УДК 517.53

ПРО ОДНУ ХАРАКТЕРИСТИКУ ρ-ОПУКЛИХ ОБЛАСТЕЙ

Т.І. Звоздецький

T.I. Zvozdetskyi. *On a characteristic of the ϱ-convex domains*, Matematychni Studii, **11**(1999) 153–158.

A convex domain of the complex plain is defined as a domain containing all segments connecting arbitrary two points of this domain. We obtain a characteristic of the ϱ-convex ($\varrho > 0$) domains of the complex plain analogous to this definition of a convex domain.

Т.И. Звоздецкий. *Об одной характеристике ϱ-выпуклых областей* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.153–158.

Выпуклая область комплексной плоскости определяется как область, содержащая все отрезки, соединяющие любые две точки этой плоскости. В работе получена характеристика ϱ-выпуклых ($\varrho > 0$) областей комплексной плоскости, аналогичная этому определению выпуклых областей.

Для опуклої області комплексної площини відомі два рівносильні означення:
1) область називається опуклою, якщо її можна подати у вигляді перетину відкритих опорних півплощин;
2) область є опуклою, якщо вона разом з кожними двома своїми точками містить і відрізок, що сполучає ці точки.

У комплексному аналізі, зокрема в теорії інтегральних перетворень (наприклад, в теорії узагальненого перетворення Бореля цілих функцій скінченного порядку) важливу роль відіграє поняття ρ-опуклої ($\rho > 0$) області (див. [1] та бібліографію в [1]). Якщо $\rho = 1$, то це поняття для області рівносильне звичайній опуклості. Зауважимо, що в математичних дослідженнях із вказаної тематики використовується означення ρ-опуклої області, яке подібне до першого означення опуклої області, але відсутній аналог другого означення. У даній статті доводиться одна характеристика ρ-опуклих областей, яка подібна до другого означення опуклих областей.

Зафіксуємо довільне $\rho > 0$. Наслідуючи [1], для сталих $\theta \in (-\pi; \pi]$ і $\nu > 0$ через $L_\rho(\theta; \nu)$ позначатимемо криву

$$\Big\{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : |\varphi - \theta| \le \min\Big\{\pi, \frac{\pi}{2\rho}\Big\}, r^\rho \cos\rho(\varphi - \theta) = \nu\Big\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30A99.

Очевидно, що крмва $L_\rho(\theta;\nu)$ є замкненою при $\rho<\frac{1}{2}$ і $L_\rho(\theta;\nu)$ — необмежена і лежить всередині кута $\{z=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}:|\varphi-\theta|<\frac{\pi}{2\rho}\}$ при $\rho\geq\frac{1}{2}$.

Крива $L_\rho(\theta;\nu)$ розбиває площину $\mathbb{C}$ на дві відкриті множини. Та з них, яка містить півінтервал $\{z=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}:0\leq r<\nu^{1/\rho}\}$, позначається через $\mathcal{D}^*_\rho(\theta;\nu)$ і називається елементарною ρ-опуклою областю, яка визначається параметрами θ і ν (див. [1], с.147). Інша множина позначається через $\mathcal{D}_\rho(\theta;\nu)$, тобто $\mathcal{D}_\rho(\theta;\nu)=\mathbb{C}\setminus\overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta;\nu)}$.

Обмежена множина вигляду

$$K=\bigcap_{j\in I}\overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j;\nu_j)}, \tag{1}$$

де I — деяка сім'я індексів, називається ρ-опуклим компактом. Область $G\subseteq\mathbb{C}$ називається ρ-опуклою, якщо існує монотонно зростаюча послідовність ρ-опуклих компактів $\{K_n:n\in\mathbb{N}\}$, яка вичерпує G зсередини, тобто $K_n\subset$ $\mathrm{i}nt\,K_{n+1}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n=G$ (див. [2]).

