УДК 515.12

ГЕОМЕТРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Т.О. Банах, Т.Н. Радул

T. Banakh, T. Radul. *Geometry of mappings of probability measure spaces*, Matematychni Studii, **11**(1999) 17–30.

Topological properties of maps of the form $\widehat{P}(f)$ and $P_\omega(f)$ are investigated (here $\widehat{P}$ and P_ω are the functors of probability Radon measusres and probability measures with finite support, respectively.) We search for conditions on a map f under which the maps $\widehat{P}(f)$ or $P_\omega(f)$ are soft or homeomorphic to trivial bundles.

Т.О. Банах, Т.Н. Радул. *Геометрия отображений пространств вероятностных мер* // Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 1. – С.17–30.

Исследуются топологические и геометрические свойства отображений вида $\widehat{P}(f)$ и $P_\omega(f)$, где $\widehat{P}$ — функтор пространств радоновских мер и P_ω — функтор вероятностных мер с конечными носителями. Найдены условия на отображение f, при которых отображения $\widehat{P}(f)$ или $P_\omega(f)$ — мягкие, либо гомеоморфны тривиальным расслоениям.

0.

Данная статья продолжает тематику работы [1], причем, если в [1] упор делался на исследование топологии *пространств* вероятностных мер, то здесь мы займемся изучением *отображений* пространств вероятностных мер.

Основной объект нашего внимания — конструкция пространства $\widehat{P}(X)$ вероятностных радоновских мер на X. Напомним, что для тихоновского пространства X $\widehat{P}(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid 1 = \mu_*(X) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset X$ — борелевское подмножество в $\beta X\}\} \subset P(\beta X)$ (здесь $P(\beta X)$ — пространство вероятностных мер на стоун-чеховской компактификации βX пространства X). Конструкция $\widehat{P}(X)$ обстоятельно изучалась в [2], [3] с категорной и общетопологической точек зрения. В [2], в частности, доказано, что если $f\colon X \to Y$ — отображение тихоновских пространств и $\beta f\colon \beta X \to \beta Y$ — его продолжение на стоун-чеховские компактификации, тогда $P(\beta f)(\widehat{P}(X)) \subset \widehat{P}(Y)$, т.е., положив $\widehat{P}(f) = P(\beta f)|\widehat{P}(X)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$, мы определяем функтор $\widehat{P}$ в категории тихоновских пространств (продолжающий функтор P пространства вероятностных мер, определенный на категории компактов [4]). Если ограничить отображение $\widehat{P}(f)$ на подпространство $P_\omega(X) \subset \widehat{P}(X)$, состоящее из вероятностных мер с конечными носителями, мы получим отображение $P_\omega(f)\colon P_\omega(X) \to P_\omega(Y)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18B30, 28A33, 28C15, 54B30, 54H05.

В данной статье мы рассматриваем два вопроса: (1) когда отображения $\widehat{P}(f)$ и $P_\omega(f)$ мягкие и (2) когда отображение $\widehat{P}(f)$ гомеоморфно тривиальному расслоению.

Напомним необходимые определения. Пусть $\mathcal{C}$ — класс пространств (все пространства, рассматриваемые в данной статье, — метризуемы, а отображения — непрерывны, если только противное не оговорено специально). Отображение $f\colon X \to Y$ называется

(i) *$\mathcal{C}$-мягким*, если для любого отображения $g\colon A \to Y$, где $A \in \mathcal{C}$, любое отображение $h\colon B \to X$ замкнутого подмножества $B \subset A$ с $f \circ h = g|B$ продолжается до отображения $\bar{h}\colon A \to X$, для которого $f \circ \bar{h} = g$;

(ii) *всюду локально $\mathcal{C}$-обратимым*, если оно сюръективно и для любых отображения $g\colon A \to Y$, где $A \in \mathcal{C}$, точки $a \in A$ и открытого множества $U \subset X$ с $g(a) \in f(U)$ существует такое отображение $h\colon V \to U$ некоторой окрестности $V \subset A$ точки a, что $f \circ h = g|V$.

