УДК 517.98

СИНГУЛЯРНІ ЗБУРЕННЯ ЗАМКНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Я. Микитюк, Ю. Джала

Ya. Mykytyuk, Yu. Djala. *Singular perturbations of closed operators*, Matematychni Studii, **11**(1999) 53–62.

We study properties of closed operators T, which act in the Hilbert space and which are specially defined by sums $S \hat{+} V$, where $S: H \to H$ is an unbounded closed densely defined operator acting from H into a Hilbert space $H_S^- \supset H$. We obtain a generalisation of the Krein formula for the case of closed operators

Я. Микитюк, Ю. Джала. *Сингулярные возмущения замкнутых операторов* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 1. – С.53–62.

Изучаются свойства замкнутых операторов T, которые действуют на гильбертовом пространстве и специально определяются суммами $S \hat{+} V$, где $S: H \to H$ — неограниченный замкнутый плотно определенный оператор, действующий из H в гильбертовое пространство $H_S^- \supset H$. Получено обобщение формулы Крейна в случае замкнутого оператора

В монографії [1] вивчаються оператори, що евристично задані формулою

$$L = -\Delta + \sum_{y \in Y} \lambda_y \delta_y, \tag{1}$$

де Δ — самоспряжений лапласіан в $L_2(\mathbb{R}^n)$ $(n = 1, 2, 3)$ з областю визначення $H_2^2(\mathbb{R}^n)$, Y — дискретна (скінченна або зліченна) підмножина в $\mathbb{R}^n$, λ_y — константа зв'язку, а δ_y — це δ-функція Дірака в точці y (тобто одинична міра, що зосереджена в точці y). Строгий математичний підхід до операторів вигляду (1) був вперше викладений в [2] і полягав у використанні теорії самоспряжених розширень. В даній роботі ми хочемо розглянути абстрактний варіант цієї проблеми і, зокрема, вивчити зв'язок між сингулярними збуреннями та теорією розширень замкнених операторів. Наш підхід до даної задачі склався в результаті осмислення робіт [3-5], ідеями яких ми скористалися у тій чи іншій мірі.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A55.

1.

Нехай H — гільбертів простір з скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Якщо S — лінійний, замкнений, необмежений, щільно заданий оператор в H, то через H_S^+ ми будемо позначати область визначення $\mathcal{D}(S)$ оператора S, яка розглядається як гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f \mid g)_S \stackrel{\text{def}}{=} (f \mid g) + (Sf \mid Sg). \tag{2}$$

Розглядаючи H_S^+ в якості позитивного, а H в якості нульового простору, можна побудувати [6, стор.17] негативний простір H_S^-, що задається як поповнення H за негативною нормою

$$\|f\|_{H_S^-} = \sup_{u \in H_S^+} \frac{|(f \mid u)|}{\|u\|_{H_S^+}}.$$

Домовимося, що символом $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_S$ ми будемо позначати продовження за неперервністю з $H \times H_S^+$ на $H_S^- \times H_S^+$ скалярного добутку простору H. Простір H_S^- ми ототожнюємо з простором $(H_S^+)'$ всіх антилінійних неперервних функціоналів на H_S^+. Через $\hat{S}$ позначимо оператор з $\mathcal{B}(H, H_{S^*}^-)$, що є спряженим до оператора $S^*|_{H_{S^*}^+}$, тобто

$$\langle \hat{S} f \mid g \rangle_{S^*} = (f \mid S^* g), \quad f \in H, g \in H_{S^*}^+. \tag{3}$$

Тут і далі $\mathcal{B}(X, Y)$ — банахів простір всіх лінійних, неперервних, всюди заданих операторів, що діють з банахового простору X в банахів простір Y.

Очевидно, що

$$\hat{S} f = Sf, \quad f \in H_S^+. \tag{4}$$

Твердження 1. *Нехай $\mathcal{I}$ — оператор вкладення простору H в простір $H_{S^*}^-$ і $\zeta \in \rho(S)$ ($\rho(S)$ — резольвентна множина оператора S). Тоді оператор $\hat{S} - \zeta \mathcal{I}$ має обернений, який належить $\mathcal{B}(H_{S^*}^-, H)$. Крім того,*

$$(\hat{S}_\zeta f \mid g) = \langle f \mid S_{\bar{\zeta}}^* g \rangle_{S^*}, \quad f \in H_{S^*}^-, g \in H,$$

$$\hat{S}_\zeta|_H = S_\zeta, \tag{5}$$

де

$$S_\zeta \stackrel{\text{def}}{=} (S - \zeta I)^{-1}, \quad S_{\bar{\zeta}}^* \stackrel{\text{def}}{=} (S^* - \bar{\zeta} I)^{-1} \quad \hat{S}_\zeta \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{S} - \zeta \mathcal{I})^{-1}. \tag{6}$$

