УДК 512.552.8+512.6

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОСНАЩЕННЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ, II

А.В. Забарило, А.Г. Завадский

A.V. Zabarilo, A.G. Zavadskij. *Representations of one-parameter equipped posets, II*, Matematychni Studii, **11**(1999) 119–134.

The paper is the second part of the work devoted to a full classification of indecomposables of one-parameter equipped posets over the pair $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. In this (final) publication with help of the developed in the first part machinary the representations of the mentioned posets are described and the main results are proved.

А.В. Забарило, А.Г. Завадский. *Представления однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств, II* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.119–134.

Вторая часть работы, посвященной полной классификации представлений однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств над парой $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. В этой (завершающей) публикации с помощью развитого в первой части аппарата описываются представления указанных множеств и доказываются основные результаты.

## Введение

Данная статья является непосредственным продолжением статьи [1], определения и обозначения которой сохраняют силу. Цель обеих публикаций (представляющих собой модифицированный и сокращенный журнальный вариант препринта [2]) — дать полную классификацию представлений однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств над парой $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Напомним, что в [1] были приведены предварительные сведения, сформулированы основные результаты работы и разработаны алгоритмы дифференцирования оснащенных множеств. В настоящей публикации с помощью развитого в [1] аппарата классифицируются сами представления. В частности, описываются точные нетривиально оснащенные однопараметрические множества, полный список которых состоит из 28 множеств $M_1, \dots, M_{13}$ и $L_1, \dots, L_{15}$, рассматриваемых с точностью до антиизоморфизма. Строение и схема описания представлений множеств этих двух групп вполне аналогичны (хотя и имеют различия в деталях). Поэтому мы приводим в §§1,2,3 соответствующие доказательства лишь для множеств первой группы $(M_1, \dots, M_{13})$, а для множеств второй группы $(L_1, \dots, L_{15})$ ограничиваемся в §4 сводкой результатов, отсылая заинтересованного в подробностях читателя к препринту [2].

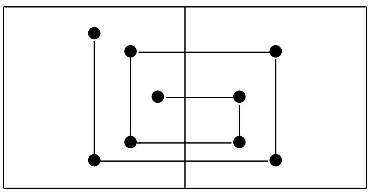
1991 *Mathematics Subject Classification.* 16G20, 16G60, 16G30.

## §1. Представления множеств $M_1, M_3, \ldots, M_7, M_{12}$

Сначала разберемся с представлениями критического множества $M_1$. Их можно рассматривать как представления расширенной схемы Дынкина $\widetilde{C}_2$, исследованные, в частности, в [3], откуда можно извлечь основную информацию об их строении и свойствах. В то же время эти представления допускают весьма изящную матричную классификацию, которая нам понадобится и которую сейчас опишем.

Пусть $M_1 = \{a, b\}$. Определим неразложимые представления множества $M_1$, которые естественно называть *спиральными*, следующим образом. В прямоугольнике, разделенном на две вертикальные полосы и изображающем матричное предсталение множества $M_1$, начертим любую прямоугольную спираль с отмеченными узлами — концами звеньев (концы горизонтальных звеньев должны принадлежать разным полосам):

$a$ $\qquad\qquad$ $b$



$(a \sim a - b \sim b - a \sim a - b \sim b - a)$

$\longleftrightarrow$

| $a$ | $b$ |
|---|---|
| 1 0 0 | 0 0 |
| 0 1 0 | 0 1 |
| 0 0 1 | 1 0 |
| 0 $i$ 0 | $i$ 0 |
| $i$ 0 0 | 0 $i$ |

Никаких ограничений на длину спирали не накладывается, число ее узлов $m$ произвольное (при $m = 1$ получаем спираль с одним узлом, но без звеньев, а при $m = 0$ — пустую спираль). Начинаться и оканчиваться она может в любых полосах звеньями любого типа (как горизонтальными, так и вертикальными). Каждый узел соответствует пересечению какой-либо строки с каким-либо столбцом (иных строк и столбцов матрица не содержит), причем два узла стоят в одной строке (одном столбце) точно тогда, когда они являются концами горизонтального (вертикального) звена.

Для записи самого представления, определяемого спиралью, необходимо на всех местах матрицы, отличных от узловых, поставить нули, а в узлах произвольно расставить числа 1 и $i$, руководствуясь единственным правилом: *на концах вертикальных звеньев должны стоять разные числа.* Легко видеть, что любые две расстановки по такому принципу дают изоморфные представления, т.е. всякая спираль определяет единственное представление с точностью до изоморфизма. Все спиральные представления неразложимы.

Саму спираль удобно задавать *цепочкой*, состоящей из нескольких экземпляров точек $a, b$ (соответствующих узлам), последовательно соединенных знаками $-$ либо $\sim$, где $-$ соответствует горизонттальному звену, а $\sim$ вертикальному (см. рис. выше).

Для символического изображения типов спиральных представлений запишем рядом две пустые клетки (отвечающие точкам $a, b$), и если спираль начинается или оканчивается в полосе $x$ горизонтальным (вертикальным) звеном, то в соответствующей клетке поставим горизонтальную (вертикальную) черточку. Тогда с точностью до перестановки точек $a, b$ получим 6 типов спиральных представлений (из которых с точностью до двойственности будет только 4 типа):

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{\,|\,}\boxed{\,|\,} & \boxed{-}\boxed{-} & \boxed{+}\boxed{\phantom{+}} & \boxed{\|}\boxed{\phantom{\|}} & \boxed{\phantom{=}}\boxed{=} & \boxed{-}\boxed{\,|\,} \\ (1) & (1^*) & (2) = (\tilde{2}^*) & (3) & (3^*) & (4) = (4^*) \end{array}$$

где тип $(\tilde{2})$ получаются из типа (2) перестановкой точек $a, b$. Представление на рис. выше имеет тип (4). Пустой спирали по определению соответствует представление $[\delta_0]$ типа (1).

Кроме спиральных, множество $M_1$ имеет неразложимые представления еще двух типов, размерности которых суть мнимые корни. Все представления и их числовые характеристики выписаны в таблице 1 при следующих условных обозначениях:

$$U=\begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} \\ \hline A & B \\ \hline iA' & iB' \\ \hline \end{array} \text{ — матричное представление размерности } d = \underline{\dim}\, U = \begin{pmatrix} d_a & & d_b \\ & d_0 & \end{pmatrix};$$

$h$ — *шаг размерности*, т.е. наименьшее кратное мномого корня $\mu$ такое, что $d+h$-размерность однотипного представления; $f$ и $\partial$ — значения формы Титса и дефекта (на векторе $d$);

$$\begin{array}{lll} k_1 = \dim_{\mathbb{R}} U_a^-, & k_2 = \dim_{\mathbb{R}} U_b^-, & k_3 = \dim_{\mathbb{C}} U_a \cap U_b; \\ l_1 = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} U_a^+, & l_2 = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} U_b^+, & l_3 = \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} (U_a + U_b); \end{array}$$

$E_n$ — единичная матрица порядка $n$. Запись рядом с матрицей стрелки вида $\leftarrow$, $\rightarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$ обозначает приписывание к этой матрице нулевой строки или столбца соответственно слева, справа, сверху, снизу. $X$ обозначает клетку Фробениуса с характеристическим полиномом $P_X(\lambda) \neq \lambda^n$, $(\lambda-1)^n$ и условием $|\det X| \leq 1$.

