УДК 517.946

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ МІНІМІЗАЦІЇ В СОБОЛІВСЬКИХ ПРОСТОРАХ

В.С. Ільків

V.S. Il'kiv. *Investigation of nonlocal boundary value problem for partial differential equation by means of minimization method in Sobolev spaces*, Matematychni Studii, **11**(1999) 167–176.

We prove existence and uniqueness of a pseudosolution of a two-point boundary problem for a partial differential equation with constant coefficients in a given ball of the Sobolev space. Conditions on size and radius of the ball are imposed.

В.С. Илькив. *Изучение нелокальной краевой задачи для уравнений в частных производных с помощью метода минимизации в соболевских пространствах* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.167–176.

Доказано существование и единственность псевдорешения нелокальной двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными и постоянными коэффициентами в заданном шаре соболевского пространства. Налагаются соответствующие условия на размер и центр шара.

Існування та єдиність розв'язків нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними залежить від коефіцієнтів рівняння та параметрів крайових умов. Ці задачі, як правило, є некоректними в сенсі Адамара.

За допомогою метричного підходу можна довести існування та єдиність розв'язку таких задач для всіх (за винятком множини як завгодно малої міри) векторів, що складені з коефіцієнтів рівняння та параметрів крайових умов [1, 2]. При цьому праві частини рівняння та крайових умов повинні задовольняти деякі умови гладкості.

У цьому зв'язку проблема вивчення нелокальних задач для кожного вектора, складеного з коефіцієнтів рівняння та параметрів крайових умов, без додаткових припущень щодо гладкості правих частин, виглядає цікавою і змістовною.

У цій статті досліджується двоточкова нелокальна задача за умови, що розв'язок належить до деякої кулі заданого соболєвського простору. Для побудови та вивчення розв'язку (псевдорозв'язку) цієї задачі застосовується метод

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G15.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

мінімізації в соболєвських просторах, який є різновидом методу регуляризації Тихонова [3, 4].

Нехай $\mathbf{H}_q$ $(q\in\mathbb{R})$ — соболєвський простір періодичних за змінною $x=(x_1,\ldots,x_p)$ $(p\in\mathbb{N})$ функцій $\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat\varphi(k)e^{ikx}$ зі скалярним добутком вигляду

$$\big(\varphi_1,\varphi_2\big)_q=(2\pi)^p\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2q}\hat\varphi_1(k)\overline{\hat\varphi_2(k)},$$

де $k=(k_1,\ldots,k_p)$, $kx=k_1x_1+\cdots+k_px_p$, $\widetilde{k}^2=1+k_1^2+\cdots+k_p^2$.

Простори $\mathbf{H}_q$ $(q\in\mathbb{R})$ утворюють шкалу, в якій розглядаємо праві частини нелокальних умов.

Нехай $T>0$ — довільне фіксоване число. Розв'язки $u(t,x)$ нелокальної задачі шукаємо в просторах $\mathbf{H}_q^n$ $(q\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$ отриманих поповненням за нормою, породженою скалярним добутком [2] $\big(v_1,v_2\big)_{q,n}=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{j=0}^n\left(\frac{\partial^jv_1}{\partial t^j},\frac{\partial^jv_2}{\partial t^j}\right)_{q-j}dt$, множини нескінченнодиференційовних за змінною t скінченних сум $v(t,x)=\sum_k\hat v(t,k)e^{ikx}$. Простори $\mathbf{H}_q^n$ також утворюють шкалу за нижнім індексом.

Нехай $F(k)$ — комплекснозначна функція над $\mathbb{Z}^p$, $D=\big(D_1,\ldots,D_p\big)$ — вектор-оператор з компонентами $D_j=-i(\partial/\partial x_j)$ $(j=\overline{1,p})$. Під $F(D)$ розумітимемо псевдодиференціальний оператор, який діє за правилом $F(D)\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\hat\varphi(k)e^{ikx}$, де $\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat\varphi(k)e^{ikx}\in\mathbf{H}_q$ $(q\in\mathbb{R})$. Операції над псевдодиференціальними операторами $F(D)$ розуміємо як операції над $F(k)$ для $k\in\mathbb{Z}^p$. Також говоримо про певну властивість $F(D)$, якщо цією властивістю володіють відповідні $F(k)$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$.

Функції $\widetilde{k}$ співставимо оператор $\widetilde{D}$; очевидно, що $\|\varphi\|_q^2=(\varphi,\varphi)_q=\big(\widetilde{D}^{2q}\varphi,\varphi\big)_0$ і

$$\|u\|_{q,n}^2=(u,u)_{q,n}=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{j=0}^n\Big(\widetilde{D}^{2(q-j)}\frac{\partial^ju}{\partial t^j},\frac{\partial^ju}{\partial t^j}\Big)_0dt.$$

Нехай $q\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ — задані числа, u_0 — деяка функція з простору $\mathbf{H}_q^n$. Розглянемо: рівняння

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},D\Big)u\equiv\sum_{|s|\le n}a_s\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}D_1^{s_1}\ldots D_p^{s_p}u=0,\tag{1}$$

нелокальні крайові умови

$$l_ju\equiv\nu\frac{\partial^ju}{\partial t^j}\Big|_{t=0}+\mu\frac{\partial^ju}{\partial t^j}\Big|_{t=T}=\varphi_j(x),\ j=\overline{0,n-1},\tag{2}$$