Доведення. Задамо оператор $R \in \mathcal{B}(H, H_{S^*}^+)$ рівністю $Rf = S_{\bar{\zeta}}^* f$, $f \in H$. Враховуючи (3) і (4), легко переконатися, що для оператора R^* виконуються рівності

$$R^*(\hat{S} - \zeta \mathcal{I}) f = f, \quad f \in H, \qquad (\hat{S} - \zeta \mathcal{I}) R^* g = g, \quad g \in H_{S^*}^-,$$

з яких очевидним чином випливає справедливість твердження 1.

Означення 1. Якщо V — лінійний, щільно заданий оператор, який діє з H в $H^-_{S^*}$, то через $S\hat{+}V$ позначимо оператор в H, що задається наступним чином:

$$\begin{gathered} D(S\hat{+}V) \overset{\text{def}}{=} \{f \in D(V) : (\hat{S}f + Vf) \in H\} \\ (S\hat{+}V)f \overset{\text{def}}{=} \hat{S}f + Vf, \quad f \in D(S\hat{+}V). \end{gathered} \tag{7}$$

При цьому $S\hat{+}V$ назвемо сингулярно збуреним оператором, а V сингулярним збуренням, якщо $D(S\hat{+}V) \setminus D(S) \neq \varnothing$.

Означення 2. Нехай G — гільбертів простір. Пару (A, B) лінійних операторів $H \to G$ назвемо *S-парою*, якщо: $D(A) \supset H^+_{S^*}$, $D(B) \supset H^+_S$, а оператори $A_0 \overset{\text{def}}{=} A|_{H^+_{S^*}}$, $B_0 \overset{\text{def}}{=} B|_{H^+_S}$ належать $\mathcal{B}(H^+_{S^*}, G)$ і $\mathcal{B}(H^+_S, G)$ відповідно.

Зауваження 1. Якщо (A, B) — S-пара, то (B, A) є S^*-парою.

Твердження 2. *Нехай (A, B) — S-пара і для деякого $\zeta \in \rho(S)$ оператор*

$$K(\zeta) = I_G + B(A_0 S^*_{\bar\zeta})^* \tag{8}$$

є щільно заданим, має тривіальне ядро і $K(\zeta)^{-1} \in \mathcal{B}(G)$. Тоді оператор $T = S\hat{+}A_0^*B$ є замкненим і

$$T_\zeta \overset{\text{def}}{=} (T - \zeta I)^{-1} = S_\zeta - (A_0 S^*_{\bar\zeta})^* K(\zeta)^{-1} B_0 S_\zeta. \tag{9}$$

Доведення. Позначимо праву частину (9) через M. З неперервності операторів A_0, B_0 випливає, що $M \in \mathcal{B}(H)$. Оскільки

$$(\hat{S} - \zeta\mathcal{I})(A_0 S^*_{\bar\zeta})^* = A_0^*, \quad B(A_0 S^*_{\bar\zeta})^* K(\zeta)^{-1} B_0 S_\zeta = B_0 S_\zeta - K(\zeta)^{-1} B_0 S_\zeta,$$

то $(\hat{S} - \zeta\mathcal{I} + A_0^*B)M = I_H$, а, отже, $\operatorname{Im} M \subset D(T)$ і $(T - \zeta I)M = I$. Таким чином, залишилося тільки довести, що $\operatorname{Ker}(T - \zeta I) = \{0\}$. Нехай $(T - \zeta I)f = 0$. Тоді $(\hat{S} - \zeta\mathcal{I})f + A_0^*Bf = 0$ і, отже,

$$f + \hat{S}_\zeta A_0^* B f = 0. \tag{10}$$

Оскільки $\hat{S}_\zeta A_0^* = (A_0 S_{\bar\zeta^*})^*$, то діючи на рівність (10) оператором B, отримуємо, що $K(\zeta)Bf = 0$. Але $\operatorname{Ker} K(\zeta) = \{0\}$, тому $Bf = 0$. Звідки, враховуючи (10), маємо, що $f = 0$. Твердження доведено.

