УДК 517.95+517.51

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ БРУКНЕРА-ПЕТРУСКИ-ПРЕЙСА-ТОМСОНА

А.К.Каланча, В.К.Маслюченко

A.K. Kalancha, V.K.Maslyuchenko. *A generalization of Bruckner-Petruska-Preiss-Thomson theorem*, Matematychni Studii, **11**(1998) 48–52.

It is shown that for every real vector space X, Y and Z and subspace L conjugate space of Z, separeting points in Z, every separetely L-differential mapping, which has in every point $p \in X \times Y$ at least one of the L-partials $D_1 f(p)$ or $D_2 f(p)$ equal to zero, depends only on one variable.

А.К. Каланча, В.К. Маслюченко. *Обобщение теоремы Брукнера-Петруски-Прейса-Томсона* // Математичні Студії. – 1998. – Т.11, № 1. – С.48–52.

Показано, что для произвольных действительных векторных пространств X, Y и Z и подпространства L — сопряженного к Z, разделяющего точки в Z, каждое раздельно L-дифференцируемое отображение, у которого в каждой точке $p \in X \times Y$ хотя бы одна из частных L-производных $D_1 f(p)$ или $D_2 f(p)$ равна нулю, зависит только от одной переменной.

1. В роботі [1] з допомогою досить витончених топологічних міркувань було показано: якщо $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція двох дійсних змінних x і y така, що для неї в кожній точці $p = (x, y)$ існує хоча б одна з частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ чи $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ і вона перетворюється в нуль, то f залежить лише від однієї змінної x чи y, тобто одна з частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x}$ чи $\frac{\partial f}{\partial y}$ визначена на $\mathbb{R}^2$ і є нульовою функцією. Раніше в [2] другий із співавторів, застосувавши інший геометричний метод, одержав аналогічний результат навіть для відображень $f\colon X \times Y \to Z$, де X і Y — топологічні векторні простори, а Z — гаусдорфовий локально опуклий простір, правда, в припущенні, що слабкі частинні похідні $D_1 f\colon X \times Y \to L(X, Z)$ і $D_2 f\colon X \times Y \to L(Y, Z)$ визначені скрізь і неперервні, коли простори операторів наділити топологіями поточкової збіжності. Оскільки в теоремі з [1] неперервність частинних похідних не вимагається, то природно постало питання про зняття умови неперервності і в результаті з [2].

У цій замітці ми переносимо вказану теорему Брукнера-Петруски-Прейса-Томсона навіть на так звані нарізно L-диференційовні відображення $f\colon X \times Y \to Z$, де X, Y і Z — дійсні векторні простори, а L — підпростір спряженого з Z простору, який відокремлює точки в Z. Якщо Z — топологічний векторний простір і $L = Z^*$, то поняття L-диференційовності збігається з відомою слабкою диференційовністю за Гато. При цьому ми так само як і в [2] зводимо

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R15,46G05.

загальний випадок до випадку відображень $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ при $n = m = 2$, але відповідне твердження для них доводиться не так як у [2], а індукцією по сумі розмірностей $n+m$ з використанням теореми Брукнера-Петруски-Прейса-Томсона в ролі бази індукції. Звичайно, теорема з [2] негайно випливає з одержаного тут результату, оскільки за теоремою Гана-Банаха спряжений з гаусдорфовим локально опуклим простором Z відокремлює точки в Z.

2. Нехай T і Z — векторні простори над полем $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел і L — деякий підпростір простору всіх лінійних функціоналів на Z.Ми скажемо, що відображення $f\colon T \to Z$ є L-диференційовним у точці $t \in T$, якщо для кожного $h \in T$ і для кожного $l \in L$ існує границя

$$Df(t,h,l) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{l(f(t+\lambda h) - f(t))}{\lambda}.$$