де $s=(s_0,s_1,\ldots,s_p)$, $|s|=s_0+s_1+\cdots+s_p$, a_s, ν, $\mu\in\mathbb{C}$, $\varphi_j\in\mathbf{H}_{q-j}$ $(j=\overline{0,n-1})$, та додаткову умову

$$||u-u_0||_{q,n}^2\le\varepsilon.\tag{3}$$

Розв'язком задачі (1)–(3) називається функція $u^\varepsilon\in\mathbf{H}_q^n$, яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє умову (3) та мінімізує на множині розв'язків рівняння (1), що задовольняють умову (3), функціонал $l(u)=\sum_{j=0}^{n-1}\big\|l_ju-\varphi_j\big\|_{q-j-1}^2$, тобто

$$l(u^\varepsilon)=\inf\Big\{l(u)\Big|u\in\mathbf{H}_q^n,\ L\Big(\frac{\partial}{\partial t},D\Big)u=0,\ \|u-u_0\|_{q,n}^2\le\varepsilon\Big\}.$$

Нормальним розв'язком [4] задачі (1)–(3) називаємо її розв'язок з мінімальною в просторі $\mathbf{H}_q^n$ нормою і u_0-нормальним розв'язком — розв'язок задачі (1)–(3), для якого є мінімальною величина $\|u-u_0\|_{q,n}$.

Частинний випадок задачі (1)–(3) при $u_0=0$ досліджувався в роботі [5]. Зауважимо, що функція u_0 є апріорною інформацією про розв'язок задачі (1)–(3). Число ε характеризує допустиме відхилення шуканого розв'язку u^ε від функції u_0, а число q — гладкість розв'язку.

Дослідимо коректність задачі (1)–(3) та побудуємо (у випадку існування) її розв'язок.

Нехай $\lambda_1(k),\ \ldots,\lambda_{p(k)}(k)$ — всі різні корені характеристичного рівняння $L(\lambda,k)=0$ кратностей $n_1(k),\ldots,n_{p(k)}(k)$, тобто $L(\lambda,k)=\prod_{i=1}^{p(k)}\big(\lambda-\lambda_i(k)\big)^{n_i(k)}$, $k\in\mathbb{Z}^p$; оператор $E(t,D)$ визначається вектор-функцією

$$E(t,k)=\big(e^{\lambda_1(k)t},te^{\lambda_1(k)t},\ldots,t^{n_1(k)-1}e^{\lambda_1(k)t},e^{\lambda_2(k)t},te^{\lambda_2(k)t},\ldots,t^{n_2(k)-1}e^{\lambda_2(k)t},\ldots,\\ e^{\lambda_{p(k)}(k)t},te^{\lambda_{p(k)}(k)t},\ldots,t^{n_{p(k)}(k)-1}e^{\lambda_{p(k)}(k)t}\big),\quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Тоді довільний розв'язок $u(t,x)$ рівняння (1) і його похідні зображаються у наступному вигляді

$$\partial^\alpha u(t,x)/\partial t^\alpha=E^{(\alpha)}(t,D)C(x),\ \alpha=0,1,\ldots,n, \tag{4}$$

де $C(x)=\mathrm{col}(C_1(x),\ldots,C_n(x))$, $C_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ — періодичні функції. Позначимо тепер через $l\{C\}$ нев'язку $l(u)$, а через $\mathcal{U}\{C\}$ квадрат норми $\|u-u_0\|_{q,n}^2$ для розв'язку (4). Тоді для цього розв'язку

$$l\{C\}=\big(B_1(D)C,C\big)_0-2\mathrm{Re}\,\big(b_1,C\big)_0+l\{0\}, \tag{5}$$

$$\mathcal{U}\{C\}=\big(B_2(D)C,C\big)_0-2\mathrm{Re}\,\big(b_2,C\big)_0+\mathcal{U}\{0\}, \tag{6}$$

де

$$B_1(D)=\sum_{\alpha=0}^{n-1}\widetilde{D}^{2(q-\alpha-1)}l_\alpha E^H(\cdot,D)l_\alpha E(\cdot,D),\quad B_2(D)=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{\alpha=0}^{n}\widetilde{D}^{2(q-\alpha)}E^{(\alpha)H}(\tau,D)\times\\ \times E^{(\alpha)}(\tau,D)\,d\tau,\quad b_1(x)=\sum_{\alpha=0}^{n-1}\widetilde{D}^{2(q-\alpha-1)}l_\alpha E^H(\cdot,D)\varphi_\alpha(x),$$

$$b_2(x)=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{\alpha=0}^{n}\widetilde{D}^{2(q-\alpha)}E^{(\alpha)H}(\tau,D)\frac{\partial^\alpha u_0(\tau,x)}{\partial\tau^\alpha}\,d\tau,$$

$\mathrm{Re}\,z$ — дійсна частина z, E^H — ермітово-спряжена матриця до матриці E $(E^H=\overline{E^T}=(\overline{E})^T)$, $l\{0\}=\sum_{j=0}^{n-1}||\varphi_j||_{q-j-1}^2$, $\mathcal{U}\{0\}=||u_0||_{q,n}^2$, $l_\alpha E(\cdot,D)=\nu E^{(\alpha)}(0,D)+\mu E^{(\alpha)}(T,D)$.

