УДК 517.35

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЗРОСТАННЯМ СПРЯЖЕНИХ ЗА ЮНГОМ ФУНКЦІЙ

М.М. Шеремета, О.М. Сумик

M.M. Sheremeta, O.M. Sumyk. *A connection between the growth of Young conjugated functions*, Matematychni Studii, **11**(1999) 41–47.

Let P be a function on $(0, +\infty)$ different from $+\infty$ and $\not\equiv -\infty$. A connection between behaviour of this function and the growth of the function $Q(\sigma) = \sup\{P(t) + \sigma t : t > 0\}$ is investigated.

М.Н. Шеремета, О.М. Сумык. *Связь между ростом сопряженных по Юнгу функций* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 1. – С.41–47.

Пусть P — заданная на $(0, +\infty)$ функция, отличная от $+\infty$ и $\not\equiv -\infty$. Изучается связь между поведением этой функции и ростом функции $Q(\sigma) = \sup\{P(t) + \sigma t : t > 0\}$.

1°. Вступ. Нехай (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it,$$

має абсцису абсолютної збіжності $A \in (-\infty; +\infty]$, а $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ — його максимальний член.

Позначимо через $\Omega(A)$ клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що їх похідні Φ' є неперервними, додатними і зростаючими до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функціями.

В [1] вказана необхідна і достатня умова на коефіцієнти a_n, при виконанні якої $\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1))\Phi(\sigma)$, $\sigma \to A$, де $\Phi \in \Omega(A)$, а в [2] вказана така ж умова для справедливості співвідношення $\ln \mu(\sigma, F) = \Phi((1 + o(1))\sigma)$, $\sigma \to A$.

Природним є питання, які мають бути коефіцієнти a_n для того, щоб

$$\Phi_1(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi_2(\sigma), \quad \sigma < A,$$

де Φ_1 і Φ_2 — дві фіксовані функції з $\Omega(A)$.

Покладемо

$$P(t) = \begin{cases} \ln |a_n|, & t = \lambda_n (n \in \mathbb{Z}_+), \\ -\infty, & t \in (0; +\infty) \setminus \{\lambda_n\}, \end{cases} \qquad Q(\sigma) = \sup\{P(t) + \sigma t : t > 0\}. \quad (1.1)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Тоді $\ln \mu(\sigma, F) = Q(\sigma)$ і задача зводиться до вивчення справедливості нерівностей

$$\Phi_1(\sigma) \le Q(\sigma) \le \Phi_2(\sigma), \quad \sigma < A.$$

Надалі вважаємо, що P — будь-яка функція, задана на $(0, +\infty)$ і відмінна від $+\infty$ (вона може приймати значення $-\infty$, але $P \not\equiv -\infty$). Функції Q і P, зв'язані рівністю (1.1), називаються спряженими за Юнгом.

2°.Оцінка зверху. Спочатку зауважимо, що якщо $\Phi \in \Omega(A), A \in (-\infty, +\infty]$, то Φ опукла на $(-\infty, A)$, $\Phi(x) \to C \ge 0$ $(x \to -\infty)$ і $\Phi'(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$, бо якщо $\Phi'(x) \to k > -\infty$ $(x \to -\infty)$, то $\Phi(x) \sim kx$ $(x \to -\infty)$, що неможливо.

Як і в [3], функцію $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ будемо називати асоційованою з Φ за Ньютоном. Очевидно, що функція Ψ неперервна на $(-\infty, A)$, якщо $\Phi \in \Omega(A)$.В [1] показано,що вона зростає до A на $(-\infty, A)$. Надалі через Ψ^{-1} будемо позначати функцію, обернену до Ψ, а через φ функцію, обернену до Φ'. Ясно, що функція Ψ^{-1} неперервна і зростає до A на $(-\infty, A)$, а функція φ неперервна і зростає до A на $(0, +\infty)$.

