УДК 512.64

СПІЛЬНІ ДІЛЬНИКИ ТА СПІЛЬНІ ФАКТОРИЗАЦІЇ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

В.Р. Зеліско, М.І. Кучма

V.R. Zelisko, M.I. Kuchma. *Common divisors and common factorization of matrix polynomials*, Matematychni Studii, **11**(1999) 111–118.

Necessary and sufficient conditions of existence common monic divisors with the given Smith forms of matrix polynomials and of common factorization symmetric matrices over polynomial rings with involution are found.

В.Р. Зелиско, М.И. Кучма. *Общие делители и общие факторизации матричных многочленов* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 2. – С.111–118.

Найдены необходимые и достаточные условия существования общих унитальных делителей с заданными формами Смита матричных многочленов и общей факторизации симметрических матриц над кольцами многочленов с инволюцией.

Задача про спільні унітальні дільники матричних многочленів вивчалась у працях [1-3]. У роботі [2] при певних обмеженнях вказано умови існування спільних унітальних дільників із заданими формами Сміта неособливих матричних многочленів. Запропоновано метод його знаходження у випадку, якщо шуканий дільник існує.

У першій частині статті встановлено критерій існування спільних унітальних дільників із заданими формами Сміта матричних многочленів над полем комплексних чисел.

У другій частині роботи розглядаються спільні факторизації симетричних матричних многочленів над кільцем многочленів з інволюцією. Вказуються необхідні і достатні умови існування спільних факторизацій двох симетричних матриць із заданими формами Сміта.

1.

Нехай $\mathbb{C}[x]$ — кільце многочленів над $\mathbb{C}$. Розглянемо неособливі матричні многочлени

$$A_1(x)=\sum_{i=0}^{p} A_i^{(1)}x^{p-i},\quad A_2(x)=\sum_{j=0}^{q} A_j^{(2)}x^{q-j}, \tag{1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A23.

$A_i^{(1)}, A_j^{(2)} \in M_n(\mathbb{C})$, $i = 0, 1, \ldots, p$, $j = 0, 1, \ldots, q$. Матричний многочлен $A_1(x)$ називають регулярним /унітальним/, якщо $|A_0^{(1)}| \neq 0$ /$A_0^{(1)} = E$ – одинична матриця/. Кажуть, що матричні многочлени (1) мають спільний лівий дільник, якщо вони зображаються у вигляді

$$A_1(x) = B(x)\overline{A}_1(x), \quad A_2(x) = B(x)\overline{A}_2(x), \tag{2}$$

де $B(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ і $\deg\det B(x) \geq 1$.

Відомо [4,5], що кожна неособлива матриця $A_1(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ правими елементарними перетвореннями зводиться до нормальної форми Ерміта.

Надалі позначатимемо через S_{A_1} і S_{A_2} форми Сміта матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$, відповідно:

$$S_{A_i} = P_i(x)A_i(x)Q_i(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1^{(i)}(x), \ldots, \varepsilon_n^{(i)}(x)), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

де $P_i(x)$, $Q_i(x)$ — деякі оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці.

Як показано в [6,7], неособливі матричні многочлени $A_1(x)$ і $A_2(x)$ напівскалярно еквівалентні трикутним матрицям з головними діагоналями S_{A_1} і S_{A_2}, відповідно, тобто існують матриці $C \in GL_n(\mathbb{C})$ і $Q_i(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$T_{A_i}(x) = CA_i(x)Q_i(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(i)}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}^{(i)}(x) & \varepsilon_2^{(i)}(x) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(i)}(x) & a_{n2}^{(i)}(x) & \ldots & \varepsilon_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

причому $\varepsilon_q^{(i)}(x) | a_{jq}^{(i)}(x)$, і $\deg a_{jq}^{(i)}(x) < \deg \varepsilon_j^{(i)}(x)$, якщо $\deg \varepsilon_j^{(i)}(x) > 0$, і $a_{jq}^{(i)}(x) = 0$, якщо $\deg \varepsilon_j^{(i)}(x) = 0$, тобто $\varepsilon_j^{(i)}(x) = 1$, j, $q = 1, \ldots, n$, $j > q$.