Квадратні, розміру n, ермітові матриці $B_1(D)$ і $B_2(D)$ відповідно невід'ємно і додатньо визначені, оскільки $\big(B_1(D)C,C\big)_0=\sum_{j=0}^{n-1}||l_ju||_{q-j-1}^2\geq 0$, $\big(B_2(D)C,C\big)_0=||u||_{q,n}^2\geq 0$, при цьому остання нерівність стає рівністю тільки при $u=0$, тобто при $C=0$. Для матриць $a(D)$ і $b(D)$ введемо відношення порядку $a(D)\geq b(D)$

та $a(D) > b(D)$, якщо матриця $a(D) - b(D)$ відповідно невід'ємно або додатньо визначена.

Отже, розв'язок задачі (1)–(3) має вигляд $u^\varepsilon = E(t,D)C_\varepsilon(x)$, де вектор-функція C_ε — розв'язок задачі $l\{C_\varepsilon\} = \inf\Big\{l\{C\}\big|E(t,D)C \in \mathbf{H}_q^n,\ \mathcal{U}\{C\} \le \varepsilon\Big\}$.

Ця задача є задачею мінімізації в соболєвському просторі. Відомо, що вона опукла і при $\varepsilon > \varepsilon_0$, де ε_0 визначається нижче, справджує умову Слейтера [4]. Запишемо для задачі функцію Лаґранжа $\mathcal{L}_\omega\{C\} = l\{C\} + \omega\big(\mathcal{U}\{C\} - \varepsilon\big)$, де $\omega \ge 0$ — множник Лаґранжа, і знайдемо сідлову точку цієї функції [4]:

$$\mathcal{L}_\omega\{C\} = \big(B(\omega,D)C,C\big)_0 - 2\mathrm{Re}\,\big(b(\omega,\cdot),C\big)_0 + l\{0\} + \omega\big(\mathcal{U}\{0\} - \varepsilon\big). \tag{7}$$

Тут, згідно з рівностями (5) і (6), $B(\omega,D) = B_1(D) + \omega B_2(D)$, $b(\omega,x) = b_1(x) + \omega b_2(x)$.

Умови, що визначають $C_\varepsilon(x)$, дає теорема Куна-Такера [4]. Вони мають наступний вигляд: знайти таку вектор-функцію $C(x)$ і дійсне число $\omega \ge 0$, для яких

$$\mathcal{L}_\omega\{C\} \sim \min_C,\ E(t,D)C \in \mathbf{H}_q^n,\ \omega \ge 0, \tag{8}$$

$$\omega\big(\mathcal{U}\{C\} - \varepsilon\big) = 0,\ \mathcal{U}\{C\} \le \varepsilon. \tag{9}$$

Розв'яжемо задачу (8).

Лема 1. *Для $\omega > 0$ функція $\mathcal{L}_\omega\{C\}$ досягає мінімального значення*

$$\mathcal{L}_{\omega,\min} \le \sum_{\alpha=0}^{n-1} \|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1} + \omega\big(\|u_0\|^2_{q,n} - \varepsilon\big)$$

при

$$C(x) = C(\omega,x) = B^{-1}(\omega,D)b(\omega,x). \tag{10}$$

Доведення. Мінімізуємо функцію Лаґранжа $\mathcal{L}_\omega\{C\}$, зобразивши її у вигляді

$$\mathcal{L}_\omega\{C\} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\} - \omega\varepsilon, \quad \widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}||l_\alpha\widehat{u}(t,k) - \widehat{\varphi}_\alpha(k)||^2 +$$
$$+\omega\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}||\widehat{u}^{(\alpha)}(t,k) - \widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)||^2 dt/T,$$

де $\widehat{u}(t,k) = E(t,k)\widehat{C}_k$, $\widehat{u}_0(t,k)$, $\widehat{\varphi}_\alpha(k)$, $\widehat{C}_k$ — коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $u(t,x)$, $u_0(t,x)$, $\varphi_\alpha(x)$, $C(x)$ відповідно, $||\cdot||$ — евклідова норма векторів. Використовуючи для $\omega > 0$ формулу виділення повного квадрату $(BC,C)_0 - 2\mathrm{Re}\,(b,C)_0 = (B(C - B^{-1}b), C - B^{-1}b)_0 - (B^{-1}b,b)_0$, з формули (7) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ маємо

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}\big(\|l_\alpha(\widehat{u}(t,k) - \widehat{u}_\omega(t,k))\|^2 + \|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 - \|l_\alpha u_\omega(t,k)\|^2\big)$$
$$+\frac{\omega}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\big(\|\widehat{u}^{(\alpha)}(t,k) - \widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t,k)\|^2 + \|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2 - \|\widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t,k)\|^2\big)dt,$$

де

$$\widehat{u}_\omega(t,k) = E(t,k)\widehat{C}(\omega,k), \quad u_\omega \equiv u_\omega(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{u}_\omega(t,k)e^{ikx} = E(t,D)C(\omega,x). \tag{11}$$

Функція $\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k}\{\widehat{C}_k\}$ досягає при $\widehat{u}(t,k) = \widehat{u}_\omega(t,k)$ (тобто при $\widehat{C}_k = \widehat{C}(\omega,k)$) мінімального значення