Теорема 2.1. *Нехай $\Phi \in \Omega(A)$, $\quad A \in (-\infty; +\infty]$. Для того, щоб $Q(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma < A$, необхідно і досить, щоб $P(t) \le -t\Psi(\varphi(t))$ для всіх $t > 0$.*

Доведення. Якщо $Q(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma < A$, то $P(t) \le Q(\sigma) - \sigma t \le \Phi(\sigma) - \sigma t$ для всіх $\sigma < A$ і $t > 0$. При $\sigma = \varphi(t)$ звідси маємо при $t > 0$

$$P(t) \le \Phi(\varphi(t)) - t\varphi(t) = -t\Big((\varphi(t) - \frac{1}{t}\Phi(\varphi(t))\Big) = -t\Big(\varphi(t) - \frac{\Phi(\varphi(t))}{\Phi'(\varphi(t))}\Big) = -t\Psi(\varphi(t))$$

Навпаки, якщо $P(t) \le -t\Psi(\varphi(t))$ для всіх $t > 0$, то

$$\begin{aligned} Q(\sigma) \le \sup\{-t\Psi(\varphi(t)) + \sigma t : t > 0\} &= \sup\{-\Phi'(y)\Psi(y) + \sigma\Phi'(y) : y < A\} = \\ &= \sup\{-y\Phi'(y) + \Phi(y) + \sigma\Phi'(y) : y < A\} = \\ &= \sup\{(\sigma - y)\Phi'(y) + \Phi(y) : y < A\} = \Phi(\sigma), \end{aligned} \tag{2.1}$$

бо при $y = \sigma$ вираз у фігурних дужках дорівнює $\Phi(\sigma)$, а для всіх $y < A$ і $\sigma < A$

$$\Phi(\sigma) - \Phi(y) = \int_y^\sigma \Phi'(t)\, dt \ge (\sigma - y)\Phi'(y).$$

3°. Оцінки знизу. Нехай, як вище, $A \in (-\infty; +\infty]$, $\Phi \in \Omega(A)$,$\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$, а f — неперервно-диференційовна, зростаюча на $(0, +\infty)$ функція.

Для $\sigma \in (\Psi(\sigma_0), A)$, $\sigma_0 < A$, покладемо

$$\Delta_1(\sigma, f; \sigma_0) = (f(\Phi(\sigma)))' - (f(\{\sigma - \Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))',$$

$$\Delta_2(\sigma, f; \sigma_0) = f(\Phi(\sigma))f(\{\sigma - \Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0))\{(\ln f(\Phi(\sigma)))' - (\ln f(\{\sigma - \Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))'\}.$$

Легко бачити, що $\Delta_j(\sigma_0, f; \sigma_0) = 0$, $j = 1, 2$, яка б не була функція f.

Будемо говорити, що $f \in \Gamma_j(\Phi)$, $j = 1, 2$, якщо $\Delta_j(\sigma, f; \sigma_0) \le 0$ при $\Psi(\sigma_0) < \sigma \le \sigma_0$, $\Delta_j(\sigma, f; \sigma_0) \ge 0$ при $\sigma_0 \le \sigma < A$.

Приклади. *При $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ функції $f_1(x)=ax+b$ і $g_1(x)=a\Phi^{-1}(x)+b$ належать до класу $\Gamma_1(\Phi)$, а при $a>0$, $b>0$ функції $f_2(x)=ax+b$ і $g_2(x)=a\Phi^{-1}(x)+b$ належать до класу $\Gamma_2(\Phi)$.*

Доведення. Оскільки функції Φ',Φ^{-1},Ψ — зростаючі, то справедливість леми випливає з наступних рівностей

$$\Delta_1(\sigma,f_1;\sigma_0)=a\Phi'(\sigma)-a\Phi'(\sigma_0);$$

$$\Delta_1(\sigma,g_1;\sigma_0)=a\frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\Phi(\sigma)))}-a\frac{\Phi'(\sigma_0)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))}=$$

$$=a-a\frac{\Phi'(\sigma_0)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))};$$

$$\Delta_2(\sigma,f_2;\sigma_0)=a\Phi'(\sigma)(a\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)+b)-a\Phi'(\sigma_0)(a\Phi(\sigma)+b)=$$

$$=a^2\Phi'(\sigma_0)\Phi'(\sigma)\left(\sigma-\Psi(\sigma_0)-\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}\right)+ab(\Phi'(\sigma)-\Phi'(\sigma_0))=$$

$$=a^2\Phi'(\sigma_0)\Phi'(\sigma)(\Psi(\sigma)-\Psi(\sigma_0))+ab(\Phi'(\sigma)-\Phi'(\sigma_0));$$

$$\Delta_2(\sigma,g_2;\sigma_0)=a\frac{\Phi'(\sigma)(a\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0))+b)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\Phi(\sigma)))}-a\frac{\Phi'(\sigma_0)(a\Phi^{-1}(\Phi(\sigma))+b)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))}=$$

$$=a^2\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0))-a^2\frac{\sigma\Phi'(\sigma_0)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))}+$$

$$+ba-ba\frac{\Phi'(\sigma_0)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))}=$$

$$=a^2\frac{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0))-\Phi^{-1}(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma_0)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\ s_0)))}+$$

$$+ba-ba\frac{\Phi'(\sigma_0)}{\Phi'(\Phi^{-1}(\{\sigma-\Psi(\sigma_0)\}\Phi'(\sigma_0)))}.$$

Для $\Phi\in\Omega(A)$, $0<a<b<+\infty$ і $q>0$ покладемо

$$G_1(a,b,q,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\Phi(\varphi(qt))}{t^2}\,dt,\quad G_2(a,b,q,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(qt)\,dt\right),$$

де φ — функція обернена до Φ'. Наступна лема доведена в [1].