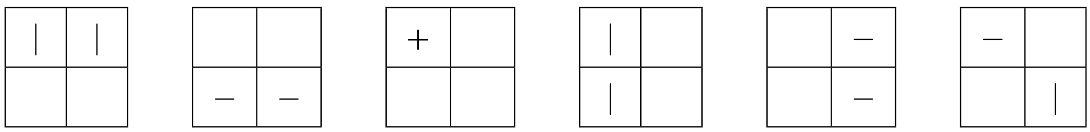
**Таблица 1.** Представления критического множества $M_1 = \{a; b\}$ $\mu = \begin{smallmatrix} 1 & & 1 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ (с точностью до перестановки точек $a, b$)

| Тип | Символ | | min $\underline{\dim}$ | $h$ | $f$ | $\partial$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $A$ | $B$ | $A'$ | $B'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | \| | \| | $\begin{smallmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ | $\mu$ | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $E_n^{\uparrow}$ | $E_n^{\downarrow}$ | $E_n$ | $E_n$ |
| $1^*$ | – | – | $\begin{smallmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ | $\mu$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $E_n^{\rightarrow}$ | $E_n^{\leftarrow}$ | $E_{n+1}$ | $E_{n+1}$ |
| $2 = \tilde{2}^*$ | + | | $\begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ | $\mu$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $E_{n+1}$ | $E_n^{\uparrow}$ | $E_n^{\rightarrow}$ | $E_n$ |
| 3 | \|\| | | $\begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ | $\mu$ | 2 | $-2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | $E_{n+1}$ | $E_n^{\uparrow}$ | $E_{n+1}$ | $E_n^{\downarrow}$ |
| $3^*$ | | = | $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ | $\mu$ | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $E_n$ | $E_n^{\rightarrow}$ | $E_n$ | $E_n^{\leftarrow}$ |
| $4 = 4^*$ | – | \| | $\mu$ | $\mu$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $E_n$ | $E_n$ | $J_n(0)$ | $E_n$ |

| Тип | Символ | min $\underline{\dim}$ | $h$ | $f$ | $\partial$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $A$ | $B$ | $A'$ | $B'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5=5^*$ | | $\mu$ | $\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | $E_n$ | $E_n$ | $J_n(1)$ | $E_n$ |
| $6=6^*$ | | $\mu$<br>$2\mu$ | $\mu$<br>$2\mu$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $E_n$ | $E_n$ | $X$ | $E_n$ |

*Замечание 1.* Представления типа (6) подразделяются (по параметрам $\underline{\dim}$ и $h$) еще на два подтипа в зависимости от степени неприводимого множителя характеристического многочлена клетки $X$.

*Замечание 2.* Интересно отметить, что плоская матричная задача о представлениях пары диад над произвольным полем $k$, решенная Л.А. Назаровой в [5] (т.е. задача о приведении матрицы вида ⊞ независимыми элементарными преобразованиями строк и столбцов горизонтальных и вертикальных полос), имеет дискретные неразложимые представления, тоже определяемые совершенно аналогичными спиралями, с той лишь разницей, что в узлах спирали здесь всегда стоит число 1. Более точно, с точностью до перестановки горизонтальных (вертикальных) полос, задача имеет тоже 6 типов спиральных представлений



а также соответствующую серию представлений с клеткой Фробениуса $X$ типа

| | |
|---|---|
| $E$ | $E$ |
| $X$ | $E$ |

где $P_X(\lambda) \neq \lambda^n$, что составляет полный набор неразложимых представлений.

Резюмируя изложенное выше о представлениях критического оснащенного множества $M_1$, получаем

**Предложение 1.** *С точностью до двойственности и перестановки точек $a, b$ представлениями типа (1)–(6) исчерпываются все неразложимые представления множества $M_1$.*

Суть доказательства (набросок которого представлен в [2] на стр.19) состоит в сведении рассматриваемой задачи к задаче, решенной в [4], а также опирается на использование разработанной в [1] техники дифференцирования (последняя применяется к множествам $M_3 = \{a < \zeta; b\}$ и $M_3^* = \{\zeta < a; b\}$, где $\zeta$ — одинарная точка, до представлений которых естественно продолжаются представления множества $M_1$).

Результатом соответствующих вычислений является, в частности, следующая простая классификация представлений множеств $M_3$ и $M_3^*$.

Пусть $d = \underline{\dim}\, U = (d_0, d_a, d_b, d_\xi)$, $f = f(d)$, $\mu = \mu_{M_1}$ и $\partial(\partial^*)$ — дефект вектора $d$ для множества $M_3(M_3^*)$. Обозначим через $\Omega$ цепочку вида $b \sim b - a \sim a$.

**Предложение 2.** *Каждое из множеств $M_3 = \{a < \xi; b\}$ и $M_3^* = \{\xi < a; b\}$ имеет 5 типов неразложимых представлений, точных в точке $\xi$, которые являются спиральными и задаются одними и теми же цепочками вида:*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \xi - \Omega - \cdots - \Omega & (d = (1,0,0,1) + n\mu,\ f = 1,\ \ \partial = -2;\ \ \partial^* = 0),\\
(2) & \xi - \Omega - \cdots - \Omega - b \sim b & (d = (2,0,1,1) + n\mu,\ f = 1,\ \ \partial = -2;\ \ \partial^* = 0),\\
(3) & \xi - \Omega - \cdots - \Omega - b \sim b - a & (d = (2,1,1,1) + n\mu,\ f = 1,\ \ \partial = 0;\ \ \partial^* = 2),\\
(4) & \xi - \Omega - \cdots - \Omega - b & (d = (1,0,1,1) + n\mu,\ f = 1,\ \ \partial = 0;\ \ \partial^* = 2),\\
(5) & \xi - \Omega - \cdots - \Omega - \xi & (d = (2,0,1,2) + n\mu,\ f = 2,\ \ \partial = -2;\ \ \partial^* = 2),
\end{array}
$$

*где $n \geq 0$ — число подцепочек $\Omega$ в каждом случае.*

*Замечание.* Спиральные представления, соответствующие указанным цепочкам, определяются фактически так же, как и для множества $M_1$; следует лишь учитывать, что в узле спирали, отвечающем одинарной точке $\xi$, проставляется 1.

Совершенно аналогично (дифференцируя по максимальной или минимальной одинарной точке либо используя двойственность $*$ индукцией по размерности описываются все точные в одинарных точках неразложимые представления множеств $M_4, \dots, M_7, M_{12}$ и им антиизоморфных. Пусть $n, \mu, f, \partial$ — те же, что и выше, а $d = (d_0, d_a, d_b, d_\xi, d_\eta)$.

**Предложение 3.** *Множества $M_4 = \{a < \xi; b < \eta\}$, $M_4^* = \{\xi < a; \eta < b\}$ и $M_6 = \{\xi < a; b < \eta\}$, где $\xi, \eta$ — одинарные точки, имеют один (общий для всех) тип точных в точках $\xi, \eta$ неразложимых представлений, являющихся спиральными и задаваемыми цепочкой $\xi - \Omega - \cdots - \Omega - \eta$, при этом $d = (1,0,0,1,1) + n\mu$, $f = 1$ и соответственно $\partial = -2$, $\partial = 2$ и $\partial = 0$. При $n \geq 1$ получим представления множества $M_{12}$ со значениями $f = 2$ и $\partial = 0$ (см. в [1] §2 операцию пополнения особым отношением).*

**Предложение 4.** *Множества $M_5 = \{a < \xi < \eta; b\}$, $M_5^* = \{\eta < \xi < a; b\}$ и $M_7 = \{\eta < a < \xi; b\}$, где $\xi, \eta$ — одинарные точки, имеют один (общий для всех) тип точных в точках $\xi, \eta$ неразложимых представлений, являющихся спиральными и задаваемыми цепочкой $\xi - \Omega - \cdots - \Omega - b \sim b - \eta$, при этом $d = (2,0,1,1,1) + n\mu$, $f = 1$ и соответственно $\partial = -2$, $\partial = 2$ и $\partial = 0$.*

Условимся о следующем. Мы присваиваем фиксированный номер каждому типу точных неразложимых представлений, и в дальнейшем $k$-й тип представлений множества $M_i$ обозначаем через $(M_i - k)$ (аналогично поступаем в случае точных множеств $L_i$). При наличии лишь одного типа (как, например, у множеств $M_4, \dots, M_7, M_{12}$) можем записывать как $(M_i - 1)$, так и просто $(M_i)$.