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}\big(\|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 - \|l_\alpha u_\omega(t,k)\|^2\big) + \\ + \frac{\omega}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\big(\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2 - \|\widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t,k)\|^2\big)dt,$$

для якого негайно отримуємо наступну оцінку зверху

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min} \le \sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}\|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 + \frac{\omega}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2 dt.$$

Підсумуємо ці нерівності на множині $\mathbb{Z}^p$. Отримаємо, що функція $\mathcal{L}_\omega\{C\}$ має мінімальне значення $\mathcal{L}_{\omega,\min} = \sum\limits_{\alpha=0}^{n-1} \|l_\alpha u_\omega - \varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1} + \omega\big(\|u_\omega - u_0\|^2_{q,n} - \varepsilon\big) \le \sum\limits_{\alpha=0}^{n-1} \|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1} + \omega\big(\|u_0\|^2_{q,n} - \varepsilon\big) < \infty$ при $u = u_\omega$, тобто при $C(x) = C(\omega,x)$.

Покажемо, що $u_\omega \in \mathbf{H}^n_q$ і $l_j u_\omega \in \mathbf{H}_{q-j-1}$ $(j = \overline{0,n-1})$. Справді, оскільки

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t,k)\|^2 dt \le \frac{2}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\big(\|\widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t,k) - \widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2 + \\ + \|\widehat{u}_0(t,k)\|^2\big)dt \le \frac{2}{\omega}\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min} + \frac{2}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2\big)dt \le \\ \le \frac{2}{\omega}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}\|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 + \frac{4}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2 dt,$$

то ряд $||u_\omega||^2_{q,n} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \int_0^T \sum\limits_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_\omega^{(\alpha)}(t,k)\|^2 dt/T$ мажорується сумою двох збіжних рядів

$$\frac{2}{\omega}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}\|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 = \frac{2}{\omega}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1}$$

та

$$\frac{4}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2 dt = 4||u_0||^2_{q,n}.$$

Отже, $u_\omega \in \mathbf{H}_q^n$. Подібно

$$\widetilde{k}^{2(q-j-1)}\|l_j\widehat{u}_\omega(t,k)\|^2 \le 2\widetilde{k}^{2(q-j-1)}\big(\|l_j\widehat{u}_\omega(t,k)-\widehat{\varphi}_j(k)\|^2+\|\widehat{\varphi}_j(k)\|^2\big) \le 2\widehat{\mathcal{L}}_{\omega k,\min}+$$

$$+2\widetilde{k}^{2(q-j-1)}\|\widehat{\varphi}_j(k)\|^2 \le 4\sum_{\alpha=0}^{n-1}\widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}\|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2+\frac{2\omega}{T}\int_0^T\sum_{\alpha=0}^{n}\widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2dt,$$

тобто ряд $\|l_ju_\omega\|^2_{q-j-1} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2(q-j-1)}\|l_j\widehat{u}_\omega(t,k)\|^2$ мажорується сумою двох збіжних рядів

$$4\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\widetilde{k}^{2(q-\alpha-1)}\|\widehat{\varphi}_\alpha(k)\|^2 = 4\sum_{\alpha=0}^{n-1}\|\varphi_\alpha\|^2_{q-\alpha-1}$$

та

$$\frac{2\omega}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\int_0^T\sum_{\alpha=0}^{n}\widetilde{k}^{2(q-\alpha)}\|\widehat{u}_0^{(\alpha)}(t,k)\|^2dt = 2\omega||u_0||^2_{q,n},$$

а тому $l_ju_\omega \in \mathbf{H}_{q-j-1}$ $(j=\overline{0,n-1})$.

Лему доведено і задачу (8) розв'язано.

Виберемо тепер множник Лаєранжа $\omega \ge 0$ таким, щоб справджувалися умови (9). Для цього дослідимо поведінку функції $\mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}\{C(\omega,x)\}$ на півосі $\omega > 0$.

Введемо позначення:

$$\psi_\alpha(x) = \widetilde{D}^{q-\alpha-1}(\varphi_\alpha(x) - l_\alpha Pu_0),\ \psi(x) = \mathrm{col}(\psi_0(x),\psi_1(x),\dots,\psi_{n-1}(x)),$$

$$\varphi(x) = \mathrm{col}(\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_{n-1}(x)),\ Z = \mathrm{diag}(\widetilde{D}^{q-1},\widetilde{D}^{q-2},\dots,\widetilde{D}^{q-n}),$$

$$Pu = \frac{1}{T}\int_0^T\sum_{\alpha=0}^{n}E(t,D)B_2^{-1}(D)E^{(\alpha)H}(\tau,D)\widetilde{D}^{2(q-\alpha)}\frac{\partial^\alpha u(\tau,x)}{\partial\tau^\alpha}\,d\tau,$$

$$f_\alpha(D){=}\widetilde{D}^{q-\alpha-1}l_\alpha E(\cdot,D)B_2^{-1/2}(D),\ F(D){=}\mathrm{col}\big(f_0(D),f_1(D),\dots,f_{n-1}(D)\big),$$

$$F(\omega,D) = \sum_{\alpha=0}^{n-1}f_\alpha^H(D)f_\alpha(D)+\omega I_n = F^H(D)F(D)+\omega I_n.$$