Зауваження 2. Можливо, що з умов твердження 1 можна також отримати і щільність області визначення оператора T. Проте, довести це авторам не вдалося.

Означення 3. S-пару (A, B) назвемо *регулярною S-парою*, якщо оператори $S\hat{+}A_0^*B$, $S^*\hat{+}B_0^*A$ є замкнені, щільно задані і взаємно спряжені.

Твердження 3. *Нехай (A, B) — S-пара і для деякого $\zeta \in \rho(S)$ оператор $K(\zeta)$, що заданий формулою (8), є щільно заданий, має тривіальне ядро і $K(\zeta)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Якщо виконується рівність*

$$I + A(B_0 S_\zeta)^* = K(\zeta)^*,$$

то пара (A, B) є регулярною S-парою.

Доведення. Покладемо $T = S \hat{+} A_0^* B$, $\quad L = S^* \hat{+} B_0^* A$. Застосовуючи до операторів T і L твердження 2, отримуємо, що вони є замкнені і

$$T_\zeta = S_\zeta - (A_0 S_{\bar\zeta}^*)^* K(\zeta)^{-1} B_0 S_\zeta, \quad L_{\bar\zeta} = S_{\bar\zeta}^* - (B_0 S_\zeta)^* K(\zeta)^{*-1} A_0 S_{\bar\zeta}^*. \tag{11}$$

З рівностей (11) випливає, що оператори T_ζ і $L_{\bar\zeta}$ є взаємно спряжені, а, отже, T і L є щільно заданими і взаємно спряженими. Твердження доведено.

2.

Зафіксуємо трійку $S_{(0)}$, S, $S_{(1)}$ замкнених, необмежених, щільно заданих операторів в H таких, що

$$S_{(0)} \subset S \subset S_{(1)}, \quad \rho(S) \neq \varnothing, \tag{12}$$

$$\dim(H_S^+ \ominus H_{S_{(0)}}^+) = \dim(H_{S_{(1)}}^+ \ominus H_S^+). \tag{13}$$

Зауваження 3. З (12) випливає, що $S_1^* \subset S^* \subset S_0^*$, $\rho(S^*) \neq \varnothing$ і

$$H_{S_{(0)}}^+ \subset H_S \subset H_{S_{(1)}}^+, \quad H_{S_{(1)}^*}^+ \subset H_S^* \subset H_{S_{(0)}^*}^+, \tag{14}$$

причому $H_{S_{(0)}}^+$, H_S ($H_{S_{(1)}^*}^+$, $H_{S^*}^+$) є замкненими підпросторами в $H_{S_{(1)}}^+$ ($H_{S_{(0)}^*}^+$).

Покажемо, як у термінах сингулярного збурення оператора S можна описати клас

$$\mathcal{T} \overset{\text{def}}{=\!=} \{T \in \mathcal{C}(H) \colon S_{(0)} \subset T \subset S_{(1)}, \rho(T) \cap \rho(S) \neq \varnothing\}, \tag{15}$$

де $\mathcal{C}(H)$ — множина всіх лінійних, замкнених операторів, що діють у просторі H.

Перед тим як сформулювати основний результат цього пункту, доведемо наступне

Твердження 4. *Існує гільбертів простір G і такі оператори $A_0 \in \mathcal{B}(H_{S^*}^+, G)$, $B_0 \in \mathcal{B}(H_S^+, G)$, що*

$$\operatorname{Im} A_0 = G, \quad \operatorname{Ker} A_0 = H_{S_{(1)}^*}^+, \quad \operatorname{Im} B_0 = G, \quad \operatorname{Ker} B_0 = H_{S_{(0)}}^+. \tag{16}$$

Доведення. Нехай $L \overset{\text{def}}{=\!=} H_{S_{(1)}}^+ \ominus H_S^+$, $M \overset{\text{def}}{=\!=} H_S^+ \ominus H_{S_{(0)}}^+$ і $M_* \overset{\text{def}}{=\!=} H_{S^*}^+ \ominus H_{S_{(1)}^*}^+$.Покажемо, що

$$\dim L = \dim M = \dim M_*. \tag{17}$$

З огляду на (13) досить довести, що $\dim L = \dim M_*$. Позначимо через $\Gamma(T)$ і $\Gamma'(T)$ відповідно графік і обернений графік оператора $T\colon H \to H$, тобто

$$\Gamma(T) \overset{\text{def}}{=\!=} \{(x, Tx) \in H \times H \colon x \in D(T)\}, \quad \Gamma'(T) \overset{\text{def}}{=\!=} \{(Tx, x) \in H \times H \colon x \in D(T)\}.$$