## §2. Представления множеств $M_8$ и $M_9$

Пусть $M_8 = \{a \prec p \succ b\}$, $M_9 = \{\xi > a \prec p \succ b\}$, где $\xi$ — одинарная точка (очевидно, $M_8 \subset M_9$). Поскольку представления множеств $M_1 = M_8 \setminus p$ и $M_3 = M_9 \setminus p$ уже описаны, то достаточно рассмотреть представления, точные в точке $p$.

Пусть $U$ — неразложимое представление множества $M_8$, точное в точке $p$. Его ограничение $W = U \,|\, M_1$ разложим в прямую сумму неразложимых представлений $W = \bigoplus_i W_i$ и рассмотрим два случая.

а) Пусть $U_a^+ = U_b^+ = U_0$, а $U_a + U_b \neq \tilde{U}_0$. Тогда для любого слагаемого $X = W_i$ выполняется $X_a^+ = X_b^+ = X_0$, и поскольку $X$ не выделяется прямым слагаемым из $U$, то должно быть $X_a + X_b \neq \tilde{X}_0$, т.е. (см. таблицу 1 выше) $X$ имеет тип $(M_1 - 5)$. Используя явный вид всех слагаемых $W_i$ типа $(M_1 - 5)$, указанный в таблице 1, приведем в данной матричной задаче (отвечающей множеству $M_8$) полосы точек $a, b$ и осуществим естественные прибавления столбцов полос $a, b$ к столбцам полосы $p$ для получения наибольшего числа нулей в последней. Получим следующую матрицу

| $a$ | | | | | | $b$ | | | | | | $p$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | | | | | | $E$ | | | | | | | |
| | $E$ | | | | | | $E$ | | | | | | |
| | | $E$ | | | | | | $E$ | | | | | |
| | | | $E$ | | | | | | $E$ | | | | |
| | | | | $E$ | | | | | | $E$ | | | |
| | | | | | $E$ | | | | | | $E$ | | |
| $I$ | | | | | | $I$ | | | | | | $p_1$ | $\mathbb{C}$ |
| | $I$ | $I$ | | | | | $I$ | | | | | | |
| | | $I$ | | | | | | $I$ | | | | $p_2$ | $\mathbb{C}$ |
| | | | $I$ | $I$ | | | | | $I$ | | | | |
| | | | | $I$ | $I$ | | | | | $I$ | | | |
| | | | | | $I$ | | | | | | $I$ | $p_3$ | $\mathbb{C}$ |
| | | | | | | | | | | | | $\mathbb{C}$ | |

(2.1)

где все пустые клетки — нулевые, а $I = iE$ (мы ограничились изображением клеток Жордана порядка $\leq 3$). Оказывается, над строками любой из оставшихся в полосе $p$ матриц $p_k$ можно производить любые элементарные преобразования не только над полем $\mathbb{R}$, но фактически над полем $\mathbb{C}$. Не ограничивая общности, поясним это на соответствующем фрагменте вида

$$L = \begin{array}{ccc} a & b & p \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{E} & \multicolumn{1}{c|}{E} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{iJ^+(1)} & \multicolumn{1}{c|}{iE} & \multicolumn{1}{c|}{A} \\ \hline \end{array}$$

где $A$ — некоторая комплексная матрица, у которой все строки, кроме последней, нулевые, а $J^+(\lambda)$ — клетка Жордана с единицами над диагональю (фрагмент $L$ соответствует клеткам $E$ и $I$ первого порядка в матрице (2.1)). Несложно проверить, что матрица $H$, обратная к $J^+(1)$, имеет вид $H = (J^+(1))^{-1} = (h_{ij})$, где $h_{ij} = 0$ при $i > j$; $h_{ij} = (-1)^{i+j}$ при $i \leq j$, причем $SHS^{-1} = J^+(1)$, где $S = (s_{ij})$ — матрица с элементами $s_{ij} = 0$ при $i > j$; $s_{in} = 0$ при $i < n$; $s_{nn} = (-1)^{n+1}$ и $s_{ij} = (-1)^{i+1}C_{n-i-1}^{j-i}$ при $i \leq j \leq n-1$ (здесь $C_m^k = m!/k!(m-k)!$ — обычный биномиальный коэффициент).

Отметим, что $SA = (-1)^{n+1}A$. Вычисляя произведение матриц $L' = MLN$, где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{pmatrix} iHS^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & iS^{-1} & iA \\ 0 & 0 & E' \end{pmatrix},$$

(а $E'$ — тоже единичная матрица), получим матрицу $L'$, отличающуюся от $L$ лишь тем, что вместо блока $A$ в ней будет стоять блок $iSA = i(-1)^{n+1}A = \pm iA$, что доказывает возможность умножения строк блоков $p_k$ на мнимую единицу $i$. Кроме этого, как легко видеть, строки полосы $p_k$ можно прибавлять (теперь уже ясно, что фактически с коэффициентами из $\mathbb{C}$) к строкам $p_l$ при $k > l$.

Таким образом, в полосе $p$ получилась тривиальная задача о представлениях (бесконечной) цепи над $\mathbb{C}$, неразложимые матрицы которой суть единичные матрицы 1-го порядка (со строкой, принадлежащей любой полосе $p_k$). Это дает нам неразложимые представления множества $M_8$, которым присвоим номер $(M_8 - 4)$, следующего вида

$$(M_8-4) = \begin{array}{c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{p} \\ \cline{2-4} & E & E & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \cline{2-4} & iJ^{+}(1) & iE & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \cline{2-4} \end{array} \qquad \begin{matrix} d = (2n, n, n, 1),\ n \geq 1, \\ \\ f = 2,\ \partial = 0, \end{matrix}$$

где справа внизу стоит матрица-столбец с 1 на последнем месте и 0 на остальных местах.

b) Пусть $U_a^+ \neq U_0$ или $U_b^+ \neq U_0$, например, $U_a^+ \neq U_0$. Тогда, продолжая $U$ до представления множества $M_9$ формулой $U_\xi = U_a^+$, сможем реально дифференцировать $U$ (как представление множества $M_9$) по точке $\xi$ и выполнить индукционный шаг.

Интегрированием (см. [2], стр. 22–23) и применением двойственности нами найдены все представления множеств $M_8, M_8^*, M_9, M_9^*$ в матричной форме. Явное перечисление представлений двух последних множеств в этой работе мы опускаем ввиду некоторой громоздкости. В то же время приведем классификацию представлений множеств $M_8$ и $M_8^*$.

Условимся в обозначениях. Пусть $\mathcal{P}$ — любое из точных множеств $M_i, L_j$ с максимальной (минимальной) одинарной точкой $\xi$, $Q = \mathcal{P}\backslash\xi$ и $K$ — множество всех точек $Q$, сравнимых с $\xi$. Если для неразложимого представления $U$ множества $Q$ типа $(Q-m)$ выполняется условие $U_K^+ \neq U_0$ $(U_K^- \neq 0)$, то, очевидно, $U$ можно продлить на $\mathcal{P}$, беря в качестве $U_\xi$ любое собственное надпространство (подпространство) $\mathbb{R}$-пространства $U_K^+(U_K^-)$. Так построенное представление множества $\mathcal{P}$ обозначим $(Q-m)^\xi$ $((Q-m)_\xi)$ в предположении, что выполняется условие $\dim U_\xi/U_K^+ = 1$ $(\dim U_K^-/U_\xi = 1)$ и что представление не зависит, с точностью до изоморфизма, от выбора $U_\xi$ в тех редких (но тоже рассматриваемых нами) ситуациях, когда $\operatorname{codim} U_K^+ \geq 2$ $(\dim U_K^- \geq 2)$.

