УДК 512.54

ПРО ГРУПИ З ДЕЯКОЮ СИСТЕМОЮ НІЛЬПОТЕНТНИХ ФАКТОР-ГРУП

О.В. Тураш

O.V. Turash. *On groups with a system of nilpotent quotients*, Matematychni Studii, **11**(1999) 149–152.

We characterize N_cQI-groups with finite subgroups $I(G)$.

О.В. Тураш. *О группах с некоторой системой нильпотентных фактор-групп* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.149–152.

Охарактеризованы N_cQI-группы с конечными подгруппами $I(G)$.

1°. Останнім часом різними авторами вивчалися групи за властивостями деяких систем їх фактор-груп. Так, Н. Ньюмен [1–2] вивчав нескінченні розв'язні групи, всі власні фактор-групи яких абелеві. Д. Макартні [3–4] і Дж. Уілсон [5] досліджували нескінченнні групи, всі власні фактор-групи яких скінченні. Пізніше, Дж. Гровс [6], Д. Робінсон і Дж. Уілсон [7] вивчали групи з поліциклічними (відповідно черніковськими) власними фактор-групами. С. Франціозі і Ф. де Жіовані [8] описали розв'язні групи, всі власні фактор-групи яких нільпотентні (відповідно нільпотентні з обмеженням на клас нільпотентності). Н.В. Калашнікова [9] охарактеризувала локально розв'язні групи з абелевими фактор-групами за власними нескінченними нормальними підгрупами.

Будемо говорити, що нескінченна група G — N_cQI-група, якщо для будь-якої нескінченної нормальної підгрупи H фактор-група G/H нільпотентна класу $\leq c$.

Нехай A — група, L — її нескінченна нормальна підгрупа. Кажуть, що L — G-квазіскінченна, якщо L задовольняє наступні дві умови:

i) будь-яка власна нормальна в A підгрупа L скінченна;

ii) L збігається з об'єднанням всіх своїх власних скінченних нормальних в A підгруп.

Через $I(G)$ позначимо перетин всіх нескінченних нормальних підгруп G.

Якщо G — N_cQI-група з власною нескінченною нормальною підгрупою, то можливі такі три випадки:

1) $I(G)$ — скінченна підгрупа;
2) $I(G)$ — G-квазіскінченна підгрупа;
3) $I(G)$ містить таку скінченну нормальну в G підгрупу B, що $I(G)/B$ — нескінченний G-головний фактор.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20F99, 20E99.

В [10] охарактеризовано черніковські N_cQI-групи.

У даній роботі охарактеризовані N_cQI-групи із скінченною підгрупою $I(G)$.

Всі використані позначення стандартні, і їх можна знайти, наприклад, в [11].

2°. Лема 1. *Нехай група G ненільпотентна або нільпотентна класу $> c$. Якщо G — N_cQI-група, то $I(G) \neq \langle 1 \rangle$.*

Твердження леми 1 випливає з теореми Ремака.

Наслідок 1. *Нехай група G — ненільпотентна або нільпотентна класу $> c$. Якщо G — N_cQI-група, то центр $\zeta_1 G$ — періодична підгрупа.*

Лема 2. *Нехай група G — ненільпотентна або нільпотентна класу $> c$. Якщо G — N_cQI-група з нескінченним центром $\zeta_1 G$ то він містить квазіциклічну p-підгрупу скінченного індексу.*

Доведення. За наслідком 1 центр $\zeta_1 G$ періодичний. Припустимо, що $\zeta_1 G$ містить підгрупу

$$\times_\alpha \{A_\alpha | A_\alpha \neq \langle 1 \rangle, \alpha \in \Lambda, \Lambda - \text{нескінченна множина}\}.$$

Оскільки існує розбиття Λ на дві нескінченні неперетинні підмножини Λ_1, Λ_2 (тобто $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ і $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$), то підгрупа $B_i = \times_\alpha \{A_\alpha | \alpha \in \Lambda_i\}$ нескінченна ($i = 1, 2$). Оскільки, крім того, $B_1 \cap B_2 = \langle 1 \rangle$, то за теоремою Ремака група G нільпотентна класу $\leq c$, що неможливо. Тому підгрупа $\zeta_1 G$ не містить підгруп, які можна розкласти в нескінченний прямий добуток неодиничних підгруп, а отже, множина $\pi(\zeta_1 G)$ скінченна. Оскільки $|\zeta_1 G| = \infty$, то $\zeta_1 G$ містить нескінченну силовську p-підгрупу P. Підгрупа $\Omega_1(P)$ — абелева експоненти p, а тому вона скінченна і, як наслідок, P — черніковська група. Нехай D — подільна частина P. Якщо D містить підгрупу ізоморфну групі $\mathbb{C}_{p^\infty} \times \mathbb{C}_{p^\infty}$, то за теоремою Ремака група G нільпотентна класу $\leq c$, що не так. Отже, $D \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Нехай $q \in \pi(\zeta_1 G)$, $q \neq p$ і Q — силовська q-підгрупа центру $\zeta_1 G$. За теоремою Ремака Q скінченна, а отже, $|\zeta_1 G : D| < \infty$.