Тоді (див. [7,стор.213])

$$\Gamma(S^*_{(1)}) = \Gamma'(-S_{(1)})^{\perp}, \quad \Gamma(S^*) = \Gamma'(-S)^{\perp}. \tag{18}$$

Зауваживши, що $\Gamma'(-S) \subset \Gamma'(-S_{(1)})$, $\Gamma(S^*_{(1)}) \subset \Gamma(S^*)$, покладемо

$$N = \Gamma'(-S_{(1)}) \ominus \Gamma'(-S), N_* = \Gamma(S^*) \ominus \Gamma(S^*_{(1)}).$$

З (18) очевидним чином випливає, що $N = N_*$. Легко переконатися, що лінійні відображення

$$L \ni x \to (-S_{(1)}x, x) \in N, \quad M_* \ni x \to (x, S^*x) \in N_*$$

є ізоморфізмами, а, отже, $\dim L = \dim M_*$. Таким чином (17) доведено. Нехай G — гільбертів простір, який ізоморфний просторам M і M_*, а $V\colon M \to G$ і $W\colon M_* \to G$ відповідні ізоморфізми. Покладемо

$$A_0 = VP_M, \quad B_0 = WP_{M_*}, \tag{19}$$

де $P_M\colon H^+_S \to H^+_S$, $P_{M_*}\colon H^+_{S^*} \to H^+_{S^*}$ ортопроектори на M і M_* відповідно. Очевидно, що рівності (19) задають оператори, для яких виконуються рівності (16). Твердження доведено.

Зауваження 4. З доведення теореми 4 випливає (див. (17)), що

$$\dim H^+_{S_{(1)}} \ominus H^+_S = \dim H^+_{S^*} \ominus H^+_{S^*_{(1)}}.$$

Аналогічно доводиться, що $\dim H^+_S \ominus H^+_{S_{(0)}} = \dim H^+_{S^*_{(0)}} \ominus H^+_{S^*}$. Таким чином, трійка операторів $S^*_{(1)}$, S^*, $S^*_{(0)}$ має ті самі властивості, що і трійка $S_{(0)}$, S, $S_{(1)}$ (див. (12), (13)).

Починаючи з цього місця, ми будемо вважати, що простір G і оператори A_0, B_0, для яких виконуються рівності (16), є зафіксовані. А через A і B ми будемо позначати замкнені оператори, що діють з H в G, причому

$$D(A) \supset H^+_{S^*}, \quad D(B) \supset H^+_S, \quad A|_{H^+_{S^*}} = A_0, \quad B|_{H^+_S} = B_0. \tag{20}$$

Це цілком узгоджується з позначеннями, які прийняті в означенні 2.

Для довільного $\zeta \in \rho(S)$ покладемо (див.(15)) $\mathcal{T}(\zeta) \overset{\text{def}}{=\!=} \{T \in \mathcal{T} \colon \zeta \in \rho(T)\}$. Тоді

$$\mathcal{T} = \bigcup_{\zeta \in \rho(S)} \mathcal{T}(\zeta).$$

Одним із центральних результатів роботи є

Теорема 1. *Нехай $\zeta \in \rho(S)$. Тоді існують замкнені оператори $A, B\colon H \to G$, для яких виконуються рівності (20) і*

а)
$$\mathcal{T}(\zeta) = \{S \hat{+} A_0^* UB\colon U \in \mathcal{B}(G)\}; \tag{21}$$

б) *для довільного $U \in \mathcal{B}(G)$ пара (A, UB) є регулярною S-парою і*

$$(S \hat{+} A_0^* UB)^* = S^* \hat{+} B_0^* U^* A. \tag{22}$$

Спочатку доведемо декілька лем.

Лема 1. *Для довільного $\zeta \in \rho(S)$*

$$\operatorname{Im} \hat{S}_\zeta A_0^* = \mathfrak{N}_\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}(S_{(1)} - \zeta I), \tag{23}$$

причому оператор $\hat{S}_\zeta A_0^*$ неперервно і бієктивно відображає G на $\mathfrak{N}_\zeta$.