Нехай $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ — d-матриця, тобто $\varphi_j(x)$ — унітальні многочлени і $\varphi_j(x) \mid \varphi_{j+1}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Припустимо, що $\Phi(x)$ є спільним дільником форм Сміта S_{A_1} і S_{A_2} матричних многочленів $A_1(x)$ і $A_2(x)$, причому $\deg\det\Phi(x) = ns$, тобто

$$S_{A_1} = \Phi(x)\Psi_1(x), \quad S_{A_2} = \Phi(x)\Psi_2(x). \tag{4}$$

Через $V_1(\Phi)$ і $V_2(\Phi)$, відповідно, позначимо ядра визначальних матриць $W_1(\Phi)$ і $W_2(\Phi)$, породжених d-матрицею $\Phi(x)$ [8]:

$$V_i(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \dfrac{\varphi_2 k_{21}^{(i)}}{(\varphi_2, \varepsilon_1^{(i)})} & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\varphi_n k_{n1}^{(i)}}{(\varphi_n, \varepsilon_1^{(i)})} & \dfrac{\varphi_n k_{n2}^{(i)}}{(\varphi_n, \varepsilon_2^{(i)})} & \ldots & \dfrac{\varphi_n k_{nn-1}^{(i)}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1}^{(i)})} & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

де $(\varphi_j, \varepsilon_q^{(i)})$ — найбільший спільний дільник многочленів $\varphi_j(x)$ і $\varepsilon_q^{(i)}(x)$, $j = 1, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, n$, $j \geq q$;

$$k_{jq}^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\varphi_j, \varepsilon_q^{(i)}) = \varphi_q, \\ k_{jq0}^{(i)} + k_{jq1}^{(i)}x + \cdots + k_{jqh_{jq}}^{(i)}x^{h_{jq}^{(i)}}, & \text{якщо } (\varphi_j, \varepsilon_q^{(i)}) \neq \varphi_q; \end{cases}$$

$h_{jq}^{(i)} = \deg \frac{(\varphi_j, \varepsilon_q^{(i)})}{\varphi_q} - 1$, $j = 2, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, n-1$, $j > q$; $k_{jqs}^{(i)}$ — попарно змінні величини, які приєднуються до поля $\mathbb{C}$, $s = 0, 1, \ldots, h_{jq}^{(i)}$.

Теорема 1. *Нехай форми Сміта S_{A_1} і S_{A_2} матричних многочленів $A_1(x)$ і $A_2(x)$ зображаються у вигляді (4). Матричні многочлени $A_1(x)$ і $A_2(x)$ мають спільний унітальний дільник $B(x)$ степеня s з формою Сміта $\Phi(x)$, тоді і тільки тоді, коли трикутні форми Ерміта матриць $F_{A_1} = P_1(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ і $F_{A_2} = P_2(x)^{-1}V_2(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ рівні, тобто $T_{F_{A_1}}(x) = T_{F_{A_2}}(x) = T(x)$, при деяких значеннях параметрів $k_{jq}^{(1)}$ і $k_{jq}^{(2)}$ матриць $V_1(\Phi)$ і $V_2(\Phi)$ з (5), і* $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$, *де*

$$M_T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & \dots & 0 \\ T_1 & T_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_s & T_{s-1} & \dots & T_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_l & T_{l-1} & \dots & T_{l-s} \end{pmatrix},$$

$$T(x) = T_0x^l + T_1x^{l-1} + \dots + T_l, \quad T_i \in M_n(\mathbb{C}).$$

Доведення. Необхідність. Для матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$ існують відповідні оборотні матриці $P_i(x)$, $Q_i(x)$, $i = 1, 2$, такі, що мають місце співвідношення (3).

Оскільки існує спільний лівий унітальний дільник $B(x)$ із формою Сміта $\Phi(x)$ із матричних многочленів $A_i(x)$, $i = 1, 2$, то, згідно [7], це означає, що матриці $F_{A_i} = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)$, $i = 1, 2$, регуляризуються справа, тобто правоеквівалентні унітальному матричному многочлену $B(x)$ степеня s. Зважаючи на лему 2 [2] трикутні форми Ерміта матриць F_{A_i}, $i = 1, 2$, рівні при деяких значеннях параметрів у матрицях $V_i(\Phi)$, $i = 1, 2$, відповідно, тобто $T_{F_{A_1}}(x) = T_{F_{A_2}}(x) = T(x)$, і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.