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Лема. *Через довільні дві точки $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ та $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ із $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ($|\varphi_1-\varphi_2|<2\pi$) можна провести деяку криву $L_\rho(\theta;\nu)$ ($\theta\in(-\pi;\pi],\nu>0$) тоді і лише тоді, коли*

$$\min\{|\varphi_1-\varphi_2|,2\pi-|\varphi_1-\varphi_2|\}<\frac{\pi}{\rho},\quad \rho\geq\frac{1}{2}, \tag{2}$$

або

$$\max\Big\{\Big(\frac{r_2}{r_1}\Big)^\rho,\Big(\frac{r_1}{r_2}\Big)^\rho\Big\}\leq\frac{\cos\rho(\pi-|\varphi_1-\varphi_2|)}{\cos\rho\pi},\quad \rho<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Доведення. Нехай через точки z_1 і z_2 можна провести деяку криву $L_\rho(\theta_0;\nu_0)$. Оскільки кожний промінь, що виходить з нуля, перетинає цю криву не більше, ніж в одній точці, то $\varphi_1\neq\varphi_2$. Вважатимемо, що $|\varphi_2-\ \theta_0|<\min\{\pi,\frac{\pi}{2\rho}\}$ і $0<\varphi_2-\varphi_1<2\pi$.

Згідно з означенням кривої $L_\rho(\theta_0;\nu_0)$ система рівнянь відносно змінних θ і ν

$$\begin{cases} r_1^\rho\cos\rho(\varphi_1+2\pi k-\theta)=\nu,\\ r_2^\rho\cos\rho(\varphi_2-\theta)=\nu,\end{cases} \tag{4}$$

має розв'язок $(\theta_0;\nu_0)$ при $k=0$ або при $k=1$.

Нехай $\rho\geq\frac{1}{2}$. Тоді або кут $\varphi_2-\varphi_1$, або кут $(\varphi_1+2\pi)-\varphi_2$ є меншим за $\frac{\pi}{\rho}$ (бо крива $L_\rho(\theta_0;\nu_0)$ міститься повністю всередині кута розхилом $\frac{\pi}{\rho}$). Отже, виконується умова (2).

Нехай $\rho<\frac{1}{2}$. Для $i=1,2$ розглянемо функцію $f_i(\theta)=r_i^\rho\cos\rho(\varphi_i+2\pi k_i-\theta)$, $\theta\in[\varphi_i+2\pi k_i-\pi;\varphi_i+2\pi k_i+\pi]$, де k_1 набуває значень 0 та 1, а $k_2=0$. Оскільки система (4) має розв'язок $(\theta_0;\nu_0)$, то графіки функцій f_1 і f_2 перетинаються в точці $(\theta_0;\nu_0)$. Тому $f_1(\varphi_1+\pi)\leq f_2(\varphi_1+\pi)$ і $f_2(\varphi_2-\pi)\leq f_1(\varphi_2-\pi)$, тобто $r_1^\rho\cos\rho\pi\leq\ r_2^\rho\cos\rho[\pi-(\varphi_2-\varphi_1)]$ і $r_2^\rho\cos\rho\pi\leq r_1^\rho\cos\rho[\pi-(\varphi_2-\varphi_1)]$. Звідси і випливає умова (3).

Тому, якщо через точки z_1 і z_2 можна провести деяку криву $L_\rho(\theta;\nu)$, то виконується умова (2) чи (3).

Припустимо тепер, що для деяких точок $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ $(0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi)$ виконується відповідна умова (2) або (3). Легко переконатися, що тоді графіки введених вище функцій $f_1(\theta)$ і $f_2(\theta)$ перетинаються. А це означає, що існують такі $\theta_0 \in (-\pi; \pi]$ і $\nu_0 > 0$, що $z_1, z_2 \in L_\rho(\theta_0; \nu_0)$. Лему доведено.

Позначатимемо надалі $\min\{\pi, \frac{\pi}{2\rho}\} = \psi$.