В случае, если класс $\mathcal{C}$ состоит из всех метризуемых пространств, мы опускаем приставку $\mathcal{C}$- и говорим о мягких и всюду локально обратимых отображениях.

Теперь несколько слов о структуре данной работы. Состоит она из трех параграфов.

В первом мы изучаем мягкость отображений вида $\widehat{P}(f)$. Основными результатами здесь являются теоремы 1.2 и 1.3. Первая утверждает, что отображение $\widehat{P}(f)$ мягко, если f — открытое сюръективное отображение польских пространств; вторая — что $\widehat{P}(f)$ мягко, если f — всюду локально обратимое отображение метрических пространств. Отметим, что теорема 1.2 обобщает известный результат [4, 6.2], утверждающий, что отображение $P(f)$ мягко, если $f\colon X \to Y$ — открытое сюръективное отображение метрических компактов.

Второй параграф посвящен отображениям вида $P_\omega(f)$. В [5] первым автором доказано, что отображение $P_\omega(f)$ мягко, если f — всюду локально обратимое отображение метрических пространств. Теорема 2.1 обобщает этот факт на произвольный топологический замкнуто-наследственный класс $\mathcal{C}$: если f — всюду локально $\mathcal{C}$-обратимое открытое отображение сепарабельных метрических пространств, тогда отображение $P_\omega(f)$ — $\mathcal{C}_\sigma$-мягко, где $\mathcal{C}_\sigma$ — класс пространств, являющихся счетными объединениями своих замкнутых подпространств из класса $\mathcal{C}$. Используя теорему 2.1, мы строим отображение $g_\omega\colon \sigma \to Q$ сильно счетномерного пространства $\sigma = \{(t_i)_{i=1}^\infty \in Q \mid t_i = 0$ для почти всех $i\}$ на гильбертов куб $Q = [-1,1]^\omega$, мягкое в классе всех сильно счетномерных пространств. Это отображение, играющее важную роль в построении поглощающих множеств в классах сильно счетномерных пространств, было впервые и совершенно другой техникой построено М. Заричным [6]. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы строим также n-мягкое, но не $(n+1)$-обратимое отображение $g_n\colon \sigma \to Q$.

Наконец, в заключительном третьем параграфе мы исследуем вопрос гомеоморфности отображений $\widehat{P}(f)$ тривиальным расслоениям (два отображения $f\colon X \to Y$ и $f'\colon X' \to Y$ называются гомеоморфными, если $f = f' \circ h$ для некоторого гомеоморфизма $h\colon X \to X'$). В теореме 3.1 мы доказываем, что $\widehat{P}(f)$ — тривиальное расслоение со слоем гильбертов куб, если f — совершенное всюду локально обратимое отображение сепарабельных метрических пространств с бесконечными прообразами точек. Используя результаты [1] и несколько модифицируя методы доказательств из [1], мы получаем также, что для тривиального расслоения $\mathrm{pr}\colon B \times F \to B$ над сепарабельной метрической базой B со слоем F, являющимся бесконечным абсолютным борелевским пространством, отображение $\widehat{P}(\mathrm{pr})$ гомеоморфно тривиальному расслоению над

$\widehat{P}(B)$ со слоем $\widehat{P}(F)$.

Прежде чем переходить к конкретному изложению результатов, напомним некоторые факты из [2], [3], касающиеся функтора $\widehat{P}$. Начнем с того, что функтор $\widehat{P}$ сохраняет вложения, т.е. если $X \subset Y$ и $e\colon X \to Y$ — естественное вложение, тогда $\widehat{P}(e)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ — тоже вложение; следовательно, можно отождествлять пространство $\widehat{P}(X)$ с подмножеством в $\widehat{P}(Y)$. Функтор $\widehat{P}$ сохраняет прообразы, т.е. для любого отображения $f\colon X \to Y$ и подмножества $A \subset Y$ $\widehat{P}(f^{-1}(A)) = \widehat{P}(f)^{-1}(\widehat{P}(A))$.