Відображення $Df(t)\colon T \times L \to \mathbb{R}$, $Df(t)(h,l) = Df(t,h,l)$ назвемо L-похідною функції f у точці t. Зауважимо, що відображення $Df(t)$ лінійне відносно l. Якщо Z — топологічний векторний простір і $L = Z^*$ — спряжений з Z простір, то L-похідна є слабкою похідною Гато, а L-диференційовність є слабкою диференційовністю за Гато. У випадку $Z = \mathbb{R}$ Z^* природним чином ототожнюється з $\mathbb{R}$ і функція $f\colon T \to \mathbb{R}$ буде слабко диференційовною за Гато в точці $t \in T$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $h \in T$ існує границя

$$Df(t,h) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(t+\lambda h) - f(t)}{\lambda}.$$

Відображення $Df(t)\colon T \to \mathbb{R}$, $Df(t)(h) = Df(t,h)$ ми також будемо називати слабкою похідною Гато в точці t. Зрозуміло, що в цьому випадку $Df(t,h,l) = l(Df(t,h))$.

Нехай $f\colon T \to Z$ — L-диференційовне в точці $t_0 \in T$ відображення, $\varphi\colon \mathbb{R} \to T$, $\varphi(\lambda) = \lambda a + b$ — лінійна функція, для якої $\varphi(\lambda_0) = t_0$ і $l \in L$. Покладемо $g = l \circ f \circ \varphi$. Легко перевірити, що функція $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має в точці λ_0 правосторонню і лівосторонню похідні, які виражаються формулами

$$g'_+(\lambda_0) = Df(t_0, a, l), \quad g'_-(\lambda_0) = -Df(t_0, -a, l).$$

Зокрема, якщо $Z = \mathbb{R}$, $L = Z^*$, $l_0(z) = z$, якщо $z \in \mathbb{R}$ і $l = l_0$, то $g'_+(\lambda_0) = Df(t_0, a)$ і подібно $g'_-(\lambda_0) = -Df(t_0, -a)$. Отже, якщо функція $f\colon T \to \mathbb{R}$ слабко диференційовна за Гато в точці $t_0 = \varphi(\lambda_0)$, то функція $g = f \circ \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має в точці λ_0 як правосторонню так і лівосторонню похідні, отже, вона є неперервною в точці λ_0.

Ми будемо використовувати наступне просте твердження.

Лема 1. *Нехай T і Z — дійсні векторні простори, L — підпростір простору всіх лінійних функціоналів на Z, який відокремлює точки в Z і $f\colon T \to Z$ — L-диференційовне відображення, для якого $Df(t) = 0$ в кожній точці $t \in T$. Тоді відображення f стале.*

Доведення. Припустимо, що $f(t_1) \neq f(t_2)$ для деяких точок t_1 і t_2 з T. Існує такий функціонал $l_0 \in L$, що $l_0(f(t_1)) \neq l_0(f(t_2))$. Покладемо $\varphi(\lambda) = t_1 + \lambda(t_2 - t_1)$ і $g = l_0 \circ f \circ \varphi$. Тоді для довільної точки $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ маємо:

$$g'_+(\lambda_0) = Df(\varphi(\lambda_0), t_2 - t_1, l_0) = 0 \quad \text{і} \quad g'_-(\lambda_0) = -Df(\varphi(\lambda_0), t_1 - t_2, l_0) = 0.$$

Отже, функція $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовна і її похідна дорівнює нулю. Звідси випливає, що g стала, але це не так, бо $g(0) = l_0(f(t_1))$ і $g(1) = l_0(f(t_2))$.

Для довільного відображення $f: X \times Y \to Z$ ми покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$, якщо $x \in X$ і $y \in Y$. Кажуть, що відображення $f: X \times Y \to Z$ залежить тільки від змінної x або, інакше, не залежить від змінної y, якщо для кожного $x \in X$ відображення $f^x: Y \to Z$ є сталим. Подібно вводиться залежність тільки від змінної y.