Теорема. *Для того щоб зіркова відносно нуля область $G \subset \mathbb{C}$ $(G \neq \mathbb{C})$ була ρ-опуклою, необхідно і досить, щоб виконувались умови:*

1) G є обмеженою при $\rho < \frac{1}{2}$;

2) якщо $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ $(0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\psi)$ — довільні дві точки з $G \setminus \{0\}$, через які можна провести деяку криву $L_\rho(\theta_0; \nu_0)$, то область G містить таку дугу γ кривої $L_\rho(\theta_0; \nu_0)$:

$$\gamma = \{z = re^{i\varphi} \in L_\rho(\theta_0; \nu_0) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}. \tag{5}$$

Доведення. Необхідність. Нехай G – ρ-опукла область в $\mathbb{C}$, причому $G \neq \mathbb{C}$. Перевіримо умову 1). Нехай $\rho < \frac{1}{2}$ і $z_0 \in G \setminus \{0\}$. З означення ρ-опуклої області випливає існування ρ-опуклого компакту K вигляду (1), який містить точку z_0. Тоді $z_0 \in \overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j; \nu_j)}$ для кожного $j \in I$. Звідси отримуємо, що

$$\nu_j \geq |z_0|^\rho \cos\rho(\arg z_0 - \theta_j) \geq |z_0|^\rho \cos\rho\pi, \qquad j \in I. \tag{6}$$

Згідно з означенням елементарної ρ-опуклої області $\mathcal{D}^*_\rho(\theta; \nu)$ маємо $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \nu^{1/\rho}\} \subset \overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta; \nu)}$. Тому з (6) випливає, що

$$K_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_0| \cos^{1/\rho}\rho\pi\} \subset \overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j; \nu_j)}, \qquad j \in I,$$

тобто компакт K містить круг K_{z_0}.

Отже, область G разом з кожною своєю точкою z_0 містить і відповідний круг K_{z_0}. Якби область G була необмеженою, то звідси одержали б, що G містить круг як завгодно великого радіуса, тобто $G = \mathbb{C}$, а це суперечить умові. Тому G є обмеженою областю.

Перейдемо до доведення умови 2). Нехай $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ $(0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\psi)$ — такі точки з $G \setminus \{0\}$, через які можна провести деяку криву $L_\rho(\theta_0; \nu_0)$. Оскільки G вичерпується зсередини ρ-опуклими компактами, то існує такий ρ-опуклий компакт K вигляду (1), який містить точки z_1 і z_2. Доведемо, що цей компакт містить відповідну криву γ (5). Для цього досить довести, що для кожного $j \in I$ крива γ міститься в $\overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j; \nu_j)}$.

Зафіксуємо довільне $j \in I$. Якщо $\theta_j = \theta_0$, то $\gamma \subset \overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j; \nu_j)}$ згідно з означенням елементарної ρ-опуклої області. Тому вважатимемо для визначеності, що $\theta_j < \theta_0$. З'ясуємо, у скількох точках можуть перетинатися криві $L_\rho(\theta_0; \nu_0)$ і $L_\rho(\theta_j; \nu_j)$, тобто знайдемо кількість розв'язків системи

$$\begin{cases} r^\rho \cos\rho(\theta_j + 2\pi k - \varphi) = \nu_j, \\ r^\rho \cos\rho(\theta_0 - \varphi) = \nu_0, \end{cases} \tag{7}$$

де k набуває значень 0 та 1 ($r > 0$, а $\varphi \in [\theta_0 - \psi, \theta_j + \psi]$ при $k = 0$ і $\varphi \in [\theta_j + 2\pi - \psi; \theta_0 + \psi]$ при $k = 1$). Спочатку розглянемо систему (7) при $k = 0$. Зрозуміло, що за умови $\theta_0 - \theta_j \geq \pi/\rho$ ця система розв'язків не має. Тому вважатимемо, що $\theta_0 - \theta_j < \pi/\rho$. Виключивши з (7) змінну r, отримаємо рівняння