Доведення. Нехай $\zeta \in \rho(S)$. Оскільки $S^*_{(1)} \subset S^*$ і для оператора A_0 виконуються рівності (16), то для довільних $u \in H^+_{S^*_{(1)}}$ маємо

$$A_0 S^*_{\bar\zeta}(S^*_1 - \bar\zeta I)u = A_0 u = 0,$$

а, отже,
$$\operatorname{Im}(S^*_{(1)} - \bar\zeta I) \subset \operatorname{Ker} A_0 S^*_{\bar\zeta}. \tag{24}$$

Якщо ж $f \in \operatorname{Ker} A_0 S^*_{\bar\zeta}$, то $S^*_{\bar\zeta} f \in H^+_{S^*_{(1)}}$ і $f = (S^*_{(1)} - \bar\zeta I) S^*_{\bar\zeta} f$, тобто $f \in \operatorname{Im}(S^*_{(1)} - \bar\zeta I)$. Звідки, враховуючи (24), отримуємо рівність

$$\operatorname{Im}(S^*_{(1)} - \bar\zeta I) = \operatorname{Ker} A_0 S^*_{\bar\zeta}. \tag{25}$$

Відомо (див. [7,стор.295]), що для довільних $M \in \mathcal{B}(H, G)$ простори $\operatorname{Im} M$ і $\operatorname{Im} M^*$ є замкненими одночасно. Оскільки $\operatorname{Im} A_0 = G$, то оператор $A_0 S^*_{\bar\zeta} \in \mathcal{B}(H, G)$ є сюр'єкцією, а, отже, простір $\operatorname{Im}(A_0 S^*_{\bar\zeta})^*$ є замкненим. Звідси, приймаючи до уваги (25) і те, що $(A_0 S^*_{\bar\zeta})^* = \hat{S}_\zeta A_0^*$, отримуємо

$$\mathfrak{N}_\zeta = \operatorname{Im}(S^*_{(1)} - \bar\zeta I)^\perp = (\operatorname{Ker} A_0 S^*_{\bar\zeta})^\perp = \operatorname{Im} \hat{S}_\zeta A_0^*,$$
$$\operatorname{Ker} \hat{S}_\zeta A_0^* = (\operatorname{Im} A_0 S^*_{\bar\zeta})^\perp = G^\perp = \{0\}.$$

Оператор $\hat{S}_\zeta A_0^*$ неперервно відображає G в H і $\operatorname{Im} \hat{S}_\zeta A_0^* \subset H^+_{S_{(1)}}$. Звідси випливає, що оператор $\hat{S}_\zeta A_0^*$ є замкнений як оператор з G в $H^+_{S_{(1)}}$. Тому згідно з теоремою про замкнений графік оператор $H^+_{S_{(1)}}$ неперервно відображає G в $H^+_{S_{(1)}}$. Лему доведено.

Лема 2. *Для довільного* $\zeta \in \rho(S)$

$$H^+_{S_{(1)}} = H^+_S \dotplus \operatorname{Im} \hat{S}_\zeta A_0^*. \tag{26}$$

Крім того,

$$\operatorname{Im} A_0^* \cap H = \{0\}. \tag{27}$$

Доведення. Нехай $f \in H^+_{S_{(1)}}$ і $f_0 = S_\zeta(S_{(1)} - \zeta I)f$. Тоді $f_0 \in H^+_S$ і, як легко перевірити, $(f - f_0) \in \mathfrak{N}_\zeta$. Звідси, враховуючи (23), отримуємо (26). Доведемо (27). Нехай $c \in G$ і $A_0^* c \in H$. Тоді з (23) випливає, що $\hat{S}_\zeta A_0^* c \in \mathfrak{N}_\zeta$. З іншого боку, враховуючи (5), маємо, що $\hat{S}_\zeta A_0^* c = S_\zeta A_0^* c \in H^+_S$. Але $\mathfrak{N}_\zeta \cap H^+_S = \{0\}$, тому $\hat{S}_\zeta A_0^* c = 0$ і, отже, $A_0^* c = 0$. Тим самим (27) доведено. Лему доведено.