Нехай X, Y і Z — дійсні векторні простори, L — підпростір простору всіх лінійних функціоналів на Z, $P = X \times Y$, $f: P \to Z$ — деяке відображення і $p = (x,y) \in P$. Частинними L-похідними відображення f у точці p відповідно по першій чи другій змінній називаються відображення $D_1 f(p): X \times L \to \mathbb{R}$ і $D_2 f(p): Y \times L \to \mathbb{R}$, які визначаються рівностями $D_1 f(p) = Df_y(x)$ і $D_2 f(p) = Df^x(y)$. Відображення $f: P \to Z$, у якого існують обидві частинні L-похідні $D_1 f(p)$ і $D_2 f(p)$, називається нарізно L-диференційовним.

3. Для будь-якої функції f, що залежить від s змінних $t_1, \dots, t_s$, і будь-якої групи $t_{i_1}, \dots, t_{i_q}$ з q різних змінних через $f_{a_{i_1} \dots a_{i_q}}$ ми позначаємо функцію решти $s-q$ змінних, яка одержується з функції f, коли змінні t_{i_k} набувають фіксованих значень $t_{i_k} = a_{i_k}$ при $k = 1, \dots, q$. Для довільного набору $a = (a_1, \dots, a_s)$ значень змінних $t_1, \dots, t_s$ покладемо $\hat{a}_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_s)$, де $i = 1, \dots, s$. Через $f_{\hat{a}_i}$ ми позначаємо функцію змінної t_i , яка одержується з функції f при $t_k = a_k$, коли $k \neq i$. Кажуть, що функція $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ не залежить від змінної t_i, якщо для кожної точки $a = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^s$ функція $f_{\hat{a}_i}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є сталою.

Кожна функція $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ двох векторних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, \dots, y_m)$, що пробігають відповідно простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$, може розглядатися і як функція від $n+m$ дійсних змінних $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, зокрема, у відповідному випадку можна розглядати частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ та $\frac{\partial f}{\partial y_j}$. Добре відомо, що функція $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ залежить тільки від однієї векторної змінної $x = (x_1, \dots, x_n)$ в тому і тільки тому випадку, коли $\frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$ при $j = 1, \dots, m$, і залежить тільки від однієї векторної змінної $y = (y_1, \dots, y_m)$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ при $i = 1, \dots, n$.

Наступне розширення теореми Брукнера-Петруски-Прейса-Томсона служить містком до загальної теореми, яку ми розглянемо в наступному пункті.

Теорема 1. *Нехай $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$—функція двох векторних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, \dots, y_m)$, причому f є нарізно неперервною функцією дійсних змінних $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$. Якщо для кожної точки $p = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ маємо $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$ або $\frac{\partial f}{\partial y_j}(p) = 0$ для всіх $j = 1, \dots, m$, то f залежить тільки від однієї векторної змінної x чи y.*

Доведення. Застосуємо індукцію по сумі $s = n+m$. При $s = 2$ відповідне твердження збігається з теоремою Брукнера-Петруски-Прейса- Томсона. Нехай $s > 2$ і теорема вірна, коли сумарна кількість змінних дорівнює $s-1$. Оскільки $s > 2$, то $n > 1$ або $m > 1$. Будемо вважати для певності, що $n > 1$. Якщо $\frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$ для всіх $j = 1, \dots, m$, то f залежить тільки від змінної x і все доведено. Тому припустимо, що в деякій точці $c = (a,b)$, де $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ і $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, маємо $\frac{\partial f}{\partial y_j}(c) \neq 0$ для деякого j , тобто або частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial y_j}(c)$ взагалі не існує, або вона існує і не перетворюється в нуль. Покажемо, що тоді $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ для кожного $i = 1, \dots, n$ і тим самим теорема буде доведена.