$$A\cos\rho\varphi + B\sin\rho\varphi = 0, \tag{8}$$

де $A = \nu_0\cos\rho\theta_j - \nu_j\cos\rho\theta_0$, $B = \nu_0\sin\rho\theta_j - \nu_j\sin\rho\theta_0$. Якщо б $A = B = 0$, то отримали б $\sin\rho(\theta_0 - \theta_j) = 0$, тобто $\theta_0 - \theta_j = \frac{\pi k}{\rho}$, $k \in \mathbb{Z}$, а це суперечить нашому припущенню про те, що $0 < \theta_0 - \theta_j < \frac{\pi}{\rho}$. Отже, $A^2 + B^2 \neq 0$. Припустимо, що $B \neq 0$. Тоді з (8) одержимо $\varphi = -\frac{1}{\rho}\mathrm{arctg}\frac{A}{B} + \frac{\pi k}{\rho}$, $k \in \mathbb{Z}$. Враховуючи, що φ повинно належати до проміжку $[\theta_0 - \psi, \theta_j + \psi]$, отримуємо, що система (7) при $k = 0$ може мати не більше одного розв'язку. Подібно система (7) і при $k = 1$ також може мати не більше одного розв'язку.

Отже, криві $L_\rho(\theta_0;\nu_0)$ і $L_\rho(\theta_j;\nu_j)$ можуть перетинатися не більше, ніж у двох точках. Якщо вони не перетинаються або перетинаються в одній точці, то очевидно, що множина $\overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j;\nu_j)}$ разом з точками z_1 і z_2 містить і відповідну криву γ.

Розглянемо ще випадок, коли $L_\rho(\theta_0;\nu_0)$ і $L_\rho(\theta_j;\nu_j)$ перетинаються у двох точках. Нехай $M = M_0 \cup \tilde{M} \cup M_1$, де для $k = 0, 1$

$$M_k = \{(\varphi, r) : |\theta_j + 2\pi k - \varphi| < \psi, 0 < r^\rho\cos\rho(\theta_j + 2\pi k - \varphi) \leq \nu_j\},$$

а $\tilde{M} = \{(\varphi, r) : \varphi \in [\theta_j + \psi; \theta_j + 2\pi - \psi], r > 0\}$, $\rho \geq \frac{1}{2}$, або $\tilde{M} = \{(\varphi, r) : \varphi = \theta_j + \pi, 0 < r^\rho\cos\rho\pi \leq \nu_j\}$, $\rho < \frac{1}{2}$. Очевидно, що для кожної точки $(\varphi, r) \in M$ відповідна точка $z = re^{i\varphi}$ належить до $\overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j;\nu_j)}$. І навпаки, кожній точці $z \in \overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j;\nu_j)} \setminus \{0\}$ відповідає деяка точка $(\varphi, r) \in M$. Тому нам досить показати, що множина $\gamma_p = \{(\varphi, r) : |\varphi - \theta_0| < \psi, re^{i\varphi} \in \gamma\}$ міститься в M.

Згідно з нашим припущенням, графік функції $g_0(\varphi) = \big(\nu_0/\cos\rho(\theta_0 - \varphi)\big)^{\frac{1}{\rho}}$, $|\theta_0 - \varphi| < \psi$, перетинається з графіком функції $g_1(\varphi) = \big(\nu_j/\cos\rho(\theta_j - \varphi)\big)^{\frac{1}{\rho}}$, $|\theta_j - \varphi| < \psi$, в деякій (єдиній) точці $\lambda_1 e^{i\psi_1}$, і з графіком функції $g_2(\varphi) = \big(\nu_j/\cos\rho(\theta_j + 2\pi - \varphi)\big)^{\frac{1}{\rho}}$, $|\theta_j + 2\pi - \varphi| < \psi$, в деякій (єдиній) точці $\lambda_2 e^{i\psi_2}$ ($\lambda_k > 0, |\psi_k - \theta_0| < \psi, k = 1, 2$). Зрозуміло, що

$$\gamma_m = \{(\varphi, r) : \psi_1 \leq \varphi \leq \psi_2, re^{i\varphi} \in L_\rho(\theta_0;\nu_0)\} = M \cap \gamma_L,$$

де $\gamma_L = \{(\varphi, r) : |\varphi - \theta_0| \leq \psi, re^{i\varphi} \in L_\rho(\theta_0;\nu_0)\}$. Тому $\gamma_p \subset \gamma_m \subset M$ і в цьому випадку $\gamma \subset \overline{\mathcal{D}^*_\rho(\theta_j;\nu_j)}$.

Отже, умова 2) теореми виконується.