Достатність. Враховуючи співвідношення (3),(4), зобразимо матричні многочлени $A_i(x)$, $i = 1, 2$, у вигляді

$$A_i(x) = P_i(x)^{-1}\Phi(x)Y_i^{-1}Y_i\Psi_i(x)Q_i(x)^{-1}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

де матриці Y_i визначені в роботі [7]. Зважаючи на рівності

$$\Phi(x)Y_i^{-1} = V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x), \quad i = 1, 2,$$

із співвідношень (6) отримаємо, що

$$A_i(x) = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)G_i(x), \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

де $G_i(x) = Y_i\Psi_i(x)Q_i(x)^{-1}$. Згідно леми 2 [2], маємо, що матриці F_{A_i}, $i = 1, 2$, правоеквівалентні унітальному матричному многочлену $B(x)$ степеня s, тобто існують матриці $R_i(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, $i = 1, 2$, такі, що $F_{A_i} = B(x)R_i(x)$. Тоді з (7) маємо

$$A_i(x) = B(x)\overline{A}_i(x), \quad i = 1, 2,$$

де $\overline{A}_i(x) = R_i(x)^{-1}G_i(x)$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай форми Сміта S_{A_1} і S_{A_2} матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$ мають вигляд (4), де $\Psi_1(x)$ і $\Psi_2(x)$ — d-матриці. Матричні многочлени $A_1(x)$ і $A_2(x)$ зображаються у вигляді (2), причому $S_B = \Phi(x)$, $S_{\bar{A}_1} = \Psi_1(x)$, $S_{\bar{A}_2} = \Psi_2(x)$, тоді і тільки тоді, коли трикутні форми Ерміта матриць $F_{A_1} = P_1(x)^{-1}\Phi(x)$ і $F_{A_2} = P_2(x)^{-1}\Phi(x)$ рівні, тобто $T_{F_{A_1}}(x) = T_{F_{A_2}}(x) = T(x)$, і* $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$. *У випадку, якщо шуканий дільник існує, то він єдиний із заданою формою Сміта $\Phi(x)$.*

Доведення випливає із теореми 1 і того, що $V_i(\Phi) = E$, $i = 1, 2,$ — одиничні матриці, оскільки $\Psi_i(x)$, $i = 1, 2$ — d-матриці.

Єдиність спільного унітального дільника $B(x)$ із формою Сміта $\Phi(x)$ випливає із [6].

У випадку, якщо шуканий спільний дільник існує, то метод його знаходження є таким же як у [2].

2. і і і

Нехай $\mathbb{C}[x]$ — кільце многочленів з інволюцією ∇, визначеною у роботі [9], і перенесеною на кільце матриць $M_n(\mathbb{C}[x])$ наступним чином:

$$A(x)^{\nabla} = ||a_{ij}(x)||^{\nabla} = ||a_{ji}(x)^{\nabla}||,$$

де матриця $A(x)$, зокрема, вигляду (1). Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$. Спільною факторизацією симетричних матричних многочленів $A_1(x)$ і $A_2(x)$ з кільця $M_n(\mathbb{C}[x])$ називатимемо їх зображення у вигляді

$$A_1(x) = B(x)C_1(x)B(x)^{\nabla}, \quad A_2(x) = B(x)C_2(x)B(x)^{\nabla}, \tag{8}$$

де $B(x)$ — регулярна /унітальна/, $C_1(x)$, $C_2(x)$ — симетричні неособливі матриці, тобто матриці $A_1(x)$ і $A_2(x)$ одночасно діляться зліва на $B(x)$ і справа на $B(x)^{\nabla}$.

Теорема 2. *Нехай $\Phi(x)$ — d-матриця,* $\deg\det\Phi(x) = ns$ *і $\Phi(x)$ є дільником форм Сміта S_{A_1} і S_{A_2} матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$. Для симетричних матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$ існує спільна факторизація (8), у якій $B(x)$ — унітальна матриця степеня s з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C_1(x)$, $C_2(x)$ — неособливі симетричні матриці, тоді і тільки тоді, коли симетричні матриці*

$$V_1(\Phi)P_1(x)A_1(x)P_1(x)^{\nabla}V_1(\Phi)^{\nabla}, \quad V_2(\Phi)P_2(x)A_2(x)P_2(x)^{\nabla}V_2(\Phi)^{\nabla}$$

діляться одночасно зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$, а трикутні форми Ерміта матриць $F_{A_1} = P_1(x)^{-1}V_1(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ і $F_{A_2} = P_2(x)^{-1}V_2(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ рівні, тобто $T_{F_{A_1}}(x) = T_{F_{A_2}}(x) = T(x)$, при деяких значеннях параметрів матриць $V_1(\Phi)$ і $V_2(\Phi)$ з (5), і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.