Лема 2. *Функція $\mathcal{U}_\omega$ невід'ємна на півосі $\omega > 0$, строго монотонно спадає (за винятком випадку $\psi_\alpha = 0$ $(\alpha=\overline{0,n-1})$, коли $\mathcal{U}_\omega$ не залежить від ω) і задовольняє нерівності $\varepsilon_0 \le \mathcal{U}_\omega \le \varepsilon_1$, при цьому $\varepsilon_0 \ge 0$ і $\varepsilon_1 \le \infty$ визначаються рівностями*

$$\varepsilon_0 = \lim_{\omega\to+\infty}\mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}_{+\infty} = \|(I-P)u_0\|^2_{q,n}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_1 = \lim_{\omega\to+0}\mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}_{+0} = \|g_0\|^2_{q,n}+\varepsilon_0, \tag{13}$$

де

$$g_0 = E(t,D)B_2^{-1/2}(D)F^+(D)\psi(x), \tag{14}$$

$F^+(D)$ — псевдообернена матриця до матриці $F(D)$ [6, 4].

Доведення. Із формули (11) випливає, що для функції $g_\omega = u_\omega - Pu_0$ справедливе наступне зображення:

$$g_\omega = E(t,D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega,D)F^H(D)\psi(x). \tag{15}$$

Оператор P є проектором в просторі $\mathbf{H}_q^n$ на підпростір розв'язків рівняння (1). Справді, $P^2 = P$ і Pu є розв'язком рівняння (1), а також P — самоспряжений оператор, оскільки

$$(u,Pv)_{q,n} = (Pu,v)_{q,n} = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\sum_{\alpha,\beta=0}^{n}\Bigg(E^{(\alpha)H}(t,D)\widetilde{D}^{2(q-\alpha)}\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha},$$
$$B_2^{-1}(D)E^{(\beta)H}(\tau,D)\widetilde{D}^{2(q-\beta)}\frac{\partial^\beta v(\tau,x)}{\partial\tau^\beta}\Bigg)_0\,dt\,d\tau.$$

Отже, оператор $I-P$ є проектором на ортогональне доповнення підпростору розв'язків рівняння (1), звідки маємо

$$\mathcal{U}_\omega = ||u_\omega - u_0||_{q,n}^2 = ||g_\omega||_{q,n}^2 + ||(I-P)u_0||_{q,n}^2 = ||g_\omega||_{q,n}^2 + \varepsilon_0. \tag{16}$$

При $\varphi_\alpha(x) = l_\alpha Pu_0$ ($\alpha = \overline{0,n-1}$), тобто $\psi_\alpha = 0$, функція $g_\omega = 0$ для всіх $\omega > 0$ і $u_\omega = Pu_0$ та $\mathcal{U}_\omega = ||(I-P)u_0||_{q,n}^2 = \varepsilon_0$ не залежать від ω. В протилежному випадку ($\psi_\alpha \neq 0$) із (15) та нерівності $F^{-1}(\omega_2,D) < F^{-1}(\omega_1,D)$ при $\omega_2 > \omega_1$ випливає, що $||g_{\omega_2}||_{q,n}^2 < ||g_{\omega_1}||_{q,n}^2$, або $\mathcal{U}_{\omega_2} < \mathcal{U}_{\omega_1}$. Монотонність функції $\mathcal{U}_\omega$ доведена.

Оскільки $||g_\omega||_{q,n}^2 < \omega^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha - l_\alpha Pu_0||_{q-\alpha-1}^2 \to 0$ ($\omega\to+\infty$), то $g_\omega \to 0$ при $\omega\to+\infty$. Тепер із формули (16) отримуємо (12).

При $\omega\to+0$, за означенням псевдооберненого оператора [4], маємо

$$F^{-1}(\omega,D)F^H(D) \to F^+(D),$$

тобто $g_\omega \to g_0$, $u_\omega \to g_0 + Pu_0$, що дає формули (13), (14). При цьому $||g_0||_{q,n}$ може бути скінченною або нескінченною в залежності від функцій $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha = \overline{0,n-1}$).

Лему доведено.

З лем 1 і 2 випливає, що не для всіх значень $\varepsilon > 0$ і $u_0 \in \mathbf{H}_q^n$ справджуються умови (9), тобто не завжди існує розв'язок задачі (1)–(3). Ці дані повинні бути пов'язані між собою залежністю, що забезпечує виконання умови Слейтера. Зокрема, при фіксованій функції $u_0 \in \mathbf{H}_q^n$ розв'язок задачі (1)–(3) існує, а u_0-нормальний розв'язок єдиний, тільки для досить великих ε.