Достатність. Припустимо, що для зіркової відносно нуля області $G \subset \mathbb{C}$ ($G \neq \mathbb{C}$) виконуються умови 1)–2) і доведемо ρ-опуклість цієї області.

Нехай $k(\theta) = \sup_{z\in G, |\arg z - \theta| < \psi} |z|^\rho\cos\rho(\arg z - \theta)$, $\theta \in (-\pi;\pi]$. Оскільки $0 \in G$ і G — відкрита множина, то $k(\theta) > 0$ для всіх $\theta \in (-\pi;\pi]$. Позначимо

$$\tilde{G} = \bigcap_{\theta\in(-\pi;\pi]} \mathcal{D}^*_\rho(\theta;k(\theta))$$

(якщо $k(\theta) = +\infty$, то вважатимемо, що $\mathcal{D}^*_\rho(\theta;k(\theta)) = \mathbb{C}$) і переконаємось у справедливості $G = \tilde{G}$.

Включення $G \subset \tilde{G}$ — очевидне. Доведемо, що $\tilde{G} \subset G$, тобто $CG \subset C\tilde{G}$.

Зафіксуємо довільне $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ ($\varphi_0 \in (-\pi;\pi]$) із CG (таке z_0 існує, бо $G \neq \mathbb{C}$). Для кожного $\theta \in (\varphi_0 - \psi; \varphi_0 + \psi)$ позначимо через L_θ криву $L_\rho(\tilde{\theta}; r_0^\rho \cos\rho(\varphi_0 - \theta))$, де $\tilde{\theta} = \theta (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ і $\tilde{\theta} \in (-\pi;\pi]$. Зрозуміло, що $z_0 \in L_\theta$. Тому z_0 розбиває криву L_θ на дві вітки: $L_\theta^{(1)} = \{z \in L_\theta : \theta - \psi < \arg z < \varphi_0\}$; $L_\theta^{(2)} = \{z \in L_\theta : \varphi_0 < \arg z < \theta + \psi\}$.

Розглянемо криву L_{φ_0}. Якщо $L_{\varphi_0} \cap G = \varnothing$, то $G \subset \mathcal{D}_\rho^*(\varphi_0; r_0^\rho)$. Тому $r_0^\rho \geq k(\varphi_0)$, тобто $z_0 \in \mathcal{D}_\rho(\varphi_0; k(\varphi_0))$. Отже, в цьому випадку $z_0 \in C\tilde{G}$. Далі, якщо $L_{\varphi_0}^{(1)} \cap G \neq \varnothing$ і $L_{\varphi_0}^{(2)} \cap G \neq \varnothing$, то за умовою 2) $z_0 \in G$, тобто отримуємо суперечність. Залишилось розглянути випадок, коли одна вітка кривої L_{φ_0} перетинається з G, а інша — ні. Нехай, для визначеності, $L_{\varphi_0}^{(1)} \cap G = \varnothing$, $L_{\varphi_0}^{(2)} \cap G \neq \varnothing$. Позначимо $\Omega = \{\theta \in (\varphi_0 - \psi; \varphi_0) : L_\theta^{(1)} \cap G \neq \varnothing\}$. Покажемо, що $\Omega \neq \varnothing$. Якщо $\rho \geq \frac{1}{2}$, то це випливає з того, що область G містить деякий окіл нуля і вершина кривої L_θ (тобто точка перетину кривої L_θ і променя $\arg z = \theta$) прямує до нуля, коли θ прямує до $\varphi_0 - \frac{\pi}{2\rho}$ (бо $\nu_\theta = r_0^\rho \cos\rho(\varphi_0 - \theta) \to 0$ при $\theta \to \varphi_0 - \frac{\pi}{2\rho}$). Нехай тепер $\rho < \frac{1}{2}$. Позначимо через $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ ($\varphi_0 < \varphi_2 < \varphi_0 + \pi$) точку із $L_{\varphi_0}^{(2)} \cap G$. Оскільки G — зіркова відносно нуля область, то відрізок $[0; z_2]$ міститься в G. Для $\theta \in (\varphi_0 - \pi; \varphi_2 - \pi)$ розглянемо точку

$$z(\theta) = r_0 \left(\frac{\cos\rho(\varphi_0 - \theta)}{\cos\rho(\varphi_2 - 2\pi - \theta)} \right)^{\frac{1}{\rho}} e^{i(\varphi_2 - 2\pi)} \in L_\theta^{(1)}.$$