Если $\mathcal{P}$ содержит максимальную и минимальную одинарные точки $\xi$ и $\eta$, то комбинацией двух таких шагов будет представление $(Q-m)_\eta^\xi$, где $Q = \mathcal{P}\backslash\{\xi,\eta\}$.

Если $\mathcal{P} = M_8 = \{a \prec p \succ b\}$ $(\mathcal{P} = M_8^* = \{a \succ p \prec b\})$, то $\mathcal{P} \setminus p = M_1$ и, рассматривая $\mathbb{C}$-пространства вместо $\mathbb{R}$-пространств, совершенно аналогично определим представления типа $(M_1-m)^p$ $((M_1-m)_p)$.

В принятых обозначениях представления множеств $M_8$ и $M_8^*$ исчерпываются следующими

$(M_8-1) = (M_1-1)^p$, $(M_8-3) = (M_1-\tilde{3})^p$, $(M_8-4) = (M_1-5)^p$, $(M_8^*-1) = (M_1-1^*)_p$,

$(M_8^* - 2) = (M_1 - 5)_p$, $(M_8^* - 3) = (M_1 - 3^*)_p$, и $(M_8 - 2) = (M_8^* - 4)^* =$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline E_n^{\uparrow} & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & E_n^{\downarrow} \\ \hline iE_n^{\downarrow} & \begin{matrix}i\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & E_n^{\uparrow} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{p} & \multicolumn{1}{c}{b} \end{array},$$

где в столбце $p$ имеется ровно два указанных ненулевых элемента.

Резюмируя, получаем

**Предложение 5.** *С точностью до автоморфизма оснащенных множеств, множества $M_8$ и $M_8^*$ имеют по 4 типа точных в точке $p$ неразложимых представлений, выписанных выше, а множества $M_9$ и $M_9^*$ имеют по 10 типов точных в точках $\xi, p$ неразложимых представлений. Размерности всех этих представлений являются корнями, перечисленными (вместе с другими числовыми характеристиками) в Приложении 3 к [2].*

## §3. Представления множеств $M_{10}, M_{11}, M_{13}, M_2$ и смежные вопросы

В теории представлений обычных частично упорядоченных множеств ручного типа полезную роль играет одно свойство неразложимых представлений критического множества $K_1$, описанное в [6] (лемма 1.3) и расширенное в [7] (предложение 2.2). Его следствием является Лемма о зигзаге ([7], следствие 2.3), используемая при описании точных множеств и их представлений. Оказывается, аналогичными свойствами обладают и представления оснащенных критических множеств $M_1, L_1$.

Для критического подмножества $M_1 = \{a, b\}$ оснащенного множества $\mathcal{P}$ положим $(a,b)^\wedge = \{x \in \mathcal{P} \mid a \prec x; b \prec x\}$, $(a,b)^\vee = \{x \in \mathcal{P} \mid x \prec a; x \prec b\}$. Будем называть $M_1$ *правильным подмножеством* множества $\mathcal{P}$, если множества $N(a), N(b), (a,b)^\wedge, (a,b)^\vee$ являются цепями, причем цепи $N(a)$ и $N(b)$ не содержат отличных от $a, b$ двойных точек (заметим, что цепи $(a,b)^\wedge$ и $(a,b)^\vee$ автоматически являются вполне слабыми).

**Лемма 1.** *Если оснащенное множество $\mathcal{P}$ содержит правильное критическое подмножество $M_1 = \{a, b\}$, то любое неразложимое (не обязательно точное) представление $U$ множества $\mathcal{P}$ удовлетворяет следующим условиям:*

*(1) $U_a \cap U_b = 0$ или $U_a^+ = U_b^+ = U_0$;*

*(2) $U_a + U_b = \tilde{U}_0$ или $U_a^- = U_b^- = 0$.*

Так как эти утверждения двойственны друг другу, то достаточно доказать одно из них, например (1).

**1-й случай:** $\mathcal{P} = M_1 + (a,b)^\wedge$. Введем индукцию по числу $d_0(U) = \dim U_0$ (случай $d_0(U) = 1$ тривиален). Предположим, что $d_0(U) > 1$ и $U_a^+ \neq U_0$ и $U_a \cap U_b \neq 0$. Пусть $U_0 = U_a^+ \oplus W_0$, где $W_0$ — некоторое дополнение, и $\pi\colon U_0 \to W_0$ — естественная проекция. Рассматривая ограничение $V = U|U_a^+$ (т.е. полагая $V_0 = U_a^+$ и $V_x = U_x \cap U_a^+$ при $x \in \mathcal{P}$), замечаем, что $V_a \cap V_b \neq 0$. Положим $U_x = V_x \oplus V_x'$, где $V_x'$ — некоторое дополнение, и $W_x = V_x'\pi$ (очевидно, $W_a = 0$). Пусть $V = \bigoplus_i V^i$ — разложение представления $V$ в прямую сумму неразложимых, Так как $d_0(V) < d_0(U)$, то по предположению индукции каждое представление $V^i$ удовлетворяет условию (1), и поскольку $V_a^i \cap V_b^i \neq 0$ для некоторого $i$, то $(V_b^i)^+ = V_0^i$ для этого же $i$. Но тогда, в противоречие с неразложимостью $U$, представление $V^i$ выделится прямым слагаемым из $U$ (легче всего это проверить на матричном языке, приводя сначала согласно лемме 2 из [1] матрицы пространств $W_x$, соответствующие слабой цепи $\mathcal{P}\setminus a$, и матрицу пространства $V_b^i$, а затем обращая в нуль матрицы, отвечающие пересечению горизонтальной полосы $V_0^i$ с вертикальными полосами $V_x'$).

**2-й случай:** $\mathcal{P} = M_1{+}A{+}B$, где $A = N(b)\setminus a^\vee$, $B = N(b)\setminus b^\vee$ (заметим, что по условию $A, B$ — одинарные (т.е. состоящие из одинарных точек) цепи, причем $A < a$ и $B < b$). Полагая здесь опять $U_0 = U_a^+ \oplus W_0$, проводим совершенно аналогичные случаю 1 рассуждения, рассматривая лишь вместо слабой цепи $\mathcal{P}\setminus a$ сильную цепь $\mathcal{P}\setminus(A{+}a)$ (которую, конечно, легче приводить) и учитывая, что $W_x = 0$ при $x \in A + a$.

**3-й случай:** $\mathcal{P} = M_1 + (a,b)^\wedge + A + B$, где $A < B$ — те же, что и выше. Рассматривая здесь ограничение $V = U\,|\,M_1$, разложим его в прямую сумму неразложимых представлений $V = \bigoplus_i V^i$. Так как для множества $M_1$ условие (1) (а значит и (2)) уже доказано (случай 1 при $(a,b)^\wedge = \phi$), то каждое $V^i$ удовлетворяет условию (2) и, следовательно, $V = X \oplus Y$, где $X_a + X_b = \tilde{X}_0$ и $Y_a^- = Y_b^- = 0$, т.е. представление $U$ оказывается неточным во всех точках одного из подмножеств $(a,b)^\wedge$ или $A + B$.

**4-й случай:** $\mathcal{P}$ — произвольное. Обозначим $Q = M_1 + (a,b)^\wedge + A + B$, где $A, B$ — те же, что и выше. Считая представление $U$ точным во всех точках подмножества $\mathcal{P}\setminus Q$, проведем индукцию по числу точек этого подмножества. База индукции — случай 3 ($\mathcal{P} = Q$). Пусть $\mathcal{P} \neq Q$ и $x \in \mathcal{P}\setminus Q$. Тогда $a \lhd x$ или $b \lhd x$ или $x < M_1$. Если $a \lhd x$, то, рассматривая ограничение $V = U\,|\,(\mathcal{P}\setminus x)$ и раскладывая его в прямую сумму неразложимых представлений $V = \bigoplus_i V^i$, замечаем, что $(V_a^i)^+ \neq V_0^i$ при любом $i$ (иначе $V^i$ выделится прямым слагаемым из $U$). Но так как по предположению индукции каждое $V^i$ удовлетворяет условию (1), то $V_a^i \cap V_b^i = 0$, откуда $V_a \cap V_b = 0$ и $U_a \cap U_b = 0$, что и требовалось показать (в случае $x < M_1$ используются симметричные рассуждения).