Доведення. Необхідність. Нехай для матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$, має місце факторизація (8). Із результатів робіт [6,7] випливає, що існують матриці $C \in GL_n(\mathbb{C})$ і $Q_B(x), Q_i(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, $i = 1, 2$, такі, що

$$\begin{aligned} CA_i(x)Q_i(x) = CB(x)Q_B(x)Q_B(x)^{-1}C_i(x)[Q_B(x)^{\nabla}]^{-1}\times \\ \times Q_B(x)^{\nabla}B(x)^{\nabla}C^{\nabla}[C^{\nabla}]^{-1}Q_i(x), \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$CA_i(x)Q_i(x) = T_i(x)S_{A_i}, \quad CB(x)Q_B(x) = T_B(x)\Phi(x), \tag{10}$$

а $T_B(x)$, $T_i(x)$, $i = 1, 2$, є нижніми трикутними оборотніми над $\mathbb{C}[x]$ матрицями.

Співвідношення (9) фактично має вигляд

$$CA_i(x)C^{\nabla} = T_B(x)\Phi(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}T_B(x)^{\nabla}, \tag{11}$$

де

$$D_i(x) = Q_B(x)^{-1}C_i(x)[Q_B(x)^{\nabla}]^{-1}, \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

є симетричними матрицями. Домножуючи рівність (11) зліва і справа на оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $T_i(x)^{-1}$ і $[T_i(x)^{\nabla}]^{-1}$, $i = 1, 2$, відповідно, отримаємо

$$T_i(x)^{-1}CA_i(x)C^{\nabla}[T_i(x)^{\nabla}]^{-1} = T_i(x)^{-1}T_B(x)\Phi(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}T_B(x)^{\nabla}[T_i(x)^{\nabla}]^{-1}. \tag{13}$$

Легко бачити, що матриці $P_i(x) = T_i(x)^{-1}C$, $i = 1, 2$, є лівими перетворюючими матрицями до відповідних форм Сміта S_{A_i} матриць $A_i(x)$.

Оскільки для матриць $A_i(x)$, $i = 1, 2$, існує спільна факторизація, то це означає, що є виділення з $A_i(x)$, $i = 1, 2$, спільного унітального множника $B(x)$, тобто матриці $P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)$, $i = 1, 2$, правоеквівалентні до матриці $B(x)$. Тому існують оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $R_i(x)$, $i = 1, 2$, такі, що

$$P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x) = B(x), \quad i = 1, 2. \tag{14}$$

Із рівностей (10) і (14) маємо

$$C^{-1}T_B(x)\Phi(x)Q_B(x)^{-1} = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x), \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

Домножуючи співвідношення (15) зліва на $P_i(x) = T_i(x)^{-1}C$, $i = 1, 2$, і справа на $Q_B(x)$, одержимо

$$T_i(x)^{-1}T_B(x)\Phi(x) = V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x)Q_B(x), \quad i = 1, 2. \tag{16}$$

Зважаючи на (12) і (14), рівності (13) матимуть вигляд:

$$P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla} = V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)R_i(x)C_i(x)R_i(x)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}[V_i(\Phi)^{\nabla}]^{-1}, \quad i = 1, 2, \tag{17}$$

Позначимо $R_i(x)C_i(x)R_i(x)^{\nabla} = W_i(x)$, $i = 1, 2$. Симетричні матриці $W_i(x)$ є многочленними. Із співвідношень (17) матриці $W_i(x)$ мають вигляд

$$W_i(x) = \Phi(x)^{-1}V_i(\Phi)P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla}[\Phi(x)^{\nabla}]^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Достатність. Нехай матриці $V_i(\Phi)P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla}$, $i = 1, 2$, діляться одночасно зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$, тобто

$$V_i(\Phi)P_i(x)A_i(x)P_i(x)^{\nabla}V_i(\Phi)^{\nabla} = \Phi(x)W_i(x)\Phi(x)^{\nabla}, i = 1, 2,$$

при деяких симетричних матрицях $W_i(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$. З останніх рівностей маємо, що

$$A_i(x) = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)W_i(x)\Phi(x)^{\nabla}[V_i(\Phi)^{\nabla}]^{-1}[P_i(x)^{\nabla}]^{-1}, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Оскільки трикутні форми Ерміта матриць $F_{A_i} = P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)$, $i = 1,2$, рівні при деяких значеннях параметрів матриць $V_i(\Phi)$, то це означає, що ці матриці правоеквівалентні до матриці $B(x)$, тобто існують такі оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $Z_i(x)$, $i = 1,2$, що $P_i(x)^{-1}V_i(\Phi)^{-1}\Phi(x)Z_i(x) = B(x)$, $i = 1,2$, — унітальна многочленна матриця степеня s із формою Сміта $\Phi(x)$.