Враховуючи те, що $z(\theta) \to r_0 \left(\dfrac{\cos\rho\pi}{\cos\rho(\varphi_2 - \pi - \varphi_0)} \right)^{\frac{1}{\rho}} e^{i(\varphi_2 - 2\pi)}$ при $\theta \to \varphi_0 - \pi$ і

$$r_0 \left(\frac{\cos\rho\pi}{\cos\rho(\varphi_2 - \pi - \varphi_0)} \right)^{\frac{1}{\rho}} < \frac{r_0}{[\cos\rho(\varphi_2 - \varphi_0)]^{1/\rho}} = r_2,$$

матимемо, що $z(\theta)$ належить до інтервалу $(0; z_2)$ для всіх досить близьких до $\varphi_0 - \pi$ значень θ. Тому для цих θ одержимо $L_\theta^{(1)} \cap G \neq \varnothing$ і множина Ω є справді непорожньою.

Нехай $\theta_1 \in \Omega$ і $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ($\theta_1 - \psi < \varphi_1 < \varphi_0$) — деяка точка із $L_{\theta_1}^{(1)} \cap G$. Скориставшись зірковістю відносно нуля області G, отримаємо, що $[0; z_1] \subset G$. Для $\theta \in (\varphi_0 - \psi; \theta_1)$ розглянемо точку $z(\theta) = r_0 \left(\dfrac{\cos\rho(\varphi_0 - \theta)}{\cos\rho(\varphi_1 - \theta)} \right)^{\frac{1}{\rho}} e^{i\varphi_1} \in L_\theta^{(1)}$. Оскільки

$$|z(\theta)| = r_0 \left(\frac{\cos\rho(\varphi_0 - \theta_1)\cos\rho(\theta_1 - \theta) - \sin\rho(\varphi_0 - \theta_1)\sin\rho(\theta_1 - \theta)}{\cos\rho(\varphi_1 - \theta_1)\cos\rho(\theta_1 - \theta) - \sin\rho(\varphi_1 - \theta_1)\sin\rho(\theta_1 - \theta)} \right)^{\frac{1}{\rho}} <$$

$$< r_0 \left(\frac{\cos\rho(\varphi_0 - \theta_1)}{\cos\rho(\varphi_1 - \theta_1)} \right)^{\frac{1}{\rho}} = r_1,$$

то $z(\theta) \in (0; z_1)$ для всіх $\theta \in (\varphi_0 - \psi; \theta_1)$.

Отже, якщо $\theta_1 \in \Omega$, то і $(\varphi_0 - \psi; \theta_1) \subset \Omega$, а якщо $\theta_2 \notin \Omega$, то $(\theta_2; \varphi_0) \cap \Omega = \varnothing$.

Покладемо $\theta_0 = \sup \Omega$. Тоді $(\forall \theta, \varphi_0 - \psi < \theta < \theta_0) : L_\theta^{(1)} \cap G \neq \varnothing$, $(\forall \theta, \theta_0 < \theta < \varphi_0) : L_\theta^{(1)} \cap G = \varnothing$.

Нехай $\theta_1 \in (\varphi_0 - \psi; \varphi_0 + \psi)$ і $\varphi_1 \in (\theta_1 - \psi; \theta_1 + \psi)$ — фіксовані числа. Доведемо, що тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке δ, що відстань між точками $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \in L_{\theta_1}$ і $z_2 = r_2 e^{i(\varphi_1+\delta)} \in L_{\theta_1+\delta}$ не перевищує ε.