Лема 3. *Нехай* $\zeta \in \rho(S)$ *і* $T \in \mathcal{T}(\zeta)$. *Тоді існує оператор* $U \in \mathcal{B}(G)$ *такий, що*

$$D(T) = \{f - \hat{S}_\zeta A_0^* U B_0 f : f \in H^+_S\}. \tag{28}$$

Доведення. Покладемо

$$\Gamma = \{(f, c) \in H^+_S \times G : (f - \hat{S}_\zeta A_0^* c) \in D(T)\}. \tag{29}$$

Приймаючи до уваги (26) і те, що оператор $\hat{S}_\zeta A_0^*$ є неперервною бієкцією простору G на $\mathfrak{N}_\zeta$, неважко переконатися, що Γ є замкненим підпростором в $H^+_S \times G$. Оскільки $\zeta \in \rho(T)$, то

$$\mathfrak{N}_\zeta \cap D(T) = \{0\}, \quad (S_{(1)} - \zeta I) D(T) = H,$$

а, отже,

$$\{f \in H^+_S : \exists c \in G \ \ (f, c) \in \Gamma\} = H^+_S, \quad \{c \in G : (0, c) \in \Gamma\} = \{0\}.$$

Тому (див. [7, стор.209]) Γ є графіком деякого лінійного оператора $F \colon H^+_S \to G$, який є замкнений і всюди заданий. Згідно з теоремою про замкнений графік $F \in \mathcal{B}(H^+_S, G)$. Приймаючи до уваги (29) і (26), отримаємо рівність

$$D(T) = \{f - \hat{S}_\zeta A_0^* F f : f \in H^+_S\}.$$

Покажемо, що $\operatorname{Ker} F \supset H^+_{S_{(0)}}$. Дійсно, нехай $g \in H^+_{S_{(0)}}$. Оскільки $H^+_{S_{(0)}} \subset D(T)$, то $g \in D(T)$, а, отже, $g = f - \hat{S}_\zeta A_0^* F f$ для деякого $f \in H^+_S$. Але $H^+_S \cap \mathfrak{N}_\zeta = \{0\}$, а тому (див.(23)) $f - g = \hat{S}_\zeta A_0^* F f = 0$. Звідси, враховуючи, що оператор $\hat{S}_\zeta A_0^*$ є ін'єкцією, маємо $Ff = 0$. Таким чином,

$$\operatorname{Ker} F \supset H^+_{S_{(0)}} = \operatorname{Ker} B_0. \tag{30}$$

З (30), приймаючи до уваги лему про трійку (див. [8, стор.262]), отримуємо, що існує $U \in \mathcal{B}(G)$ такий, що $F = U B_0$. Цим і завершується доведення леми.

Доведення теореми 1. Нехай $\zeta \in \rho(S)$. Згідно з лемами 1, 2 і зауваженням 4

$$\operatorname{Im}\hat{S}_\zeta A_0^* = \mathfrak{N}_\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{Ker}(S_{(1)} - \zeta I), \quad \operatorname{Im}\hat{S}_{\bar\zeta}^* B_0^* = \mathfrak{M}_\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{Ker}(S_{(0)}^* - \bar\zeta I), \tag{31}$$

$$H_{S_{(1)}}^+ = H_S^+ \dot{+} \mathfrak{N}_\zeta, \quad H_{S_{(0)}^*}^+ = H_{S^*}^+ \dot{+} \mathfrak{M}_\zeta. \tag{32}$$

Задамо оператори $A, B\colon H \to G$ наступним чином:

$$\begin{aligned} D(A) &= H_{S_{(0)}^*}^+, \quad A|_{H_{S^*}^+} = A_0, \quad A|_{\mathfrak{M}_\zeta} = 0, \\ D(B) &= H_{S_{(1)}}^+, \quad B|_{H_S^+} = B_0, \quad B|_{\mathfrak{N}_\zeta} = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

З огляду на (32), рівності (33) визначають оператори A і B однозначно, причому, вони, як легко переконатися, є замкнені.

Нехай $T \in \mathcal{T}(\zeta)$. Тоді згідно з лемою 3 існує оператор $U \in \mathcal{B}(G)$, для якого виконується (28). Розглянемо оператор $R = S \hat{+} A_0^* UB$ і покажемо, що $R = T$. Дійсно, нехай $g \in D(B)$. Тоді, враховуючи (31) і (32), маємо, що $g = f + \hat{S}_\zeta A_0^* c$, для деяких $f \in H_S^+$, $c \in G$. Приймаючи до уваги (31) і (33), отримуємо

$$\begin{gathered} (\hat{S} + A_0^* UB)g = (\hat{S} + A_0^* UB)(f + \hat{S}_\zeta A_0^* c) = \\ = Sf + \zeta \hat{S}_\zeta A_0^* c + A_0^* c + A_0^* UB_0 f = S_{(1)} g + A_0^*(c + UB_0 f). \end{gathered}$$