Если (X, d) — ограниченное метрическое пространство, тогда пространство $\widehat{P}(X)$ метризуемо, причем метрика $\widehat{d}$ на $\widehat{P}(X)$ может быть выписана в явном виде:

$$\widehat{d}(\mu_1, \mu_2) = \inf\bigl\{\lambda(d) \mid \lambda \in \widehat{P}(X \times X),\ \widehat{P}(\mathrm{pr}_i)(\lambda) = \mu_i,\ i = 1, 2\bigr\},$$

где $\mathrm{pr}_i\colon X \times X \to X$ — соответствующие проекции. При этом, если d — полная метрика на X, тогда $\widehat{d}$ — полная метрика на $\widehat{P}(X)$. Метрика $\widehat{d}$ обладает следующим свойством выпуклости: $\widehat{d}(t\mu + (1-t)\eta, t\mu' + (1-t)\eta') \le t\widehat{d}(\mu, \mu') + (1-t)\widehat{d}(\eta, \eta')$ для любых $t \in [0, 1]$, $\mu, \mu', \eta, \eta' \in \widehat{P}(X)$.

Для метризуемых пространств X определено непрерывное аффинное отображение $b_{\widehat{P}(X)}\colon \widehat{P}(\widehat{P}(X)) \to \widehat{P}(X)$, называемое отображением барицентра и определяемое условием $b_{\widehat{P}(X)}(\delta_\mu) = \mu$ для $\mu \in \widehat{P}(X)$, где δ_μ — мера Дирака. Если d — ограниченная метрика на X и $\widehat{d}$, $\widehat{\widehat{d}}$ — индуцированные метрики на $\widehat{P}(X)$ и $\widehat{P}(\widehat{P}(X))$, тогда отображение барицентра $b_{\widehat{P}(X)}\colon (\widehat{P}(\widehat{P}(X)), \widehat{\widehat{d}}) \to (\widehat{P}(X), \widehat{d})$ — нерастягивающее [3, 4.18].

§1. $\widehat{P}(f)$.

Известно [4], что если $f\colon X \to Y$ открытое сюръективное отображение метрических компактов, тогда отображение $P(f)\colon P(X) \to P(Y)$ — мягкое. Ниже мы обобщим этот результат.

1.1. Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$ — открытое сюръективное отображение сепарабельного метрического пространства (X, d) на метризуемое пространство Y. Если каждый слой $f^{-1}(y) \subset X$ отображения f полон по метрике d, тогда отображение $\widehat{P}(f)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ — мягкое.*

Доказательство. Мы будем применять предложение 2.10 [2], утверждающее, что если открытое сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ сепарабельных метрических пространств обладает локальными борелевскими селекциями, тогда отображение
$\widehat{P}(f)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ сюръективно и открыто. Напомним (см. [2, §2]), что отображение $f\colon X \to Y$ обладает локальными борелевскими селекциями, если для любого открытого множества $U \subset X$ существует такое (не обязательно непрерывное) отображение $s\colon Y \to X$, что $s(f(U)) \subset U$, $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ и для любого открытого множества $V \subset X$ $s^{-1}(V)$ является борелевским подмножеством Y.

Пусть $f\colon X \to Y$ открытое сюръективное отображение сепарабельного метрического пространства (X, d) на метрическое пространство (Y, d_Y), причем каждый слой $f^{-1}(y) \subset X$, $y \in Y$, отображения f полон по метрике d. Покажем, что отображение f обладает локальными борелевскими селекциями.