Справді,

$$|z_1 - z_2|^2 = [r_1 \cos\varphi_1 - r_2 \cos(\varphi_1 + \delta)]^2 + [r_1 \sin\varphi_1 - r_2 \sin(\varphi_1 + \delta)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\delta.$$

Але за умовою маємо $r_1^\rho \cos\rho(\varphi_1 - \theta_1) = r_0^\rho \cos\rho(\varphi_0 - \theta_1)$ і $r_2^\rho \cos\rho(\varphi_1 - \theta_1) = r_0^\rho \times$
$\times \cos\rho(\varphi_0 - \theta_1 - \delta)$. Тому

$$|z_1 - z_2|^2 = \frac{r_0^2}{[\cos\rho(\varphi_1 - \theta_1)]^{\frac{2}{\rho}}} \Big(\cos^{\frac{2}{\rho}} \rho(\varphi_0 - \theta_1) + \cos^{\frac{2}{\rho}} \rho(\varphi_0 - \theta_1 - \delta) -$$
$$- 2\cos\delta \cos^{\frac{1}{\rho}} \rho(\varphi_0 - \theta_1) \cos^{\frac{1}{\rho}} \rho(\varphi_0 - \theta_1 - \delta)\Big).$$

Звідси $|z_1 - z_2| \to 0$ при $\delta \to 0$, що й потрібно було довести.

Покажемо тепер, що $L_{\theta_0}^{(1)} \cap G = \varnothing$. Якби $L_{\theta_0}^{(1)} \cap G \neq \varnothing$, то, згідно з доведеним, отримали б, що існує таке $\delta > 0$, для якого $L_{\theta_0+\delta}^{(1)} \cap G \neq \varnothing$, останнє ж суперечить вибору θ_0. Отже, справді $L_{\theta_0}^{(1)} \cap G = \varnothing$. Подібно встановлюємо рівність $L_{\theta_0}^{(2)} \cap G = \varnothing$. Справді, якщо $L_{\theta_0}^{(2)} \cap G \neq \varnothing$, то існує $\delta > 0$, для якого $L_{\theta_0-\delta}^{(2)} \cap G \neq \varnothing$, звідки за означенням числа θ_0 випливає $L_{\theta_0-\delta}^{(1)} \cap G \neq \varnothing$. Тоді за умовою 2) отримуємо $z_0 \in G$. Останнє ж є неможливим. Тому $L_{\theta_0}^{(2)} \cap G = \varnothing$, а отже $z_0 \in C\tilde{G}$.

Підсумовуючи, маємо $CG \subset C\tilde{G}$, тобто $\tilde{G} \subset G$. Отже, $G = \bigcap\limits_{\theta \in (-\pi;\pi]} \mathcal{D}_\rho^*(\theta; k(\theta))$.

Щоб показати тепер ρ-опуклість області G, розглянемо для кожного $\theta \in (-\pi;\pi]$ таку зростаючу послідовність $\{\nu_n^{(\theta)} : n \in \mathbb{N}\}$, що $\nu_n^{(\theta)} \to k(\theta)$ при $n \to \infty$. Тоді

$$G = \bigcap_{\theta \in (-\pi;\pi]} \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{D}_\rho^*(\theta; \nu_n^{(\theta)})} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\theta \in (-\pi;\pi]} \overline{\mathcal{D}_\rho^*(\theta; \nu_n^{(\theta)})} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

де $K_n = \bigcap\limits_{\theta \in (-\pi;\pi]} \overline{\mathcal{D}_\rho^*(\theta; \nu_n^{(\theta)})}$ — ρ-опуклий компакт. Оскільки для кожних $\theta \in (-\pi;\pi]$ і $n \in \mathbb{N}$ маємо $\nu_n^{(\theta)} < \nu_{n+1}^{(\theta)}$, то $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$. Тому G вичерпується зсередини строго зростаючою послідовністю ρ-опуклих компактів. Отже, G є ρ-опуклою областю. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.
2. Епифанов О.В., Ленев А.А. *О разрешимости одного интегрального уравнения в пространствах аналитических функций* Матем. анализ и его приложения: Сб. научн. тр., Ростов-на-Дону, 1974. – Т.6. – С.258–261.

Чернівецький університет, кафедра математичного аналізу,

274012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського 2.

Надійшло 2.04.1998