Для формулюваня і доведення теореми існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(3) запишемо формули:

$$u^{\varepsilon_0} = Pu_0,\ u^\varepsilon = Pu_0 + g_{\omega_\varepsilon},\ u^{\varepsilon_1} = Pu_0 + g_0, \tag{17}$$

$$||u^{\varepsilon_0} - u_0||_{q,n}^2 = \varepsilon_0,\ ||u^\varepsilon - u_0||_{q,n}^2 = \varepsilon_0 + ||g_{\omega_\varepsilon}||_{q,n}^2 = \varepsilon,\ ||u^{\varepsilon_1} - u_0||_{q,n}^2 = \varepsilon_1, \tag{18}$$

$$l(u^\varepsilon)=\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\|\varphi_j\|^2_{q-j-1}-\|l_ju^+\|^2_{q-j-1}\Big)+\sum_{j=0}^{n-1}\begin{cases}\|l_ju_1\|^2_{q-j-1}, & \text{при } \varepsilon=\varepsilon_0,\\ \omega_\varepsilon^2\|l_ju_{1\varepsilon}\|^2_{q-j-1}, & \text{при } \varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_1,\\ 0, & \text{при } \varepsilon=\varepsilon_1,\end{cases} \tag{19}$$

$u^+=E(t,D)B_2^{-1/2}(D)F^+(D)Z\varphi(x)$, $\quad u_1=E(t,D)B_2^{-1/2}(D)\big(B_2^{-1/2}(D)b_2(x)-F^+(D)Z\varphi(x)\big)$, $\quad u_{1\varepsilon}=E(t,D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega_\varepsilon,D)\big(B_2^{-1/2}(D)b_2(x)-F^+(D)Z\varphi(x)\big)$.

Теорема 1. *Якщо $\varepsilon<\varepsilon_0$, то задача (1)–(3) не має розв'язку. Якщо $\varepsilon_0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$, то розв'язок u^ε задачі (1)–(3) існує, єдиний і має вигляд (17), при цьому справедливі рівності (18), (19), де ω_ε — розв'язок алгебраїчного рівняння $\mathcal{U}_\omega=\varepsilon$. Якщо $\varepsilon>\varepsilon_1$, то задача (1)–(3) має розв'язки*

$$u^\varepsilon=u^{\varepsilon_1}+v, \tag{20}$$

де v ($||v||^2_{q,n}\le\varepsilon-\varepsilon_1$) — розв'язок однорідної задачі (1),(2), тобто задачі $L(\partial/\partial t,D)v=0$, $l_\alpha v=0$ ($\alpha=\overline{0,n-1}$). Серед розв'язків (20) існує єдиний u_0-нормальний розв'язок $u^\varepsilon=u^{\varepsilon_1}$, $||u^\varepsilon||^2_{q,n}=\varepsilon_1$. Якщо оператор $F(D)$ має обернений, то розв'язок u^ε задачі (1)–(3) — єдиний, є розв'язком задачі (1),(2) і має вигляд

$$u^\varepsilon=E(t,D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(D)Z\varphi(x),\ ||u^\varepsilon||^2_{q,n}=\varepsilon_1. \tag{21}$$

Зауваження 1. Розв'язки однорідної задачі (1), (2) мають вигляд

$$v=E(t,D)B_2^{-1/2}(D)\big(I-F^+(D)F(D)\big)q(x),$$

де $q(x)$ — довільні періодичні вектор-функції.

Доведення. Нехай $\varepsilon<\varepsilon_0=||(I-P)u_0||^2_{q,n}$, тоді жоден елемент із кулі $||u-u_0||^2_{q,n}\le\varepsilon$ не є розв'язком рівняння (1), оскільки оператор P є проектором в просторі $\mathbf{H}_q^n$ на підпростір розв'язків рівняння (1) і розмір кулі $\sqrt{\varepsilon}$ — менший ніж віддаль $||(I-P)u_0||_{q,n}$ до цього простору елемента u_0. Задача (1)–(3) розв'язків не має.

Нехай $\varepsilon_0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$, тоді рівняння $\mathcal{U}_\omega=\varepsilon$ має згідно з лемою 2 єдиний розв'язок ω_ε, такий, що $\omega_\varepsilon=0$ при $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\omega_\varepsilon=+\infty$ при $\varepsilon=\varepsilon_0$; $0<\omega_\varepsilon<+\infty$ при $\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_1$ і $u^\varepsilon=Pu_0+g_{\omega_\varepsilon}$, де g_ω визначається формулою (15), $g_\omega\to 0$ при $\omega\to+\infty$, $g_\omega\to g_0$ при $\omega\to+0$. Звідси випливають формули (17).

Оскільки $u^\varepsilon-u_0=g_{\omega_\varepsilon}+(P-I)u_0$ і доданки ортогональні в просторі $\mathbf{H}_q^n$, то з формул (12), (13) отримаємо рівності (18). Безпосередньо перевіряється справедливість наступної рівності:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\|l_ju-\varphi_j\|^2_{q-j-1}=\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\|l_j(u-u^+)\|^2_{q-j-1}+\|\varphi_j\|^2_{q-j-1}-\|l_ju^+\|^2_{q-j-1}\Big).$$

Підставимо в цю рівність функцію $u=u^\varepsilon$. Отримаємо формулу (19), оскільки $u^{\varepsilon_0}-u^+=u_1$, $u^\varepsilon-u^+=\omega_\varepsilon u_{1\varepsilon}$ і $l_j(u^{\varepsilon_1}-u^+)=0$ ($j=\overline{0,n-1}$).

Нехай тепер $\varepsilon>\varepsilon_1$, тоді рівняння $U_\omega=\varepsilon$ не має розв'язку. Умови (9) виконуються тільки при $\omega=0$, тобто треба розв'язати задачу мінімізації $l(u)$ в просторі $\mathbf{H}_q^n$.