Прямым следствием является

**Лемма 2** (Лемма о зигзаге для множества $M_1$). *Пусть оснащенное множество $\mathcal{P}$ содержит правильное критическое подмножество $M_1 = \{a, b\}$ и две точки $p, q$ такие, что $p \lhd a$ и $a, b < q$ либо $p < a, b$ и $a \lhd q$. Тогда любое неразложимое представление множества $\mathcal{P}$ неточно в одной из точек $p, q$.*

Опишем представления множества $M_{10} = \{q \prec M_1 \prec p\}$, где $M_1 = \{a, b\}$. Рассмотрим точное неразложимое представление $U$ этого множества. Ввиду точности $U_q \neq 0$ и $U_a + U_b \neq U_p$, откуда по лемме 1 $U_a^+ = U_b^+ = U_0$ и $U_a^- = U_b^- = 0$. Следовательно, при разложении ограничения $V = U\,|\,M_1$ в прямую сумму неразложимых представлений $V = \bigoplus_i V^i$ имеем $(V_a^i)^+ = (V_b^i)^+ = V_0^i$ и $(V_a^i)^- = (V_b^i)^- = 0$ при всех $i$, т.е. (см. таблицу 1) каждое $V^i$ должно быть представлением типа $(M_1{-}5)$ (тип $(M_1{-}6)$, очевидно, выделился бы неточным прямым слагаемым из $U$). Рассматривая теперь матрицу представления $U$, приведем полосы точек $a, b, p$ точно к такому виду, как в (2.1). При этом полоса $q$ разделится на соответствующие горизонтальные полосы.

Решая возникшую в полосах $p, q$ матричную задачу (см. [2], стр. 26), заключаем, что множество $M_{10}$ имеет ровно один тип точных в точках $p, q$ неразложимых представлений вида:

$$
(M_{10}) = (M_{13}) = \begin{array}{c|c|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{q} & \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{p} \\
\hline
1 & & & 0 \\
\vdots & E & E & \vdots \\
0 & & & 0 \\
\hline
i & & & 0 \\
\vdots & iJ^{+}(1) & iE & \vdots \\
0 & & & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
d = (2n, n-1, n-1, 1, 1), \\
f_{M_{10}} = 2 \ (f_{M_{13}} = 4), \\
\\
\partial = 0, \\
(n \geq 1 \text{ для } M_{10};\ n \geq 2 \text{ для } M_{13}),
\end{array}
$$

(запись с избытком столбцов) (3.1)

где каждая из трех ненулевых матриц-столбцов имеет только один ненулевой элемент (эту форму можно редуцировать, отбросив первый столбец каждой из матриц $a, b$ как совпадающий со столбцом $q$). Ясно, что при $n \geq 2$ получим все неразложимые представления множества $M_{13}$, точные в точках $p, q$.

Опишем представления множества $M_{11} = \{M_1 \prec p \prec s\}$, где $M_1 = \{a, b\}$. Рассмотрим его точное неразложимое представление $U$ и разложим его ограничение $V = U \,|\, M_8$, где $M_8 = \{M_1 \prec p\}$, в прямую сумму неразложимых $V = \bigoplus_i V^i$. Так как $U_a + U_b \neq \tilde{U}_0$, то по лемме 1 $U_a^- = U_b^- = 0$, т.е. $V_a^- = V_b^- = 0$ и, следовательно, $(V_a^i)^- = (V_b^i)^- = 0$ при всех $i$. Кроме того, $V_p^i \neq \tilde{V}_0^i$, иначе выделится неточным прямым слагаемым из $U$. Таким образом, каждое $V^i$ либо точно в точке $p$ и, следовательно, имеет тип $(M_8 - 2)$ (только у него $\operatorname{codim} V_p^i \neq 0$), либо неточно в точке $p$ и фактически имеет тип $(M_1 - k)$ при $k = 1, 3, \tilde{3}, 5$ (см. табл. 1). Рассматривая теперь матрицу представления $U$, записывая в полосах $a, b, p$ уже известные канонические формы представлений $V^i$ и оставляя в полосе точки $s$ минимальное число ненулевых блоков (по аналогии со случаем $a$) в §2, где роль $s$ играло $p$), получим в полосе $s$ следующую задачу.

Матрица с комплексными коэффициентами (остаток вертикальной полосы $s$) разделена на горизонтальные полосы, занумерованные точками $f_n, \alpha_n, \gamma_n \tilde{\gamma}_n$ $(n \geq 0)$ и $\pi_n$ $(n \geq 1)$ частично упорядоченного множества (гирлянды) $G$ с отношениями $\alpha_0 < f_0 < \{\gamma_0, \tilde{\gamma}_0\} < f_1 < \alpha_1 < f_2 < \{\gamma_1, \tilde{\gamma}_1\} < f_3 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < f_{2n} < \{\gamma_n, \tilde{\gamma}_n\} < f_{2n+1} < \alpha_{n+1} < \cdots < \pi_{n+1} < \pi_n < \cdots < \pi_2 < \pi_1$. Со строками каждой полосы $\alpha_n$ разрешается производить элементарные преобразования над $\mathbb{R}$, а со строками любой другой полосы (как и со столбцами всей матрицы) — над $\mathbb{C}$. Кроме этого, при $x < y$ строки полосы $x$ можно прибавлять к строкам $y$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Решение этой задачи тривиально, ее неразложимыми матрицами будут либо единичные матрицы 1-го порядка, относящиеся к любой полосе, либо матрицы вида $\left(\begin{smallmatrix}1\\ i\end{smallmatrix}\right)$ в полосах $\alpha_n$, либо матрицы $\left(\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}\right)$, соответствующие несравнимым точкам $\gamma_n$ и $\tilde{\gamma}_n$.

Поскольку полосы $f_n$ и $\alpha_n, \gamma_n, \tilde{\gamma}_n, \pi_n$ зацеплены за канонические формы $F_n = (M_8 - 2)$ и $(M_1 - 1), (M_1 - 3), (M_1 - \tilde{3}), (M_1 - 5)$ соответственно, а последние четыре неточны в точке $p$, то получаем ровно один тип $(M_{11})$ точных в обеих точках $p, s$ неразложимых представлений множества $M_{11}$, являющийся тривиальным продолжением типа $(M_8 - 2)$. Именно, если $U = (M_{11})$, то $U \,|\, M_8 = (M_8 - 2)$; $\operatorname{codim} U_p = 1$ и $U_s = U_0$, т.е. каноническая форма $(M_{11})$ получается из канонической формы $(M_8 - 2)$, указанной в §2, добавлением одного столбца (отвечающего точке $s$) с 1 на любом месте и 0 на остальных местах. Для типа $(M_{11})$ имеем также $d = (2, 0, 0, 1, 1) + n\mu$, $f = 2$, $\partial = -4$.

Из вышеизложенного выводится несколько следствий.