Лема 3. *Нехай G — N_cQI-група із скінченною підгрупою $I(G)$. Тоді G — нільпотентна група.*

Доведення. Якщо $|\zeta_1 G| = \infty$, то група G нільпотентна. Тому будемо вважати, що $|\zeta_1 G| < \infty$. За теоремою Ремака фактор-група $G/I(G)$ нільпотентна, а тому група G є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної. Отже, $\gamma_m G \leq I(G)$ і $|\gamma_m G| < \infty$ для деякого цілого m. Але тоді за теоремою 4.25 [11] фактор-група $G/\zeta_n G$ скінченна для деякого цілого n і, як наслідок, група G нільпотентна. Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай G — нільпотентна група класу нільпотентності $> c$. Тоді G — N_cQI-група із скінченною підгрупою $I(G)$ і нескінченним центром $\zeta_1 G$, тоді і тільки тоді, коли група G задовольняє наступні умови:*

(1) G — нечерніковська періодична група;

(2) $\zeta_1 G = D \times F$, $D \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$, F — скінченна підгрупа;

(3) $\gamma_{c+1} G = \Omega_1(D)$ — підгрупа порядку p.

Доведення. Необхідність. Якщо група G черніковська, то за теоремою 2 [10] фактор-група $G/I(G)$ скінченна, а це неможливо. Отже, група G нечерніковська.

За лемою 2 центр $\zeta_1 G$ містить квазіциклічну p-підгрупу D скінченного індексу. Крім того, $\zeta_1 G = D \times F$ для деякої скінченної підгрупи F. Зрозуміло, що $\gamma_{c+1}G \le I(G) \le D$ і, як наслідок, $I(G)$ — скінченна циклічна p-підгрупа.

Нехай A — максимальна нормальна абелева підгрупа, P — її силовська p-підгрупа. Доведемо, що P нечерніковська група. Припустимо протилежне. Нехай P містить таку підгрупу M, $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, що $|P/M| < \infty$, $M_i \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Якщо $n \ge 2$, то $M_i \le \zeta_1 G$, оскільки G — нільпотентна група. Отже, $n = 1$.

Періодичну частину групи G можна подати у вигляді $\tau G = P \times Q$, де P — силовська p-група G, Q — p'-група. Зрозуміло, що $|Q| < \infty$.

Доведемо, що $\zeta_2 G$ — періодична підгрупа. Справді, нехай $x \in \zeta_2 G$, $g \in G$. Оскільки $[\zeta_2 G, G] \le \zeta_1 G \cap \gamma_1 G$, то $|[x,g]| = m < \infty$ і $1 = [x,g]^m = [x^m, g]$. Отже, $x^m \in \zeta_1 G$, і оскільки центр $\zeta_1 G$ періодична підгрупа, то $|x| < \infty$ і $\zeta_2 G$ періодична. Оскільки $M \le \zeta_1 G$, то $|\zeta_2 G/\zeta_1 G| < \infty$. Фактор-група $G/\zeta_1 G$ нільпотентна, а тому її центр $\zeta_1(G/\zeta_1 G) = \zeta_2 G/\zeta_1 G$ має скінченну експоненту. За теоремою Діксм'є [12] отримуємо, що експонента фактор-групи $G/\zeta_1 G$ є скінченною і, як наслідок, група G є періодичною. Тоді групу G можна записати у вигляді $G = P \times T$, де T — p'-група, а тому група G — черніковська група. Ця суперечність показує, що підгрупа P не є черніковською. Звідси випливає, що її нижній шар $\Omega_1(P)$ нескінченний. Очевидно, $\Omega_1(P)$ — G-допустима підгрупа A. Оскільки G — N_cQI-група, то $G/\Omega_1(P)$ нільпотентна класу нільпотентності $\le c$. З огляду на теорему Ремака одержуємо, що $G/(D \cap \Omega_1(P))$ також нільпотентна класу нільпотентності $\le c$, а тому $|\gamma_{c+1}G| = p$.

Достатність. Нехай $\gamma_{c+1}G$ — підгрупа порядку p, H — нескінченна нормальна підгрупа групи G. Якщо x — елемент множини $H \backslash \zeta_1(\gamma_c G)$, а y — такий елемент підгрупи $\gamma_c G$, що $[x,y] \ne 1$, то $[x,y] \in H \cap \gamma_{c+1}G$. Але $\langle [x,y] \rangle = \gamma_{c+1}G$, а тому фактор-група G/H нільпотентна класу $\le c$.

