 3. *Существует гомоморфизм клонов $f\colon A \to O(A_0)$, превращающий A_0 в Ω-алгебру (A_0, Ω, f).*

Доказательство. Построим гомоморфизм $f\colon A \to O(A_0)$. Если $\alpha \in A_0$, то полагаем $f_0(\alpha) = \Theta_\alpha \in O^0(A)$. Если же $\alpha \in O^n(A)$ $(n \geq 1)$, то $f_n(\alpha)$ — элемент из $O^n(A_0)$, для которого

$$f_n(\alpha)[\beta_1 \dots \beta_n] = \varphi_n(\alpha[\beta_1 \dots \beta_n]) \in A_0 \tag{8}$$

при всех $\beta_1, \dots \beta_n \in A_0$. Ясно, что $f_n(\alpha)$, как элемент из $O^n(A_0)$ определен корректно.

Элемент $\varepsilon_A \in A_1$ при отображении f_1 переходит в тождественную операцию на A_0. В самом деле, в силу свойства (3) для любого $\beta \in A_0$ $f_1(\varepsilon_a)[\beta] = \varphi_1(\varepsilon_A[\beta]) = \beta$. Кроме того, отображения f_n линейны, так как полилинейны операции φ_n. Таким образом, для того, чтобы показать, что f — гомоморфизм клонов, остается проверить, что для всех $\alpha_1 \in A_{k_1}, \dots, \alpha_n \in A_{k_n}$ выполняется равенство: $f_k(\gamma[\alpha_1 \dots \alpha_n]) = f_n(\gamma)[f_{k_1}(\alpha_1) \dots f_{k_n}(\alpha_n)]$, где $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$.

Нам достаточно для этого показать, что на любых $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ элементах $\delta_1, \dots, \delta_k \in A_0$ правая и левая части действуют одинаково. Проверим это.

Пусть $\bar{\delta} = \delta_1 \otimes \dots \otimes \delta_k \in A_0^k$, тогда

$$f_k(\gamma[\alpha_1 \dots \alpha_n]) = \bar{\delta}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу (2) и (8)

$$f_n(\gamma)[f_{k_1}(\alpha_1) \dots f_{k_n}(\alpha_n)]\bar{\delta} = f_n(\gamma)[f_{k_1}(\alpha_1)(\delta_1, \dots, \delta_{k_1}) \dots f_{k_n}(\delta_1, \dots, \delta_{k_n})]. \tag{10}$$

В силу тождества сверхассоциативности последние члены (9) и (10) совпадают. Таким образом, $f\colon A \to O(A_0)$ является гомоморфизмом и A_0 превращается в Ω-алгебру (A, Ω, f).

В заключение укажем связь между симметрическими группами s_n $(n \geq 1)$ и клоном $O(A)$. Благодаря этому становится возможным изучение произвольных операций на Ω-алгебрах.

Лемма 4. *Существует гомоморфизм* $*\colon s_n \to \mathrm{Aut}(O^n(A))$ *для любого* $n \geq 1$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in O^n(A)$ и $\sigma \in s_n$. Определим элемент $\sigma^*(\alpha) \in O^n(A)$, положив для $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in A^n$

$$\sigma^*(\alpha)[x_1 \dots x_n] = \alpha[x_{\sigma^{-1}(1)} \dots x_{\sigma^{-1}(n)}]. \tag{11}$$

Определенное таким образом $\sigma^*(\alpha)$ можно по линейности однозначно продолжить до элемента $\sigma^*(\alpha) \in O^n(A)$. Из (11) видно, что отображение $\alpha \mapsto \sigma^*(\alpha)$ является линейным преобразованием $O^n(A)$. Кроме того, определение (11) показывает, что отображение $\sigma \mapsto \sigma^*$ является гомоморфизмом $*\colon s_n \to \mathrm{Aut}(O^n(A))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohn P.M. Universal algebra. – New York, Harper and Row, 1965.
2. Хион Я.В. *m-арные Ω-кольцоиды* Сиб. мат. журн. – 1967. – Т.8, 1. – С.174–194.
3. Артамонов В.А. *Клоны полилинейных операций и мультиоператорные алгебры* Усп. мат. наук. – 1969. – Т.24. – С.74–59.
4. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966.
5. Калужнӯн Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.О. Лӯнӯйнӯ простори. – К.: Вища школа, 1971.

Винницкий государственный педагогический университет

Получено 18.05.1998
После переработки 24.12.1998