**Лемма 3.** *Множество типа $M_1 + (a,b)^\wedge$ ($M_1 + (a,b)^\vee$), где $|(a,b)^\wedge| \geq 3$, (где $|(a,b)^\vee| \geq 3$), не является точным.*

Действительно, пусть $(a,b)^\wedge = \Lambda$, $|\Lambda| = m$, $\max\Lambda = s$ и $\Lambda \setminus s = \{p < p' < \cdots\}$. Рассмотрим неразложимое представление $U$ множества $\mathcal{P} = M_1 + \Lambda$, точное в точке $s$, и разложим его ограничение $V = U\,|\,(\mathcal{P}\setminus s)$ в прямую сумму неразложимых $V = \bigoplus_i V^i$, предполагая по предположению индукции (которую ведем по числу $m$ с базой $m = 3$), что каждое $V^i$ точно не более чем в двух точках цепи $\Lambda \setminus s$. Тотчас замечаем, что каждое $V^i$ точно не более чем в одной точке точке $\Lambda \setminus s$, иначе, будучи представлением типа ($M_{11}$) некоторого подмножества $M_1 + \{x < y\}$, оно обладало бы свойством $V^i_y = \tilde{V}^i_0$ и выделялось бы прямым слаганмым из $U$. Записывая теперь в матрице представления $U$ канонические формы слагаемых $V^i$ и рассматривая (совершенно аналогично случаю множества $M_{11}$) возникающую в полосе $s$ матричную задачу, получим такую гирлянду $G'$, которая отличается от описанной выше гирлянды $G$ лишь заменой каждой точки $f_n$ конечной цепью $f_n < f'_n < \cdots$ с числом точек $|\Lambda\setminus s| = m-1$. Это, очевидно, обеспечивает индукционный шаг и завершает (с учетом леммы 1 из [1]) доказательство.

**Лемма 2.** *Множество $\mathcal{P}$ типа $M_1 + (a,b)^\wedge + (a,b)^\vee$ является точным тогда и только тогда, когда $|(a,b)^\wedge + (a,b)^\vee| \leq 2$, т.е. когда оно изоморфно или антиизоморфно одному из множеств $M_1, M_8, M_{10}, M_{11}, M_{13}$.*

В самом деле, при $(a,b)^\wedge = \phi$ или $(a,b)^\vee = \phi$ работает предыдущая лемма (см. лемму 1 из [1]). В случае $(a,b)^\vee = \{q < q' < \cdots\}$ и $(a,b)^\wedge = \{p < p' < \cdots < s\}$, где $|(a,b)^\vee| = l \geq 1$ и $|(a,b)^\wedge| = m \geq 1$, как обычно, рассмотрим матрицу точного в точке $s$ неразложимого представления $U$ множества $\mathcal{P}$ и предполагая по индукции (которую ведем по числу $l+m$ с базой $l+m=2$) лемму справедливой для множества $\mathcal{P}\setminus s$, разложим ограничение $V = U\,|\,(\mathcal{P}\setminus s)$ в прямую сумму неразложимых $V = \bigoplus_i V^i$. Тогда представления $V^i$, заведомо не выделяющиеся прямыми слагаемыми из $U$, обязаны иметь тип ($M_1 - k$) при $k = 1, 3, \tilde{3}, 5$ либо ($M_8 - 2$) для подмножества вида $M_1 + p, M_1 + p', \ldots$, либо ($M_8^* - 2$) для подмножеств вида $q + M_1, q' + M_1, \ldots$. Следовательно, в полосе $s$ возникает матричная задача, определяемая такой гирляндой $G''$, которая получается из гирлянды $G'$ (см. доказательство леммы 3) заменой цепи $\cdots < \pi_n < \cdots < \pi_2 < \pi_1$ цепью $\cdots < \pi_n < \lambda_n < \lambda'_n < \cdots < \cdots \pi_2 < \lambda_2 < \lambda'_2 < \cdots < \pi_1 < \lambda_1 < \lambda'_1 < \cdots$, где полосы $\lambda_n, \lambda'_n, \ldots$ отвечают представлениям типа ($M_8^* - 2$) и допускают $\mathbb{C}$-элементарные преобразования строк. Очевидно, гирлянда $G''$ приводится столь же тривиально, как $G$ и $G'$, и шаг индукции проходит.

**Лемма 5.** *Множество $\mathcal{P}$ типа $M_1 + A^+ + B^+ + A^- + B^-$, где $M_1 = \{a, b\}$ — его правильное критическое подмножество и $N(a) = \{B^- < b < B^+\}$, $N(b) = \{A^- < a < A^+\}$, является точным тогда и только тогда, когда оно изоморфно или антиизоморфно одному из семи множеств $M_1$; $M_3, \ldots, M_7$; $M_{12}$.*

Поскольку $M_1$ — правильное подмножество, то $A^\pm$ и $B^\pm$ являются одинарными цепями, и лемма легко проверяется индукцией по размерности представлений с помощью дифференцирования по одинарной максимальной точке (и с использованием двойственности) с учетом явного вида уже описанных представлений указанных множеств.

Непосредственно из лемм 4, 5 и 2 вытекает

**Следствие 1.** *Однопараметрическое множество $\mathcal{P}$ типа $M_1+(a,b)^\wedge+(a,b)^\vee+A^++B^++A^-+B^-$, где $M_1, A^\pm, B^\pm$ — те же, что и выше, является точным тогда и только тогда, когда оно изоморфно или антиизоморфно одному из множеств $M_i$ при $i \neq 2$.*

Непосредственно из приведенного выше явного описания представлений точных множеств $M_i$ $(i \neq 2)$, вытекает следующий факт.

**Лемма 6.** *Пусть оснащенное множество $\mathcal{P}$ совпадает с одним из множеств $M_1 = \{a, b\}$, $M_3 = \{a < \xi; b\}$, $M_4 = \{a < \xi; b < \eta\}$, $M_5 = \{a < \xi < \eta; b\}$, $M_8 = \{a \prec p \succ b\}$, $M_9 = \{\xi > a \prec p \succ b\}$, $M_{11} = \{M_1 \prec p \prec q\}$. Тогда любое неразложимое (не обязательно точное) представление $U$ множества $\mathcal{P}$ удовлетворяет следующим условиям:*

*(a)* $U_a = U_b = 0$ *или* $U_a^+ + U_b^+ = U_0$ *при* $\mathcal{P} \neq M_9$;

$$(b)\ U_a = 0 \text{ или } \begin{cases} U_a^+ + U_b^+ = U_0 & \text{при любом } \mathcal{P} \\ \tilde{U}_a^+ + U_b = \tilde{U}_0 & \text{при } \mathcal{P} \neq M_8, M_9, M_{11}, \\ \tilde{U}_a^+ + U_p = \tilde{U}_0 & \text{при } \mathcal{P} = M_8, M_{11}, \\ \tilde{U}_\xi + U_p = \tilde{U}_0 & \text{при } \mathcal{P} = M_9. \end{cases}$$

Легко также проверить (см. [2], Приложение 1) следующий факт.

**Лемма 7.** *Пусть $U$ — точное неразложимое представление оснащенного множества конечного типа $\mathcal{P}$, совпадающего с одним из множеств $H_4 = \{a \prec c\}$, $H_5 = \{a \prec c; \xi\}$, $H_6 = \{a \prec d \prec c; \xi\}$. Тогда: $U_a^+ = U_0$ и $U_c = \tilde{U}_0$ при $\mathcal{P} = H_4$; $U_c^+ = U_a^+ + U_\xi = U_0$ при $\mathcal{P} = H_5, H_6$; $\tilde{U}_a^+ + U_c = \tilde{U}_0$ при $\mathcal{P} = H_6$.*

**Предложение 6.** *Однопараметрическое оснащенное множество $\mathcal{P}$, содержащее критическое подмноество $M_1 = \{a, b\}$, является точным тогда и только тогда, когда оно изоморфно или антиизоморфно одному из мноежств $M_i$ при $i \neq 2$.*

Для доказательства обозначим $\mathcal{P}_0 = M_1+(a,b)^\wedge+(a,b)^\vee+A^++B^++A^-+B^-$, где $A^\pm, B^\pm$ — те же, что и в лемме 5, и проведем индукцию по числу $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0|$. Случай $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ (база индукции) уже рассмотрен (следствие 1). Пусть $x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$ и $U$ — точное неразложимое представление множества $\mathcal{P}$ размерности $d$. Можем считать (см. лемму 1 из [1]) $x \in \max \mathcal{P}$ и $M_1 < x$. Так как $d_x \neq 0$, то $U_a + U_b \neq \tilde{U}_0$, причем поскольку $a \lhd x$ или $b \lhd x$, то также $U_a^+ \neq U_0$ или $U_b^+ \neq U_0$, откуда по лемме 1 $U_a \cap U_b = U_a^- = U_b^- = 0$ и, в частности, $M_1 = \min \mathcal{P}$.