Пусть $U \subset X$ — любое открытое множество. Рассмотрим пополнение $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ метрического пространства (X, d) и зафиксируем открытое множество $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ с $\widetilde{U} \cap X = U$. Пусть d_U — любая полная метрика на $\widetilde{U}$ (см. [7, 4.3.23]). Рассмотрим метрику $\varrho = \widetilde{d} + d_U$ на $\widetilde{U}$. Нетрудно проверить, что каждое множество $f^{-1}(y) \cap U$, где $y \in f(U)$, полно по метрике ϱ. Из [8, §43, IX] следует, что существуют борелевские селекции $s_1 \colon Y \to X$ и $s_2 \colon f(U) \to U$ отображений f и $f \mid U$ соответственно. Тогда отбражение $s \colon Y \to X$, где для $y \in Y$

$$s(y) = \begin{cases} s_1(y), & y \notin f(U), \\ s_2(y), & y \in f(U) \end{cases}$$

является борелевской селекцией отображения f, обладающей свойством $s(f(U)) \subset U$. Согласно предложению 2.10 [2], отображение $\widehat{P}(f) \colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ сюръективно и открыто.

Без ограничения общности, метрики d и d_Y на X и Y ограничены. Через $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ и $\widetilde{Y}$ обозначим пополнения метрических пространств (X, d) и (Y, d_Y). Согласно теореме Лаврентьева [7, 4.3.21], существует продолжение $\bar{f} \colon \overline{X} \to \widetilde{Y}$ отображения $f \colon X \to Y \subset \widetilde{Y}$ на некоторое G_δ-подмножество $\overline{X}$, $X \subset \overline{X} \subset \widetilde{X}$. Пусть $\bar{d}$ — любая полная ограниченная метрика на $\overline{X}$. Легко видеть, что каждый слой $f^{-1}(y) = \bar{f}^{-1}(y)$, $y \in Y$, полон по метрике $d' = \widetilde{d} + \bar{d}$ на $\overline{X}$. Поскольку функтор $\widehat{P}$ сохраняет вложения [2, 2.4], отображение $\widehat{P}(f) \colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ можно рассматривать как подотображение отображения $\widehat{P}(\bar{f}) \colon \widehat{P}(\overline{X}) \to \widehat{P}(\widetilde{Y})$. Более того, поскольку функтор $\widehat{P}$ сохраняет прообразы (см. [2, 2.14]), то $\widehat{P}(\bar{f})^{-1}(\widehat{P}(Y)) = \widehat{P}(\bar{f}^{-1}(Y)) = \widehat{P}(X)$. Отсюда, $\widehat{P}(f)^{-1}(\mu) = \widehat{P}(\bar{f})^{-1}(\mu)$ для любой меры $\mu \in \widehat{P}(Y) \subset \widehat{P}(\widetilde{Y})$. Пусть $\widehat{d'}$ — метрика на $\widehat{P}(\overline{X})$, порожденная метрикой d' (см. [3, §4]). Поскольку ограниченная метрика d' на $\overline{X}$ полна, то $\widehat{d'}$ — полная метрика на $\widehat{P}(\overline{X})$ [3, 4.6]. Следовательно, каждый слой $\widehat{P}(f)^{-1}(\mu) = \widehat{P}(\bar{f})^{-1}(\mu)$, $\mu \in \widehat{P}(Y)$, отображения $\widehat{P}(f)$ полон относительно метрики $\widehat{d'}$. Итак, $\widehat{P}(f) \colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ — открытое сюръективное отображение с полными выпуклыми прообразами $\widehat{P}(f)^{-1}(\mu)$ точек $\mu \in \widehat{P}(Y)$. По теореме Майкла о продолжении селекции (в доказательстве [9, 1.4.9] банаховы пространства заменяются выпуклыми множествами, а нормы — выпуклыми полными метриками), отображение $\widehat{P}(f) \colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ — мягкое.

Из теоремы 1.1 немедленно вытекает

1.2. Теорема. *Для любого открытого сюръективного отображения $f \colon X \to Y$ польских пространств отображение $\widehat{P}(f) \colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ является мягким.*

В [5] (см. также теорему 2.1) доказано, что для любого всюду локально обратимого отображения $f \colon X \to Y$ отображение $P_\omega(f) \colon P_\omega(X) \to P_\omega(Y)$ мягкое. Аналогичное утверждение справедливо и для функтора $\widehat{P}$.