Лема. *Справедлива нерівність*

$$G_1(a,b,q,\Phi)<G_2(a,b,q,\Phi)\tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Нехай $A\in(-\infty;+\infty]$, $\Phi\in\Omega(A)$ і*

$$P(t_k)>-t_k\Psi(\varphi(t_k))\tag{3.2}$$

для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (t_k) додатних чисел.

Тоді для всіх $k\geq k_0$ і всіх $\sigma\in[\varphi(t_k),\varphi(t_{k+1})]$ справедливі нерівності

$$f(Q(\sigma))\geq f(\Phi(\sigma))+f(G_1(t_k,t_{k+1},1,\Phi))-f(G_2(t_k,t_{k+1},1,\Phi))\tag{3.3}$$

для кожної функції $f \in \Gamma_1(\Phi)$ *і*

$$f(Q(\sigma)) \ge f(\Phi(\sigma)) \frac{f(G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi))}{f(G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi))} \tag{3.4}$$

для кожної функції $f \in \Gamma_2(\Phi)$.

Доведення. Позначимо $Q_1(\sigma) = \sup\{-t_k \Psi(\varphi(t_k)) + \sigma t_k : k \ge 1\}$ і

$$\varkappa_k = \frac{t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1})) - t_k \Psi(\varphi(t_k))}{t_{k+1} - t_k}. \tag{3.5}$$

Тоді $Q_1(\sigma) \le Q(\sigma)$ для всіх $\sigma < A$ і, оскільки $(t\Psi(\varphi(t)))' = (t\varphi(t) - \Phi(\varphi(t)))' = \varphi(t)$, то

$$\varkappa_k = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t)\, dt. \tag{3.5$'$}$$

Звідси випливає, що $\varkappa_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$ і $\varphi(t_k) < \varkappa_k < \varphi(t_{k+1})$. Неважко показати, що якщо $\varkappa_{k-1} \le \sigma \le \varkappa_k$, то

$$Q_1(\sigma) = -t_k \Psi(\varphi(t_k)) + \sigma t_k. \tag{3.6}$$

Припустимо спочатку, що $\varphi(t_k) \le \sigma \le \varkappa_k$. Тоді, враховуючи (3.6), для функції $f \in \Gamma_1(\Phi)$ з $\sigma_0 = \varphi(t_k)$ маємо

$$\begin{gathered}[f(Q_1(\sigma)) - f(\Phi(\sigma))]' = [f(-t_k\Psi(\varphi(t_k)) + \sigma t_k) - f(\Phi(\sigma))]' = \\ = f'(-t_k\Psi(\varphi(t_k)) + \sigma t_k)t_k - f'(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma) = -[f'(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma) - \\ - f'(\{\sigma - \Psi(\varphi(t_k))\}\Phi'(\varphi(t_k)))\Phi'(\varphi(t_k))] = -\Delta_1(\sigma, f; \varphi(t_k)) \le 0,\end{gathered}$$

бо $\sigma_0 \le \sigma$. Отже, функція $f(Q_1(\sigma)) - f(\Phi(\sigma))$ спадна на $[\varphi(t_k), \varkappa_k]$ і тому

$$\begin{gathered}f(Q_1(\sigma)) - f(\Phi(\sigma)) \ge f(Q_1(\varkappa_k)) - f(\Phi(\varkappa_k)) = f(-t_k\Psi(\varphi(t_k)) + \varkappa_k t_k) - f(\Phi(\varkappa_k)) = \\ = f\left(t_k\Big(\frac{t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1})) - t_k\Psi(\varphi(t_k))}{t_{k+1} - t_k} - \Psi(\varphi(t_k))\Big)\right) - f\left(\Phi\Big(\frac{1}{t_{k+1} - t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t)\, dt\Big)\right) = \\ = f\left(\frac{t_k t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} [\Psi(\varphi(t))]'\, dt\right) - f(G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi)) = \\ = f\left(\frac{t_k t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\, dt\right) - f(G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi)) = \\ = f(G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi)) - f(G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi))\end{gathered} \tag{3.7}$$