Тоді із рівностей (18) одержуємо

$$A_i(x) = B(x)Z_i(x)^{-1}W_i(x)[Z_i(x)^{\nabla}]^{-1}B(x)^{\nabla}, \quad i = 1,2. \tag{19}$$

Позначимо $C_i(x) = Z_i(x)^{-1}W_i(x)[Z_i(x)^{\nabla}]^{-1}$, $i = 1,2$. Тоді симетричні матриці $C_i(x)$, $i = 1,2$, є многочленними. Тому з рівностей (19) отримуємо спільну факторизацію вигляду (8).

Теорему доведено.

Нехай форми Сміта матричних многочленів $A_i(x)$, $i = 1,2$, зображаються у вигляді

$$S_{A_i} = \Phi(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}, \tag{20}$$

де $D_i(x)$, $i = 1,2$ — d-матриці, причому $\deg\det\Phi(x) = ns$. Відповідну спільну факторизацію вигляду (8) матриць $A_i(x)$, $i = 1,2$, для форм Сміта яких мають місце співвідношення (20), називатимемо спільною допустимою факторизацією. Відомо [6,7], що існують оборотні матриці C над $\mathbb{C}$ і $Q_i(x)$, $i = 1,2$, над $\mathbb{C}[x]$ такі, що

$$CA_i(x)Q_i(x) = T_{A_i}(x), \quad i = 1,2,$$

де $T_{A_i}(x)$, $i = 1,2$, — нижні трикутні матриці з головними діагоналями S_{A_i}. Враховуючи (20), легко бачити, що трикутні матриці $T_{A_i}(x)$, $i = 1,2$, можна зобразити у вигляді добутку

$$T_{A_i}(x) = F_i(x)D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}, \quad i = 1,2, \tag{21}$$

де $F_i(x)$ — трикутні матриці з головними діагоналями $\Phi(x)$. За допомогою правих елементарних перетворень матриці $F_i(x)$, $i = 1,2$, зведемо до форм Ерміта:

$$T_i(x) = F_i(x)U_i(x), \quad i = 1,2,$$

де $U_i(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$. Тоді (21) прийме вигляд

$$T_{A_i}(x) = T_i(x)Z_i(x), \tag{22}$$

де $Z_i(x) = U_i(x)^{-1}D_i(x)\Phi(x)^{\nabla}$.

Теорема 3. *Нехай форми Сміта S_{A_1} і S_{A_2} матриць $A_1(x)$, $A_2(x)$ зображаються у вигляді (20). Для симетричних матриць $A_1(x)$, $A_2(x)$ існує спільна допустима факторизація вигляду (8), в якій $B(x)$ — унітальна матриця степеня s з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C_1(x)$, $C_2(x)$ — неособливі симетричні матриці з формами Сміта $S_{C_1} = D_1(x)$, $S_{C_2} = D_2(x)$, відповідно, тоді і тільки тоді, коли в (22) $T_1(x) = T_2(x) = T(x)$ і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$. Для кожних фіксованих розкладів (20) така спільна допустима факторизація єдина.*

Доведення. Необхідність. Оскільки для матриць $A_i(x)$, $i = 1,2$, існує спільна допустима факторизація (8), то згідно результатів роботи [10] матриці $V_i(\Phi) =$

E, $i = 1,2$, – одиничні матриці, а за теоремами 1, 2 маємо, що $T_1(x) = T_2(x) = T(x)$ і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.

Достатність. Нехай для форм Сміта матриць $A_i(x)$, $i = 1,2$, маємо факторизації (20). Зважаючи, на наслідок з теореми 1 маємо, що $V_i(\Phi) = E$, $i = 1,2$, — одиничні матриці.

Доведемо, що матриці $P_i(x)A_i(x)P_i(x)^\nabla$, $i = 1,2$, одночасно діляться зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^\nabla$, тобто

$$P_i(x)A_i(x)P_i(x)^\nabla = \Phi(x)W_i(x)\Phi(x)^\nabla, \quad i = 1,2,$$

при деяких симетричних многочленних матрицях $W_i(x)$.