Враховуючи, що $F(D)(I - F^+(D)F(D)) = (I - F(D)F^+(D))F(D) = 0$, отримуємо оцінку знизу функціоналу

$$l\{C\} = ||F(D)B_2^{1/2}(D)C(x) - Z\varphi(x)||_0^2 = ||F(D)B_2^{1/2}(D)(C(x) - B_2^{-1/2}(D)F^+(D)Z\varphi(x))$$
$$+(F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2 = ||F(D)B_2^{1/2}(D)(C(x) - B_2^{-1/2}(D)F^+(D)Z\varphi(x))||_0^2 +$$
$$+||(F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2 \geq ||(F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2$$

та рівності $\operatorname{col}(l_0 v, \dots, l_{n-1} v) = Z^{-1}F(D)(I - F^+(D)F(D))q(x) = 0$,

$$\operatorname{col}(l_0 g_0 + l_0 P u_0, \dots, l_{n-1} g_0 + l_{n-1} P u_0) =$$
$$= Z^{-1}F(D)F^+(D)Z\varphi(x) + Z^{-1}(I - F(D)F^+(D))F(D)B_2^{-1/2}(D)\times$$
$$\times \int_0^T \sum_{\alpha=0}^n E^{(\alpha)H}(\tau, D)\widetilde{D}^{2(q-\alpha)} \frac{\partial^\alpha u(\tau, x)}{T\partial\tau^\alpha}\, d\tau = Z^{-1}F(D)F^+(D)Z\varphi(x).$$

Звідси маємо, що функції $u^\varepsilon = g_0 + Pu_0 + v$ мінімізують функціонал $l(u)$, оскільки $l(u^\varepsilon)$ досягає мінімального значення $l(u^\varepsilon) = ||Z\big(\operatorname{col}(l_0 g_0 + l_0 P u_0, \dots, l_{n-1} g_0 + l_{n-1} P u_0) + \operatorname{col}(l_0 v, \dots, l_{n-1} v)\big) - \varphi(x)||_0^2 = ||(F(D)F^+(D) - I)Z\varphi(x)||_0^2$, і $||u^\varepsilon - u_0||_{q,n}^2 = ||u^{\varepsilon_1} - u_0 + v||_{q,n}^2 = \varepsilon_1 + ||v||_{q,n}^2$. При $v = 0$ норма $||u^\varepsilon - u_0||_{q,n}^2$ досягає єдиного мінімуму ε_1, а отже $u = u^{\varepsilon_1}$ — єдиний u_0-нормальний розв'язок. При $||v||_{q,n}^2 \leq \varepsilon - \varepsilon_1$ отримаємо, що $||u^\varepsilon - u_0||_{q,n}^2 \leq \varepsilon$.

Якщо $\varepsilon \geq \varepsilon_1$, й існує обернена матриця $F^{-1}(D)$, то, очевидно, псевдообернена й обернена матриці до матриці $F(D)$ збігаються, а отже функції v в (20) дорівнюють нулеві. Тому розв'язок u^ε задачі (1)–(3) — єдиний, зображається формулою (21) і є звичайним розв'язком задачі (1), (2), оскільки $l(u^\varepsilon) = 0$.

Теорему доведено.

Отже, розв'язок задачі (1)–(3) в кулі радіуса $\sqrt{\varepsilon}$ простору $\mathbf{H}_q^n$ з центром u_0 існує і єдиний, якщо $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$; u_0-нормальний розв'язок існує і єдиний при $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Дослідимо тепер неперервну залежність розв'язку u^ε від правих частин $\varphi_\alpha(x)$
$(\alpha = \overline{0, n-1})$ умов (2).

Теорема 2. *Нехай $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$. Тоді розв'язок u^ε задачі (1)–(3) неперервно залежить від правих частин умов (2).*

Доведення. Нехай u^ε, u_*^ε — розв'язки задачі (1)–(3) з правими частинами $\varphi_\alpha(x)$ і $\varphi_{*\alpha}(x)$ $(\alpha = \overline{0, n-1})$, ω_ε і $\omega_{*\varepsilon}$ — відповідні множники Лаґранжа, $\psi_{*\alpha}(x) = \widetilde{D}^{q-\alpha-1}(\varphi_{*\alpha}(x) - l_\alpha P u_0)$. Нехай $g_{*\omega}$ визначається формулою (15), в якій функція $\psi_\alpha(x)$ замінена на функцію $\psi_{*\alpha}(x)$ і

$$v_\omega = g_\omega - g_{*\omega} = E(t, D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega, D)F^H(D)Z(\varphi(x) - f_*(x)), \qquad (22)$$

де $\varphi_*(x) = \operatorname{col}(\varphi_{*0}(x), \dots, \varphi_{*n-1}(x))$. За тотожністю Гільберта для резольвент отримаємо:

$$g_{*\omega} - g_{*\omega_*} = (\omega_* - \omega)g_{\omega,\omega_*}, \qquad (23)$$

де

$$g_{\omega,\omega_*} = E(t,D)B_2^{-1/2}(D)F^{-1}(\omega,D)F^{-1}(\omega_*,D)F^H(D)\psi_*(x),$$
$$\psi_*(x) = \mathrm{col}(\psi_{*0}(x)\psi_{*1}(x),\ldots,\psi_{*n-1}(x)).$$