Аналогічно, для $f \in \Gamma_2(\Phi)$ маємо

$$\begin{gathered}\left[\frac{f(Q_1(\sigma))}{f(\Phi(\sigma))}\right]' = \left[\frac{f(-t_k\Psi(\varphi(t_k)) + \sigma t_k)}{f(\Phi(\sigma))}\right]' = \\ = \frac{1}{f^2(\Phi(\sigma))}[f'(-t_k\Psi(\varphi(t_k)) + \sigma t_k)t_k f(\Phi(\sigma)) - f(-t_k\Psi(\varphi(t_k)) + \sigma t_k)f'(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma)] = \\ = -\frac{1}{f^2(\Phi(\sigma))}[f'(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma)f(\{\sigma - \Psi(\varphi(t_k))\}\Phi'(\varphi(t_k))) - \\ - f'(\{\sigma - \Psi(\varphi(t_k))\}\Phi'(\varphi(t_k)))\Phi'(\varphi(t_k))f(\Phi(\sigma))] = -\frac{\Delta_2(\sigma, f; \varphi(t_k))}{f^2(\Phi(\sigma))} \le 0,\end{gathered}$$

і тому, як при доведенні (3.7), отримуємо

$$\frac{f(Q_1(\sigma))}{f(\Phi(\sigma))} \geq \frac{f(Q_1(\varkappa_k))}{f(\Phi(\varkappa_k))} = \frac{f(G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi))}{f(G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi))}. \tag{3.8}$$

Нехай тепер $\varkappa_k \leq \sigma \leq \varphi(t_{k+1})$. Знову, враховуючи (3.6), для $f \in \Gamma_1(\Phi)$ з $\sigma_0 = \varphi(t_{k+1})$ маємо

$$\begin{gathered}[f(Q_1(\sigma)) - f(\Phi(\sigma))]' = [f(-t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1})) + \sigma t_{k+1}) - f(\Phi(\sigma))]' = \\ = f'(-t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1})) + \sigma t_{k+1})t_{k+1} - f'(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma) = -[f'(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma) - \\ - f'(\{\sigma - \Psi(\varphi(t_{k+1}))\}\Phi'(\varphi(t_{k+1})))\Phi'(\varphi(t_{k+1}))] = -\Delta_1(\sigma, f; \varphi(t_{k+1})) \geq 0\end{gathered}$$

Отже, функція $f(Q_1(\sigma)) - f(\Phi(\sigma))$ зростає на $[\varkappa_k, \varphi(t_{k+1})]$, а тому, як при доведенні (3.7),

$$f(Q_1(\sigma)) - f(\Phi(\sigma)) \geq f(Q_1(\varkappa_k)) - f(\Phi(\varkappa_k)) = f(G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi)) - f(G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi)).$$

Тому, оскільки $Q_1(\sigma) \leq Q(\sigma)$, а функція f зростає, то нерівність (3.7), а з нею і (3.3) виконуються для всіх $\sigma \in [\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$. Якщо ж $f \in \Gamma_2(\Phi)$, то

$$\begin{aligned}\left[\frac{f(Q_1(\sigma))}{f(\Phi(\sigma))}\right]' &= \left[\frac{f(-t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1})) + \sigma t_{k+1})}{f(\Phi(\sigma))}\right]' = \\ &= \frac{1}{f^2(\Phi(\sigma))}[f'(-t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1})) + \sigma t_{k+1})t_{k+1} f(\Phi(\sigma)) - \\ &- f(-t_{k+1}\Psi(\varphi(t_{k+1})) + \sigma t_{k+1}) f'(\Phi(\sigma))\Phi'(\sigma)] = -\frac{\Delta_2(\sigma, f; \varphi(t_{k+1}))}{f^2(\Phi(\sigma))} \geq 0,\end{aligned}$$

звідки знову отримуємо (3.8), а з цим і (3.4) для всіх $\sigma \in [\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$, бо $Q_1(\sigma) \leq Q(\sigma)$ і функція f зростаюча.

Теорему 3.1 доведено.

4°. Двосторонні оцінки.

Через Ψ_j і φ_j будемо позначати відповідно функції спряжені за Ньютоном до $\Phi_j \in \Omega(A)$ і функції, обернені до Φ_j'.