Полагая $V = U \,|\, (\mathcal{P} \setminus x)$, разложим ограничение $V$ в прямую сумму неразложимых представлений $V = \bigoplus_a V^a$. Так как $S^a = \operatorname{Supp} V^a$ есть множество конечного типа или однопараметрическое при любом $\alpha$, то по предположению индукции каждое $S^a$, содержащее хотя бы одну двойную точку, изоморфно одному из множеств $M_i$ $(i = 1, 3, 4, 5, 8, 9, 11)$ либо $H_i$ $(i = 1, \dots, 6)$.

а) пусть $M_1 \lhd x$ (это автоматически выполняется, если $x$ — одинарная точка). Тогда $(V_a^\alpha)^+ + (V_b^\alpha)^+ \neq V_0^\alpha$ при всех $\alpha$, иначе $V^\alpha$ выделится прямым слагаемым из $U$. Рассмотрим любой индекс $\alpha$, для которого $S^\alpha \cap M_1 \neq \phi$. Тогда $S^\alpha \ncong M_i$ при $i \neq 9$, иначе по лемме 6 (a) $V_a^\alpha = V_b^\alpha = 0$, т.е. $a, b \notin S^\alpha$. По той же причине $S^\alpha \cong H_i$ при $i = 1, 2, 3$ (здесь $S^\alpha \cup M_1 \cong M_j$ для $j \in \{1, 3, 5\}$ и опять работает лемма 6 (a)). Далее, по лемме 7 $S^\alpha \ncong H_4, H_6$, значит для $S^\alpha$ остаются две возможности: $M_9$ и $H_5$. Легко проверить, что $\mathcal{P}$ может содержать не более одного подмножества $S^\alpha \cong M_9$ и не более одного $S^\beta \cong H_5$, пересекающееся с $M_1$, причем если оно содержит их оба, то $S^\beta \subset S^\alpha$. Таким образом, $V_a^\alpha = 0$ или $V_b^\alpha = 0$ вообще при всех $\alpha$, т.е. $d_a = 0$ или $d_b = 0$, что невозможно.

b) Пусть $x$ — двойная точка, $a \lhd x$ и $b \prec x$. Учитывая a), считаем подмножество $\Lambda = (a,b)^\wedge + (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$ цепью, состоящей лишь из двойных точек, где $x = \max \Lambda$. Кроме этого, $V_a^\alpha + V_b^\alpha \neq \tilde{V}_0^\alpha$ при всех $\alpha$, иначе $V^\alpha$ выделится слагаемым из $U$. Рассмотрим индекс $\alpha$ с условием $a \in S^\alpha$ (он существует, так как $d_a \neq 0$).

Предположим, что $(a,b)^\wedge \neq \phi$ и $p = \min (a,b)^\wedge$. Тогда $|A^+ + B^+| \leq 1$, поскольку $L_1, L_2 \not\subset \mathcal{P}$. Если $A^+ + B^+ = \phi$, то $S_\alpha$ изоморфно одному из множеств $M_1, M_8, M_{11}, H_1, H_4$, откуда по леммам 6 (b) и 7 $V_a^\alpha = 0$, т.е. $a \notin S^\alpha$, что противоречит предположению. Значит, $|A^+ + B^+| = 1$. Тогда в случае $A^+ = \xi$ и $B^+ = \phi$ имеем $\xi < y$ при любом $y > p$, иначе $\mathcal{P} \supset M_2$ (в частности, $\xi < x$), значит, $S^\alpha \cong M_1, M_3, M_8, M_9$, $H_1 = \{a\}$, $H_4 = \{a \prec p\}$, откуда по леммам 6 (b) и 7 $V_a^\alpha = 0$ и $a \notin S^\alpha$, что не так. А в случае $A^+ = \phi$, $B^+ = \xi$ ввиду условия $M_2 \not\subset \mathcal{P}$ имеем $a \lhd y$ при всяком $y > p$, более того, $\Lambda = \{p < x\}$ (при $p < y < x$ получится $p \lhd x$ и $b \lhd x$, что не так), т.е. $\mathcal{P} = M_9 + x$. Значит, пара точек $(b,x)$ является $B$-подходящей, и по предложению 1 из [1] $\operatorname{Ind} \mathcal{P} = \operatorname{Ind} \overline{\mathcal{P}} + \{D(a)\}$, где $\overline{\mathcal{P}}$ получается из $\mathcal{P}$ усилением отношения $b \prec x$. Однако в силу a) множество $\overline{\mathcal{P}}$ не является точным, значит, неточно и $\mathcal{P}$.

Предположим, что $(a,b)^\wedge = \phi$. Тогда $b + (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$ — вполне слабая цепь и $a \lhd y$, где $y = \min (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$. Ясно, что $S^\alpha \ncong M_8, M_9, M_{11}, H_4, H_5, H_6$. Кроме того, как уже отмечалось, при $S^\alpha \cong H_i$, где $i = 1,2,3$, имеем $S^\alpha \cup M_1 \cong M_j$ при $j \in \{1,3,5\}$. Значит, по лемме 6 (b) $V_a^\alpha = 0$ и $a \notin S^\alpha$, что дает противоречие и завершает доказательство предложения.

Остается описать точные множества, содержащие $M_2$, и их представления. Для описания представлений критического множества $M_2$ нужно продифференцировать его по одинарной точке, в результате чего получится множество, содержащее подмножество $M_1$. Так как все его точные подмножества и их представления уже известны, то интегрированием легко восстанавливаем представления $M_2$. Мы располагаем полным списком их матричных форм, однако не включаем в эту публикацию ввиду громоздкости. В частности, получаем

**Предложение 7.** *Критическое множество $M_2 = \{a < b < c; \xi\}$ имеет ровно 48 (с точностью до двойственности 25) типов неразложимых представлений, размерности которых совпадают с корнями формы Титса, перечисленными в Приложении 4 к [2]. Кроме них, оно имеет неразложимые представления только в размерностях, кратных мнимому корню $\mu$, почти все из которых (в любой фиксированной размерности) порождаются единственным $\mathbb{R}[X]$-представлением вида*

$$
\begin{array}{c|c|c|c|cc|}
 & a & b & c & \multicolumn{2}{c}{\xi} \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & i & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & X & \mathrm{i} & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}\,, \qquad \mu = \begin{matrix} 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & 2 \\ & 4 & \end{matrix}.
$$

**Предложение 8.** *Если точное оснащенное однопараметрическое множество $\mathcal{P}$ содержит критическое подмножество $M_2$, то $\mathcal{P} = M_2$.*

Доказательство приведено в [2] (стр. 30–31).

## §4. Представления множеств $L_1, \ldots, L_{15}$ (сводка результатов)

Используемая нами общая схема описания представлений множеств $L_1, \ldots, L_{15}$ аналогична рассмотренной выше для множеств $M_1, \ldots, M_{13}$ (§§1, 2, 3). Поэтому в данной статье ограничимся лишь сводкой соответствующих результатов, отсылая читателя за доказательствами к препринту [2] (§7).