Справедливі [4] такі оцінки:

$$||v_\omega||^2_{q,n} < \omega^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha-\varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1},\ ||g_{\omega,\omega_*}||_{q,n} < \omega^{-1}||g_{*\omega_*}||_{q,n}. \qquad (24)$$

Нехай $\overline{\omega} = \omega_\varepsilon + \widetilde{\omega}$, $\underline{\omega} = \omega_\varepsilon - \widetilde{\omega}$, $\delta > 0$ — довільне достатньо мале число,

$$\widetilde{\omega} = \frac{\omega_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0}}\frac{\delta}{2}, \qquad (25)$$

тоді $\overline{\varepsilon} \equiv ||u_{\underline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} > \varepsilon$ і $\underline{\varepsilon} \equiv ||u_{\overline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} < \varepsilon$. Обчислимо норму

$$||u_{*\underline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} = ||g_{*\underline{\omega}}||^2_{q,n} + \varepsilon_0 = ||g_{\underline{\omega}} - v_{\underline{\omega}}||^2_{q,n} + \varepsilon_0 \geq$$
$$\geq \big(||g_{\underline{\omega}}||_{q,n} - ||v_{\underline{\omega}}||_{q,n}\big)^2 + \varepsilon_0 > \Big(\sqrt{\overline{\varepsilon}-\varepsilon_0} - \big(\underline{\omega}^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha-\varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1}\big)^{1/2}\Big)^2 + \varepsilon_0,$$

і норму

$$||u_{*\overline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} = ||g_{*\overline{\omega}}||^2_{q,n} + \varepsilon_0 = \big(||g_{\overline{\omega}}||_{q,n} + ||v_{\overline{\omega}}||_{q,n}\big)^2 + \varepsilon_0 <$$
$$< \Big(\sqrt{\underline{\varepsilon}-\varepsilon_0} + \big(\overline{\omega}^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha-\varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1}\big)^{1/2}\Big)^2 + \varepsilon_0.$$

Виберемо функції $\varphi_{*\alpha}(x)$ так, щоб виконувалась нерівність

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha-\varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1} \leq \min\big(\underline{\omega}(\sqrt{\overline{\varepsilon}-\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0})^2, \overline{\omega}(\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0}-\sqrt{\underline{\varepsilon}-\varepsilon_0})^2, \omega_\varepsilon\delta^2/4\big), \qquad (26)$$

тоді $||u_{*\overline{\omega}} - u_0||^2_{q,n} < \varepsilon < ||u_{*\underline{\omega}} - u_0||^2_{q,n}$, а розв'язок u^ε_* при таких $\varphi_{*\alpha}$ існує, єдиний і $u^\varepsilon_* = u_{*\omega_{*\varepsilon}}$, де $\underline{\omega} < \omega_{*\varepsilon} < \overline{\omega}$, тобто $|\omega_{*\varepsilon} - \omega_\varepsilon| < \widetilde{\omega}$.

Оцінимо норму різниці розв'язків u^ε і u^ε_*, використовуючи формули (16), (22)–(24):

$$||u^\varepsilon - u^\varepsilon_*||_{q,n} = ||g_{\omega_\varepsilon} - g_{*\omega_{*\varepsilon}}||_{q,n} \leq ||v_{\omega_\varepsilon}||_{q,n} + ||g_{*\omega_\varepsilon} - g_{*\omega_{*\varepsilon}}||_{q,n} <$$
$$< \big(\omega_\varepsilon^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha-\varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1}\big)^{1/2} + \omega_\varepsilon^{-1}|\omega_{*\varepsilon}-\omega_\varepsilon|\cdot||g_{*\omega_{*\varepsilon}}||_{q,n} <$$
$$< \big(\omega_\varepsilon^{-1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}||\varphi_\alpha-\varphi_{*\alpha}||^2_{q-\alpha-1}\big)^{1/2} + \widetilde{\omega}\omega_\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0}.$$

Враховуючи (25), (26), одержимо $||u^\varepsilon - u_*^\varepsilon||_{q,n} < \sqrt{\omega_\varepsilon^{-1}\frac{\omega_\varepsilon \delta^2}{4} + \frac{\omega_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0}}\frac{\delta}{2}\omega_\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0}} = \delta$.

Отже, для довільного числа $\delta > 0$ з того, що функції $(\varphi_\alpha - \varphi_{*\alpha})$ задовольняють умову (26), випливає, що розв'язки u^ε і u_*^ε відповідних задач відрізняються між собою в просторі $\mathbf{H}_q^n$ не більше ніж на δ, що і треба було довести.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ільків В.С., Пташник Б.Й. *Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними* Укр. мат. журн. – 1996. – Т.48, 2. – С.184–194.
2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук.думка, 1984. – 264 с.
3. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
4. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высш. шк., 1989. – 351 с.
5. Ільків В.С. Дослідження нелокальної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними методом мінімізації в соболівських просторах. – Матем. та психологія у педагогічній системі. Технічн. університет. – Одеса, 1996. – Ч.1. – С.43–45.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления.– М.: Наука, 1984. – 320 с.

Державний університет "Львівська політехніка".

Надійшло 19.09.1997
Після переробки 15.05.1998 та 26.02.1999