Звідки, враховуючи (27), маємо, що

$$D(R) = \{f + \hat{S}_\lambda A_0^* c : f \in H_S^+, c \in G, c + UB_0 f = 0\}$$

і $Rg = S_{(1)} g, \quad g \in D(R)$. Отже,(див.(28)), $R = T$. Тим самим ми довели, що

$$\mathcal{T}(\zeta) \subset \{S \hat{+} A_0^* UB : U \in \mathcal{B}(G)\}. \tag{34}$$

Візьмемо тепер довільний оператор $U \in \mathcal{B}(G)$ і покладемо $T = S \hat{+} A_0^* UB$, $L = S^* \hat{+} B_0^* U^* A$. Зауважимо, що оператори T і L є щільно заданими, оскільки $D(T) \supset H_{S_{(0)}}^+$, $D(L) \supset H_{S_{(1)}^*}^+$. З (31) і (33) випливає, що $B\hat{S}_\zeta A_0^* = 0$, $A\hat{S}_{\bar\zeta}^* B_0^* = 0$, а тому

$$I + B(A_0 S_{\bar\zeta}^*)^* = I, \quad I + A(B_0 S_\zeta)^* = I.$$

Звідси, приймаючи до уваги твердження 2, отримуємо, що оператори T, L є замкнені і $\zeta \in \rho(T)$, $\bar\zeta \in \rho(L)$. Крім того (див. (9)),

$$T_\zeta = S_\zeta - (A_0 S_{\bar\zeta}^*)^* UB_0 S_\zeta, \quad L_{\bar\zeta} = S_{\bar\zeta}^* - (B_0 S_\zeta)^* U^* A_0 S_{\bar\zeta}^*.$$

Легко бачити, що $(T_\zeta)^* = L_{\bar\zeta}$, а, отже, $T^* = L$. Звідси, враховуючи (34), отримуємо (21) і твердження б) теореми 1.

Теорему доведено.

3.

Покажемо, як можна описати клас $\mathcal{T}$ у термінах резольвент.

Теорема 2. *Для довільного $T \in \mathcal{T}$ існує пара $(\zeta, U) \in \rho(S) \times \mathcal{B}(G)$ така, що резольвента оператора T має вигляд*

$$T_\lambda = S_\lambda - (A_0 S_{\bar\lambda}^*)^* K(\lambda)^{-1} U B_0 S_\lambda, \quad \lambda \in \rho(T) \cap \rho(S), \tag{35}$$

$$K(\lambda) = I + (\zeta - \lambda) U B_0 S_\lambda (A_0 S_{\bar\zeta}^*)^*, \tag{36}$$

причому точка $\lambda \in \rho(S)$ належить $\rho(T)$ тоді і тільки тоді, коли оператор $K(\lambda)$ є оборотним.

Доведення. Нехай $T \in \mathcal{T}(\zeta)$. Згідно з теоремою 1 $T = S \hat{+} A_0^* U B$, де $U \in \mathcal{B}(G)$, а оператори A і B задані рівностями (33). Приймаючи до уваги (33) і резольвентну тотожність, маємо, що для $\lambda \in \rho(S)$ (див. (36))

$$\begin{aligned} I + UB(A_0 S_{\bar\lambda}^*)^* = I + UB\hat{S}_\lambda A_0^* = I + UB(\hat{S}_\lambda - \hat{S}_\zeta)A_0^* = \\ = I + (\lambda - \zeta) UBS_\lambda \hat{S}_\zeta A_0^* = I + (\lambda - \zeta) U B_0 S_\lambda (A_0 S_{\bar\zeta}^*)^* = K(\lambda). \end{aligned} \tag{37}$$

Звідси, на основі твердження 2, робимо висновок, що якщо оператор $K(\lambda)$ є оборотний, то $\lambda \in \rho(T)$ і виконується рівність (35). Нехай тепер $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$. Покажемо, що оператор $K(\lambda)$ є оборотний. Спочатку доведемо, що виконується рівність

$$K(\lambda) U B T_\lambda = U B S_\lambda. \tag{38}$$

Дійсно, для довільного $f \in H$

$$\begin{aligned} S_\lambda f = S_\lambda (T - \lambda I) T_\lambda f = \hat{S}_\lambda (\hat{S} - \lambda \mathcal{I} + A_0^* U B) T_\lambda f = \\ = T_\lambda f + \hat{S}_\lambda A_0^* U B T_\lambda f = T_\lambda f + (A_0 S_{\bar\lambda}^*)^* U B T_\lambda f. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (37), маємо

$$UBS_\lambda = UB(T_\lambda + (A_0 S_{\bar\lambda}^*)^* U B T_\lambda) = (I + UB(A_0 S_{\bar\lambda}^*)^*) U B T_\lambda = K(\lambda) U B T_\lambda,$$