Теорема 4.1. *Нехай* $\Phi_j \in \Omega(A), A \in (-\infty, +\infty], j = 1, 2$. *Якщо для всіх* $\sigma \in (-\infty, A)$

$$\Phi_1(\sigma) \leq Q(\sigma) \leq \Phi_2(\sigma), \tag{4.1}$$

то для всіх $t > 0$

$$P(t) \leq -t\Psi_2(\varphi_2(t)) \tag{4.2}$$

і існує зростаюча до $+\infty$ *послідовність* (t_k) *додатних чисел така, що*

$$P(t_k) \geq -t_k\Psi_1(\varphi_1(t_k)) \tag{4.3}$$

і

$$\frac{t_k t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\Phi_2(\varphi_2(t))}{t^2}\, dt \geq \Phi_1\left(\frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_2(t)\, dt\right). \tag{4.4}$$

Доведення. Нерівність (4.2) доведена в теоремі 2.1. Другу частину теореми 4.1 доведемо від супротивного. Припустимо, що такої послідовності (t_k) не існує, тобто, існує послідовність відрізків $[t'_n, t''_n]$, $(t'_n) \uparrow +\infty$ така, що виконуються нерівності

$$P(t) < -t\Psi_1(\varphi_1(t)), \quad t'_n \le t \le t''_n, \tag{4.5}$$

$$\frac{t'_n t''_n}{t''_n - t'_n} \int_{t'_n}^{t''_n} \frac{\Phi_2(\varphi_2(t))}{t^2}\, dt < \Phi_1 \left(\frac{1}{t''_n - t'_n} \int_{t'_n}^{t''_n} \varphi_2(t)\ dt \right). \tag{4.6}$$

Можемо вважати, що $t'_{n+1} > t''_n$, і покладемо

$$\varkappa_n^{(2)} = \frac{t''_n \Psi_2(\varphi_2(t''_n)) - t'_n \Psi_2(\varphi_2(t'_n))}{t''_n - t'_n}.$$

Тоді, як при доведенні теореми 3.1,

$$\varkappa_n^{(2)} = \frac{1}{t''_n - t'_n} \int_{t'_n}^{t''_n} \varphi_2(t)\ dt \uparrow A \quad (k \to \infty) \tag{4.7}$$

і

$$\varphi_2(t'_n) < \varkappa_n^{(2)} < \varphi_2(t''_n) \tag{4.8}$$

Якщо $t < t'_n$, то

$$(-t\Psi_2(\varphi_2(t)) + \varkappa_n^{(2)} t)' = -\varphi_2(t) + \varkappa_n^{(2)} > -\varphi_2(t'_n) + \varkappa_n^{(2)} > 0,$$

тобто $-t\Psi_2(\varphi_2(t)) + \varkappa_n^{(2)} t < -t'_n \Psi_2(\varphi_2(t'_n)) + \varkappa_n^{(2)} t'_n$, а якщо $t > t''_n$, то

$$(-t\Psi_2(\varphi_2(t)) + \varkappa_n^{(2)} t)' = -\varphi_2(t) + \varkappa_n^{(2)} < -\varphi_2(t''_n) + \varkappa_n^{(2)} < 0$$

і, отже, $-t\Psi_2(\varphi_2(t)) + \varkappa_n^{(2)} t < -t''_n \Psi_2(\varphi_2(t''_n)) + \varkappa_n^{(2)} t''_n$. Але

$$-t'_n \Psi_2(\varphi_2(t'_n)) + \varkappa_n^{(2)} t'_n = -t''_n \Psi_2(\varphi_2(t''_n)) + \varkappa_n^{(2)} t''_n$$

Тому для всіх $t \notin [t'_n, t''_n]$, як при доведенні теореми 3.1, маємо

$$-t\Psi_2(\varphi_2(t)) + \varkappa_n^{(2)} t < t'_n \left(-\Psi_2(\varphi_2(t'_n)) + \frac{t''_n \Psi_2(\varphi_2(t''_n)) - t'_n \Psi_2(\varphi_2(t'_n))}{t''_n - t'_n} \right) =$$

$$= \frac{t'_n t''_n}{t''_n - t'_n} (\Psi_2(\varphi_2(t''_n)) - \Psi_2(\varphi_2(t'_n))) = \frac{t'_n t''_n}{t''_n - t'_n} \int\limits_{t'_n}^{t''_n} \frac{\Phi_2(\varphi_2(t))}{t^2}\, dt. \tag{4.9}$$