**Предложение 9.** *С точностью до двойственности и перестановки одинарных точек $\omega,\nu$ критическое множество $L_1=\{a,\omega,\nu\}$ имеет 11 типов неразложимых представлений, выписанных (вместе с двойственными) в Приложении 2 к [2]. Там же указаны их размерности и числовые характеристики.*

*Замечание.* Почти все неразложимые представления множества $L_1$ (в любой фиксированной размерности) порождаются $\mathbb{R}[X]$-представлением вида:

$$\begin{array}{ccc} a & \omega & \nu \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{i} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{X} \\ \hline \end{array}, \qquad \mu = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & \end{array}.$$

**Предложение 10.** *С точностью до перестановки точек $\omega,\nu$ множества $L_3=\{a<\xi;\omega;\nu\}$, $L_4=\{a;\omega<\xi>\nu\}$, $L_3^*,L_4^*$ имеют по 6 типов точных в точке $\xi$ неразложимых представлений следующего вида:*

$$\begin{array}{llll}
L_3-1=(L_1-1)^\xi & L_3^*-1=(L_1-4)_\xi & L_4-1=(L_1-1)^\xi & L_4^*-1=(L_1-4^*)_\xi \\
L_3-3=(L_1-2)^\xi & L_3^*-2=(L_1-9)_\xi & L_4-3=(L_1-\tilde{3})^\xi & L_4^*-2=(L_1-10)_\xi \\
L_3-4=(L_1-9)^\xi & L_3^*-3=(L_1-\tilde{2}^*)_\xi & L_4-4=(L_1-10)^\xi & L_4^*-3=(L_1-3^*)_\xi \\
L_3-5=(L_1-4^*)^\xi & L_3^*-5=(L_1-1^*)_\xi & L_4-5=(L_1-4)^\xi & L_4^*-5=(L_1-1^*)_\xi \\
L_3-6=(L_1-5)^\xi & L_3^*-6=(L_1-5^*)_\xi & L_4-6=(L_1-6)^\xi & L_4^*-6=(L_1-6^*)_\xi
\end{array}$$

$(L_3-2)^*=(L_3^*-4)=\mathcal{A}$ *и* $(L_4-2)^*=(L_4^*-4)=\mathcal{B}$ *при*

$$\mathcal{A}=\begin{array}{c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{\xi} & \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{\omega} & \multicolumn{1}{c}{\nu} \\ \hline 1 & \vec{E}_n^{\uparrow} & 0 & E_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \cline{2-4} \vdots & & & \\ 0 & \overleftarrow{C}_n & E_{n+1} & E_{n+1} \\ \hline \end{array}; \qquad \mathcal{B}=\begin{array}{|c|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{\omega} & \multicolumn{1}{c}{\nu} & \multicolumn{1}{c}{\xi} \\ \hline C_{n+1} & E_{n+1}^{\uparrow} & E_{n+1}^{\uparrow} & 1 \\ & & & \vdots \\ \cline{1-3} & & & \vdots \\ \vec{E}_n & 0 & \overleftarrow{E}_n & 0 \\ \hline \end{array},$$

*где все элементы столбца $\xi$, кроме первого, равны 0 и* $C_n=\begin{pmatrix} iE_n \\ \hline 0\ldots01\end{pmatrix}$.

**Предложение 11.** *Каждое из множеств $L_5=\{a<\xi<\eta;\omega;\nu\}$, $L_6=\{a<\xi;(\omega,\nu)<\eta\}$, $L_7=\{a;(\omega,\nu)<\xi<\eta\}$, $L_8=\{a<\xi;\eta<(\omega,\nu)\}$, $L_9=\{\xi<a<\eta;\omega;\nu\}$, $L_{10}=\{a;\xi<(\omega,\nu)<\eta\}$ и им двойственных имеет ровно один тип точных в точках $\xi,\eta$ неразложимых представлений вида*

$$\begin{array}{llll}
(L_5)=(L_3-2)^\eta, & (L_6)=(L_1-1)^{\xi,\eta}, & (L_7)=(L_4-2)^\eta, & (L_8)=(L_1-4^*)_\xi^\eta, \\
(L_5^*)=(L_3^*-4)_\xi, & (L_6^*)=(L_1-1^*)_{\xi,\eta}, & (L_7^*)=(L_4^*-4)_\xi, & (L_8^*)=(L_1-4)_\eta^\xi,
\end{array}$$

*и* $(L_i)=(L_1-i)_\xi^\eta$ *при* $i=9,10$.

*Замечание 1.* У множеств $L_5^*$ и $L_7^*$ точка $\xi$ не минимальна, но смысл операции продолжения представления на все множество сохраняется таким же, как и в § 2 при $\xi\in\min\mathcal{P}$.

*Замечание 2.* По свойству операции пополнения особым отношением (см. [1], §2), неразложимые представления множества $L_{14}(L_{14}^*)$ совпадают с неразложимыми представлениями множества $L_8^*(L_8)$, отличными от $P(\eta)(P(\xi))$.

**Предложение 12.** *Множества $L_{11} = \{a \prec p > \omega; \nu\}$ и $L_{11}^*$ имеют по 15 типов точных в точке $p$ неразложимых представлений, находящихся во взаимно однозначном соответствии с точными в точке $p$ корнями формы Титса, перечисленными в Приложении 3 к [2].*

**Предложение 13.** *Множества $L_{12} = \{q \prec a \prec p > \omega > q; \nu\}$ и $L_{13} = \{\omega > q \prec a \prec p > \nu\}$ имеют по одному типу точных в обеих точках $p, q$ неразложимых представлений типа $(L_{11}^* - 8)^q$ и $(L_{11}^* - 7)^q$ соответственно, а точные в точках $p, q$ неразложимые представления множества $L_{15}$ совпадают с точными неразложимыми представлениями множества $L_{13}$.*

**Предложение 14.** *Критическое множество $L_2 = \{a < b; \xi < \eta\}$, где $a, b$ — двойные точки, имеет ровно 48 (с точностью до двойственности 26) типов неразложимых представлений, размерности которых совпадают с корнями формы Титса, перечисленными в Приложении 4 к [2]. Кроме них, оно имеет неразложимые представления лишь в размерностях, кратных мнимому корню $\mu$, почти все из которых (в любой фиксированной размерности) порождаются единственным $\mathbb{R}[X]$-представлениями вида*

$$\begin{array}{cccc} a & b & \xi & \eta \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 1 \\ 0 & X & 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \qquad \mu = \begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ & 3 & \end{array}.$$

**Предложение 15.** *Однопараметрическое оснащенное множество $\mathcal{P}$, содержащее критическое подмножество $L_1$ или $L_2$, является точным тогда и только тогда, когда оно изоморфно или антиизоморфно одному из множеств $L_i$ при $i = 1, \dots, 15$.*

Основные теоремы 1 и 2, сформулированные в [1], вытекают из описанной выше полной классификации представлений точных множеств $M_i, L_j$ (основные факты которой сконцентрированы в предложениях 1–5,7,9–14) и из сопоставления ее с результатом непосредственного вычисления корней этих множеств. Теорема 3 из [1] является прямым следствием предложений 6,8,15.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Забарило А.В., Завадский А.Г., *Представления однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств, I* Математичні Студії. – 1999. – Т.11, 1. – С.3–16.

2. Забарило А.В., Завадский А.Г., *Представления однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств* Препринт 98.1, Киевск. Гос. Технич. Ун-т Стр-ва и Архитект., Киев, 1998. – P.1–44.

3. Dlab V., Ringel C.M., *Indecomposable representations of graphs and algebras* Mem. Amer. Math. Soc. – 1976. – V.173.

4. Dlab V., Ringel C.M., *Normal Forms of Real Matrices with Respect to Complex Similarity* Linear Algebra and its appl. – 1977. – V.17. – P.107–124.

5. Назарова Л.А., *Представления четвериады* Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т.31, №6. – С.1361–1377.

6. Завадский А.Г., Назарова Л.А., *Частично упорядоченные множества ручного типа* Матричные задачи, Киев. – 1977. – С.122–143.

7. Бондаренко В.М., Завадский А.Г., Назарова Л.А., *О представлениях ручных частично упорядоченных множеств* Представления и квадратичные формы, Киев. – 1979. – С.75–106.

Кафедра высшей математики, Киевский государственный технический университет строительства и архитектуры,
пр. Воздухофлотский, 31, Киев, 252680.
zavad@public.icyb.kiev.ua

*Получено 1.09.1998*