тобто (38) доведено. З (38) випливає, що

$$K(\lambda)(I - (\lambda - \zeta) U B T_\lambda (A_0 S_{\bar\zeta}^*)^*) = K(\lambda) - (\lambda - \zeta) U B S_\lambda (A_0 S_{\bar\zeta}^*)^* = I,$$

а, отже, $\operatorname{Im} K(\lambda) = G$. Покажемо, що $\operatorname{Ker} K(\lambda) = \{0\}$. Дійсно, нехай $c \in \operatorname{Ker} K(\lambda)$. Покладемо $f = \hat{S}_\lambda A_0^* c$. Тоді

$$(\hat{S} - \lambda I + A_0^* U B) f = A_0^* c + A_0^* U B \hat{S}_\lambda A_0^* c = A_0^* K(\lambda) c = 0,$$

тобто $f \in \operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ і тому $f = 0$. Звідси, враховуючи ін'єктивність оператора $\hat{S}_\lambda A_0^*$ маємо, що $c = 0$. Таким чином оператор $K(\lambda)$ є неперервною бієкцією і згідно з теоремою Банаха про обернений оператор є оборотним. Теорему 2 доведено.

Наступна теорема є очевидним наслідком теорем 1 і 2.

Теорема 3. *Нехай $S_{(0)}$ — замкнений, симетричний оператор, що має самоспряжене розширення S, а для операторів $A_0 \in \mathcal{B}(H_S^+, G)$ і $A \in \mathcal{B}(H_{S_{(0)}^*}^+, G)$ виконуються рівності:*

$$\operatorname{Im} A_0 = G, \quad \operatorname{Ker} A_0 = H_{S_{(0)}}^+,$$
$$A|_{H_S^+} = A_0, \quad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(S_{(0)}^* + iI) \dotplus H_{S_{(0)}}^+.$$

Позначимо через $\mathfrak{S}$ множину всіх самоспряжених розширень оператора $S_{(0)}$. Тоді

$$\mathfrak{S} = \{S \hat{\dotplus} A_0^* U A : U \in \mathcal{B}(G), U = U^*\}.$$

При цьому резольвента оператора $T \in \mathfrak{S}$ має вигляд

$$T_\lambda = S_\lambda - (A_0 S_{\bar{\lambda}})^* K(\lambda)^{-1} U A_0 S_\lambda, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \tag{39}$$

де

$$K(\lambda) = I + (\lambda + i) U A_0 S_\lambda (A_0 S_i)^*,$$

а U — неперервний самоспряжений оператор в H. Навпаки, якщо U — неперервний самоспряжений оператор в H, то формула (39) задає резольвенту деякого оператора $T \in \mathfrak{S}$.

Формула (35) є узагальненням відомої формули Крейна (див., напр. [1, стор.437]) для резольвент самоспряжених розширень симетричного оператора з індексами дефекту (m, m). Щодо формули (39), то вона, власне, і є формулою Крейна, записаною в дещо модифікованій формі.

В даній роботі ми не торкаємося можливих застосувань теорем 1–3, бо маємо намір грунтовно розглянути це питання в окремій публікації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике.– М.: Мир, 1991.– 556 с.
2. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом* ДАН СССР.– 1961.– Т.137, 5.– С.1011–1014.
3. Лянце В.Е., Федик М.М. *Властивості операторів, породжуваних півторалінійними формами* Доп. АН УРСР.– 1987.– 2.– С.26–29.
4. Кошманенко В.Д.*Единственность сингулярно возмущенного оператора* ДАН СССР.– 1988.– Т.300, 4.– С. 786–789.
5. Кошманенко В.Д.*Возмущение самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами* Укр. мат. журн.– 1989.– Т.41, 1, С.3–19.
6. Березанський Ю.М. Самосопряженые операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.– К.: Наук. думка, 1978.– 360 с.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.– М.: Мир, 1972.– 740 с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1989.– 623 с.

Львівський державний університет ім. І. Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 9.02.98