Справді, враховуючи співвідношення (3), отримаємо

$$W_i(x) = \Phi(x)^{-1}P_i(x)A_i(x)Q_i(x)Q_i(x)^{-1}P_i(x)^\nabla[\Phi(x)^\nabla]^{-1} =$$
$$= \Phi(x)^{-1}S_{A_i}Q_i(x)^{-1}P_i(x)^\nabla[\Phi(x)^\nabla]^{-1}, \quad i = 1,2.$$

Зважаючи на рівності (20) і $D_i(x)\Phi(x)^\nabla = \Phi(x)^\nabla D_i(x)$, $i = 1,2$, маємо

$$W_i(x) = D_i(x)\Phi(x)^\nabla Q_i(x)^{-1}P_i(x)^\nabla[\Phi(x)^\nabla]^{-1} = \Phi(x)^\nabla H_i(x)[\Phi(x)^\nabla]^{-1}, \quad i = 1,2,$$

де $H_i(x) = D_i(x)Q_i(x)^{-1}P_i(x)^\nabla = ||h^i_{kj}||, \quad k,j = 1,\ldots,n.$

Легко бачити, що $h^i_{jj} \in \mathbb{C}[x]$, $j = 1,\ldots,n$, і $t^i_{kj} = \frac{\varphi_k^\nabla h^i_{kj}}{\varphi_j^\nabla} \in \mathbb{C}[x]$ при $k > j$, $i = 1,2$. Оскільки матриці $W_i(x) = W_i(x)^\nabla$, то до $\mathbb{C}[x]$ належить всі інші елементи матриці $W_i(x)$, $i = 1,2$. Згідно теореми 2 для матриць $A_i(x)$, $i = 1,2$, існує спільна допустима факторизація.

Єдиність спільної факторизації (8) випливає із результатів [7] і того, що ця спільна факторизація є допустимою, а спільний множник $B(x)$ в ній унітальний.

Теорему доведено.

Зазначимо, що умовами існування спільної допустимої факторизації симетричних матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$ є умови виділення спільного унітального дільника $B(x)$ з заданими формами Сміта матричних многочленів $A_1(x)$ і $A_2(x)$.

Теорема 4. *Нехай форма Сміта, наприклад S_{A_1}, матриці $A_1(x)$, зображається у вигляді (20). Для матричних многочленів $A_1(x) = A_1(x)^\nabla$, $A_2(x) = A_2(x)^\nabla$ існує спільна факторизація (8), в якій спільний множник $B(x)$ — унітальна матриця степеня s з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C_1(x) = C_1(x)^\nabla$ – неособлива матриця з формою Сміта $S_{C_1} = D_1(x)$, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця $V_2(\Phi)P_2(x)A_2(x)P_2(x)^\nabla V_2(\Phi)^\nabla$ ділиться одночасно зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^\nabla$ і трикутні форми Ерміта матриць $F_{A_1} = P_1(x)^{-1}\Phi(x)$ і $F_{A_2} = P_2(x)^{-1}V_2(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ рівні при деяких значеннях параметрів матриці $V_2(\Phi)$, тобто $T_{F_{A_1}}(x) = T_{F_{A_2}}(x) = T(x)$, і $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.*

Доведення теореми випливає із теорем 2 і 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Gohberg I., Kaashoek M.A., Lerer L., Rodman L. *Common Multiples and Common Divisors of Matrix Polynomials* Indiana University Mathematics Journal. – 1981. – Vol.30, 3. – P.321–356.
2. Петричкович В.М., Прокіп В.М., Прухницький Ф.А. *Про спільні унітальні дільники із заданою канонічною діагональною формою матричних многочленів* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1994. – Т.37. – С.28–32.
3. Прокіп В.М. *Про спільні унітальні дільники многочленних матриць* Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т.40, 3. – С.20–24.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. Newman M. Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 244 p.
6. Петричкович В.М. *Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц* Укр. мат. журн. – 1990. –Т.42, 5. – С.644–649.
7. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
8. Казимирский П.С., Щедрик В.П. *О решениях матричных многочленных односторонних уравнений* ДАН СССР. – 1989. – Т.304, 2. – С.271–274.
9. Любачевский Б.Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. 1* Сибирск. мат. журн. – 1973. – Т.14,2. – С.337–356.
10. Зеліско В.Р. *Допустимі факторизації регулярних симетричних матриць над кільцями многочленів і квазімногочленів з інволюцією* Алгебра і топологія, Львів. – 1996. – С.94–103.

Львівський державний університет, механіко-математичний факультет,

Львів, 290602, вул. Університетська 1.

Надійшло 17.09.1998