Тепер нехай $H \le \zeta_1(\gamma_c G)$. Якщо при цьому $H \le \zeta_1 G$, то із скінченності індексу $|\zeta_1 G : D|$ випливає, що $D \le H$, а тому G/H нільпотентна класу $\le c$. Оскільки з нескінченності перетину $H \cap \zeta_1 G$ випливає, що G/H нільпотентна класу $\le c$, то припустимо, що $|H \cap \zeta_1 G| < \infty$. Тоді $H \ge D_1 \times F_1$, де $D_1 = H \cap D$, $F_1 = F \cap D$, причому підгрупа D_1 скінченна. Оскільки $|G : D| < \infty$, то перетин $D_1 = D \cap H$ неодиничний. Тоді $\Omega_1(D) = \Omega_1(D_1) = \gamma_{c+1}G \le H$ і фактор-група G/H нільпотентна класу $\le c$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай G — нільпотентна група класу нільпотентності $> c$. Тоді G — N_cQI-група із скінченною підгрупою $I(G)$ і скінченним центром $\zeta_1 G$, тоді і тільки тоді, коли G задовольняє наступні умови:*

(1) $G = P \times T$, P — нескінченна нільпотентна p-підгрупа скінченної експоненти,
T — скінченна p'-підгрупа;

(2) $\gamma_{c+1}G$ — скінченна елементарна абелева підгрупа;

(3) для кожної скінченної нормальної підгрупи $\mathcal{L}$ $\gamma_{c+1}G \le \mathcal{L}$ або центр $\zeta_1(G/\mathcal{L})$ скінченний.

Доведення. Необхідність. За теоремою 2.23 [11] група G періодична скінченної експоненти.

Нехай A — максимальна нормальна абелева підгрупа G. Тоді $C_G(A) = A$, а тому A нескінченна. Як і в теоремі 1, легко доводиться, що A має нескінченну силовську p-підгрупу P для деякого простого p і її нижній шар $\Omega_1(P)$ нескінченний. Оскільки фактор-група $G/\Omega_1(P)$ нільпотентна класу $\leq c$, то $\gamma_{c+1}G \leq I(G) \leq \Omega_1(P)$.

Нехай $\mathcal{L}$ — така скінченна нормальна підгрупа групи G, що $\mathcal{L} \not\supset \gamma_{c+1}G$. Тоді за лемою 2 центр $\zeta_1(G/\mathcal{L})$ скінченний.

Достатність. Нехай H — яка-небудь нескінченна нормальна підгрупа групи G, $\mathcal{L} = H \cap \gamma_{c+1}G$. Припустимо, що $\mathcal{L} \neq \gamma_{c+1}G$. Нехай a — таке додатнє ціле число, що підгрупа $\gamma_a G$ нескінченна, а $\gamma_{a+1}G$ скінченна ($a \leq c$). Тоді центр $\zeta_1(G/\gamma_{a+1}G)$ скінченний. Зрозуміло, якщо $\mathcal{L} \leq \gamma_m G$, то $\gamma_m(G/\mathcal{L}) = \gamma_m G/\mathcal{L}$. Оскільки

$$(G/\mathcal{L})/\gamma_{a+1}(G/\mathcal{L}) = (G/\mathcal{L})((\gamma_{a+1}G/\mathcal{L}) \cong G/\gamma_{a+1}G,$$

то центр $\zeta_1((G/\mathcal{L})/\gamma_{a+1}(G/\mathcal{L}))$ також скінченний. Але

$$\gamma_a((G/\mathcal{L})/\gamma_{a+1}(G/\mathcal{L})) \leq \zeta_1((G/\mathcal{L})/\gamma_{a+1}(G/\mathcal{L})),$$

і оскільки $\gamma_a(G/\mathcal{L})/\gamma_{a+1}(G/\mathcal{L}) = \gamma_a((G/\mathcal{L})/\gamma_{a+1}(G/\mathcal{L}))$, то підгрупа $\gamma_a G$ скінченна, а це неможливо. Отже, $\gamma_{c+1} \leq H$. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Newman M.F. *On a class of metabelian group* Proc. London Math. Soc.(3) – 1960. – V.10. – P.354–364.
2. Newman M.F. *On a class of nilpotent group* Proc. London Math. Soc.(3) – 1960. – V.10. – P.365–375.
3. McCarthy D. *Infinite groups whose proper quotients are finite* Commun. Pure and Applied Math. – 1968. – V.21, 6. – P.545–562.
4. McCarthy D. *Infinite groups whose proper quotients are finite* Commun. Pure and Applied Math. – 1968. – V.21, 5. – P.157–167.
5. Wilson J.S. *Groups with every proper quotients finite* Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1972. – V.69, 3. – P.373–391.
6. Groves J.R.J. *Soluble groups with every proper quotients polycyclic* Ill. J. Math. – 1978. – V.22, 1. – P.90–95.
7. Robinson D.J.S., Wilson J.S. *Soluble groups with many polycyclic quotients* Proc. London Math. Soc.(3) – 1984. – V.48. – P.193–229.
8. Franciosi S., de Giovanni F. *Soluble groups with many nilpotent quotients* Proc. Royal Irish Acad. – 1989. – V.89A, 1. — P.43–52.
9. Калашникова Н.В. Группы с некоторыми ограничениями на фактор-группы. – Деп. в ГНТБ Украины 12.10.95. N 2263 – Ук 95. 31 с.
10. Turash O. *On groups with nilpotent quotients with respect to infinite normal subgroups* Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С.54–56.
11. Robinson D.J.S. Finiteness conditions and generalized soluble groups. Part 1. – Berlin: Springer, 1972. – 210 p.
12. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Львівський державний університет, механіко-математичний факультет.

Надійшло 1.10.1997
Після переробки 9.03.1999