Нехай $\bar{c} = (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n; \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m)$ - довільна точка з $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Розглянемо довільний індекс $i = 1, \dots, n$ і покажемо, що $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$. Зафіксувавши

$x_i = a_i$, розглянемо функцію $f_{a_i}\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, до якої ми, очевидно, можемо застосувати індуктивне припущення. Оскільки $n \geq 2$, то можна вибрати індекс $k = 1, \dots , n$, такий, що $k \neq i$. Зрозуміло, що

$$\frac{\partial f_{a_i}}{\partial y_j}(\hat{a}_i, b) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(c) \neq 0$$

або таких похідних взагалі не існує. Тому за індуктивним припущенням обов'язково $\frac{\partial f_{a_i}}{\partial x_k} = 0$, тобто f_{a_i} не залежить від змінної x_k. В такому разі $f_{a_i\bar{a}_k} = f_{a_i a_k}$, отже,

$$\frac{\partial f_{a_i\bar{a}_k}}{\partial y_j}(\hat{\hat{a}}_{ik}, b) = \frac{\partial f_{a_i a_k}}{\partial y_j}(\hat{\hat{a}}_{ik}, b) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(c) \neq 0$$

або жодної з цих частинних похідних не існує. Але ж

$$\frac{\partial f_{\bar{a}_k}}{\partial y_j}(\hat{a}_k, b) = \frac{\partial f_{a_i\bar{a}_k}}{\partial y_j}(\hat{\hat{a}}_{ik}, b) \neq 0$$

або цих похідних не існує. Тому, застосувавши вже до функції $f_{\bar{a}_k}\colon \mathbb{R}^{n-1}\times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ індуктивне припущення, одержимо, що $\frac{\partial f_{\bar{a}_k}}{\partial x_i} = 0$, звідки і випливає, що $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$, адже $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \frac{\partial f_{\bar{a}_k}}{\partial x_i}(\hat{\bar{a}}_k, \bar{b})$.

4. Перейдемо до розгляду основної теореми, яка є одночасно узагальненням результатів робіт [1] і [2]. В її доведенні скористаємось таким простим спостереженням.

Лема 2. *Нехай векторний простір L поданий у вигляді об'єднання двох своїх підпросторів L_1 і L_2. Тоді $L = L_1$ або $L = L_2$.*

Доведення. Припустимо, що $L \neq L_1$ і $L \neq L_2$. Тоді існують елементи $l_1 \in L \setminus L_1$ і $l_2 \in L \setminus L_2$. В такому разі $l = l_1 + l_2 \in L \setminus (L_1 \cup L_2)$, що неможливо.

Теорема 2. *Нехай X, Y і Z — дійсні векторні простори, L — підпростір простору Z, який відокремлює точки в Z, $P = X \times Y$ і $f\colon P \to Z$ — нарізно L-диференційовне відображення від змінних x і y, для якого $D_1 f(p) = 0$ або $D_2 f(p) = 0$ в кожній точці $p \in P$. Тоді f залежить лише від однієї змінної.*

Доведення. Припустимо, що $Z = \mathbb{R}$. Тоді обов'язково $L = Z^*$ і L-диференційовність є слабкою похідною за Гато. На основі леми 1 нам досить довести, що $D_1 f(p) = 0$ для кожного $p \in P$ або $D_2 f(p) = 0$ для кожного $p \in P$. Нехай це не так, тобто $D_i f(p_i) \neq 0$ для деяких точок $p_i = (x_i, y_i) \in P$, де $i = 1, 2$. Тоді існують такі напрямки $h_1 \in X$ і $k_1 \in Y$, що $Df_{y_1}(x_1, h_1) \neq 0$ і $Df^{x_2}(y_2, k_1) \neq 0$. Покладемо $h_2 = x_2 - x_1$, $k_2 = y_2 - y_1$ і розглянемо функцію чотирьох дійсних змінних

$$g(t_1, t_2, s_1, s_2) = f(x_1 + t_1 h_1 + t_2 h_2, y_1 + s_1 k_1 + s_2 k_2),$$

яку ми будемо інтерпретувати як відображення $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Щоб спростити запис, позначимо $t = (t_1, t_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $x(t) = x_1 + t_1 h_1 + t_2 h_2$ і $y(s) = y_1 + s_1 k_1 + s_2 k_2$. З нарізної слабкої диференційовності за Гато і зауваження перед лемою 1 випливає, що g є нарізно неперервною функцією змінних t_1, t_2, s_1 і s_2. Ми будемо позначати символами $\frac{\partial g^+}{\partial t_i}$, $\frac{\partial g^+}{\partial s_i}$ і $\frac{\partial g^-}{\partial t_i}$, $\frac{\partial g^-}{\partial s_i}$ відповідно правосторонні і лівосторонні частинні похідні функції g по змінним t_i і s_i. Тоді з виведених в пункті 2 формул маємо, що для кожної пари $(t, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial g^+}{\partial t_i}(t, s) = Df_{y(s)}(x(t), h_i), \quad \frac{\partial g^-}{\partial t_i}(t, s) = -Df_{y(s)}(x(t), -h_i),$$