З (4.2), (4.9), теореми 2.1, (4.6) і (4.7) випливає, що

$$Q(\varkappa_n^{(2)}) = \sup\{P(t) + \varkappa_n^{(2)} t : t > 0\} =$$
$$= \sup\{\sup\{P(t) + \varkappa_n^{(2)} t : t \notin [t'_n, t''_n]\}, \quad \sup\{P(t) + \varkappa_n^{(2)} t : t \in [t'_n, t''_n]\}\} \le$$
$$\le \sup\left\{ \frac{t'_n t''_n}{t''_n - t'_n} \int_{t'_n}^{t''_n} \frac{\Phi_2(\varphi_2(t))}{t^2}\, dt, \quad \sup\{-t\Psi_1(\varphi_1(t)) + \varkappa_n^{(2)} t : t > 0\} \right\} \le$$
$$\le \sup\left\{ \frac{t'_n t''_n}{t''_n - t'_n} \int_{t'_n}^{t''_n} \frac{\Phi_2(\varphi_2(t))}{t^2}\, dt, \Phi_1(\varkappa_n^{(2)}) \right\} < \Phi_1(\varkappa_n^{(2)}),$$

що неможливо.

Теорему 4.1 доведено.

5°. Регулярність зростання спряжених за Юнгом функцій. Використовуючи теореми 3.1 і 4.1, можна отримати декілька теорем критеріального характеру про регулярне зростання функції $Q(\sigma)$, аналогічних поданим в [1] і [2]. Доведемо один наслідок, який випливає з вищенаведених теорем.

Наслідок. *Нехай* $A \in (-\infty; +\infty], \Phi \in \Omega(A)$. *Для того, щоб*

$$Q(\sigma) = \Phi(\sigma) + O(1), \quad \textit{при} \quad \sigma \to A$$

необхідно і досить, щоб існувала стала $K \in (0, +\infty)$ *така, що:*
1) для довільного $t > 0$

$$P(t) \leq -t\Psi(\varphi(t)) + K; \tag{5.1}$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ *послідовність* (t_k) *додатних чисел, для якої*

$$P(t_k) \geq -t_k\Psi(\varphi(t_k)) - K \tag{5.2}$$

і

$$G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi) - G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi) = O(1), \quad k \to \infty. \tag{5.3}$$

Доведення. Нехай $Q(\sigma) = \Phi(\sigma) + O(1)$ при $\sigma \to A$, тобто $\Phi(\sigma) - K \leq Q(\sigma) \leq \Phi(\sigma) + K$ для деякого $K \in (0; +\infty)$ і всіх $\sigma < A$. Отже, виконуються нерівності (4.1) з $\Phi_1(\sigma) = \Phi(\sigma) - K$; $\Phi_2(\sigma) = \Phi(\sigma) + K$. Оскільки $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$, $\Psi_1(x) = \Psi(x) + \frac{K}{\Phi'(x)}$, $\Psi_2(x) = \Psi(x) - \frac{K}{\Phi'(x)}$, то за теоремою 4.1 справедливі нерівності (5.1) і (5.2) для деякої послідовності (t_k), яка задовольняє умову (4.4), а отже умову $G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi) - K < G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi) + K$. Звідси і з (3.1) отримуємо (5.3).

Навпаки, з (5.1) за теоремою 2.1 випливає нерівність $Q(\sigma) \leq \Phi(\sigma) + K$. Далі, якщо в теоремі 3.1 візьмемо $\Phi(\sigma) = \Phi_1(\sigma)$ і $f(x) = x$, то з (3.3) для $\sigma \in [\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$ матимемо

$$\begin{aligned} Q(\sigma) &\geq \Phi_1(\sigma) + G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi_1) - G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi_1) = \\ &= \Phi(\sigma) - K + (G_1(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi) - K) - (G_2(t_k, t_{k+1}, 1, \Phi) - K), \end{aligned}$$

тобто $Q(\sigma) \geq \Phi(\sigma) - K_1$, $K_1 = \text{const}$.

Наслідок доведено.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Заболоцький М.В.,Шеремета М.М., *Узагальнення теореми Ліндельофа*, Укр.мат.журнал. **10** (1998).

[2] Prytula Ya.Ya., *On the Lindelöf Theorem*, Mat.Studiї **V.8, 1** (1997), P.31-42.

[3] Urenko J.B., *Improbability of nonconvergent chaos in Newton's method*, Math.Anal.and Appl. **V.117, 1** (1986), P.42-47.

Львівський державний університет, механіко-математичний факультет.

Надійшло 15.09.98