$$\frac{\partial g^+}{\partial s_i}(t,s) = Df^{x(t)}(y(s),k_i), \quad \frac{\partial g^-}{\partial s_i}(t,s) = -Df^{x(t)}(y(s),-k_i).$$

Оскільки за умовою для кожної точки $p=(x,y)\in P$ маємо, що $Df_y(x,h)=0$ для кожного $h\in X$ або $Df^x(y,k)=0$ для кожного $k\in Y$, то $\frac{\partial g}{\partial t_i}(t,s)=0$ при $i=1,2$ або $\frac{\partial g}{\partial s_i}(t,s)=0$ при $i=1,2$ для довільної точки $(t,s)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$. Отже, функція g задовольняє умови теореми 1 у випадку $n=m=2$. З цієї теореми ми отримуємо, що $\frac{\partial g}{\partial t_i}=0$ для $i=1,2$ або $\frac{\partial g}{\partial s_i}=0$ для $i=1,2$. Але це не так, бо

$$\frac{\partial g^+}{\partial t_1}(0,0,0,0) = Df_{y_1}(x_1,h_1)\neq 0$$

і

$$\frac{\partial g^+}{\partial s_1}(0,1,0,1) = Df^{x_1+h_1}(y_1+k_2,k_1) = Df^{x_2}(y_2,k_1)\neq 0.$$

Звідси, отримуємо, що при $Z=\mathbb{R}$ теорему доведено.

Перейдемо до розгляду загального випадку. Розглянемо довільний функціонал $l\in L$ і покладемо $g_l=l\circ f$. З означення L-диференційовності негайно випливає, що функція $g_l\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ нарізно слабко диференційовна за Гато, причому $D_1g_l(p)(h)=D_1f(p)(h,l)$ і $D_2g_l(p)(k)=D_2f(p)(k,l)$, де $p\in P$, $h\in X$ і $k\in Y$. Тому з умови теореми випливає, що $D_1g_l(p)=0$ або $D_2g_l(p)=0$ для кожного $p\in P$. Отже, на основі вже доведеного ми будемо мати, що g_l залежить тільки від однієї змінної, тому $D_1g_l=0$ або $D_2g_l=0$.

Покладемо $L_i=\{l\in L : D_ig_l=0\}$, де $i=1,2$. Із сказаного вище випливає, що $L=L_1\cup L_2$. На основі лінійності L-похідної відносно l легко одержуємо, що L_i є підпростором L при $i=1,2$. Тому з леми 2 випливає, що $L=L_1$ або $L=L_2$. Нехай для певності $L=L_1$. Тоді $D_1g_l=0$ для кожного $l\in L$, тобто $D_1f(p)(h,l)=D_1g_l(p)(h)=0$, для довільних $p\subset P$, $h\in X$ і $l\in L$, отже, $D_1f=0$. Тому, за лемою 1 відображення f залежить тільки від змінної y. Так само у випадку $L=L_2$ відображення f залежить тільки від змінної x.

На завершення автори висловлюють глибоку вдячність рецензентові за цінні вказівки, які дозволили покращити початковий варіант статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bruckner A.M., Petruska G., Preiss D., Thomson B.S. *The equation* $u_xu_y=0$ *factors* Acta Math. Hung.– 1991.– V.57, 3–4.– P.275–278.
2. Маслюченко В.К. *Одно свойство частных производных* Укр. мат. журн.– 1987.– Т.39, 4.– С.529–531.

Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича,

механіко-математичний факультет

Надійшло 9.04.1998