1.3. Теорема. *Если $f \colon X \to Y$ — всюду локально обратимое отображение метрических пространств, то отображение $\widehat{P}(f) \colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ — мягкое.*

Доказательство. Поскольку $\widehat{P}(f) \colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ — аффинное отображение выпуклых метризуемых подмножеств локально выпуклых пространств, то, по теореме 1.2 [5], для доказательства мягкости отображения $\widehat{P}(f)$ достаточно доказать, что это отображение всюду локально обратимо.

Покажем сначала, что отображение $\widehat{P}(f)$ сюръективно. Пусть $\mathcal{U} \in \operatorname{cov}(Y)$ — локально конечное покрытие пространства Y открытыми множествами U, для которых существует сечение $s_U\colon U \to X$ отображения f и пусть $\{\lambda_U\colon Y \to [0,1]\}_{U\in\mathcal{U}}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Через $\delta\colon X \to \widehat{P}(X)$ мы обозначаем каноническое вложение X в $\widehat{P}(X)$ в качестве мер Дирака. Определим отображение $g\colon Y \to \widehat{P}(X)$ формулой $g(y) = \sum_{U\in\mathcal{U}} \lambda_U(y)\delta(s_U(y))$, $y \in Y$, и положим $s = b_{\widehat{P}(X)} \circ \widehat{P}(g)\colon \widehat{P}(Y) \to \widehat{P}(X)$, где $b_{\widehat{P}(X)}\colon \widehat{P}(X)^2 \to \widehat{P}(X)$ – отображение барицентра (см. [3, §3]). Легко видеть, что s — сечение отображения $\widehat{P}(f)$, откуда следует, что отображение $\widehat{P}(f)$ сюръективно.

Зафиксируем меру $\mu_0 \in \widehat{P}(X)$, ограниченную единицей метрику d на X и положительное число $\varepsilon > 0$. По аналогии с доказательством леммы 4.2 из [3], находим попарно непересекающиеся открытые множества $V_1, \dots, V_n \subset X$ диаметра меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, для которых $\sum_{i=1}^n \mu_0(V_i) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$.

Через $\mathbf{n}$ мы обозначаем n-элементное множество $\{1,\dots,n\}$. На множестве $\exp(\mathbf{n})$ введем такое линейное упорядочение, что $A \le B$ для любых $B \subset A \subset \mathbf{n}$ (см. теорему 4 [10, §2.4]). Для каждого $A \subset \mathbf{n}$ положим $U_A = \bigcap_{i\in A} f(V_i)$.

Поскольку мера $\eta_0 = \widehat{P}(f)(\mu_0) \in \widehat{P}(Y)$ счетно-аддитивна, существует такое замкнутое в Y множество $F_{\mathbf{n}} \subset U_{\mathbf{n}}$, что $\eta_0(F_{\mathbf{n}}) > \eta_0(U_{\mathbf{n}}) - \frac{\varepsilon}{4n}$. По индукции, для каждого $A \subset \mathbf{n}$ построим такое замкнутое в Y множество $F_A \subset U_A \setminus \bigcup_{B<A} F_B$, что $\eta_0(F_A) > \eta_0(U_A \setminus \bigcup_{B<A} F_B) - \frac{\varepsilon}{4n}$. Легко видеть, что для каждого $i \in \mathbf{n}$ $\eta_0(U_i) - \sum_{i\in A} \eta_0(F_A) < \frac{\varepsilon}{4n}$.

Зафиксируем точку $y \in Y$. Если $y \notin \bigcup_{A\subset\mathbf{n}} F_A$, то положим $s_y\colon W_y \to X \subset \widehat{P}(X)$ — любая селекция отображения f, где $y \in W_y \subset Y \setminus \bigcup_{A\subset\mathbf{n}} F_A$ — открытая окрестность точки y. Рассмотрим теперь другой вариант: $y \in F_A$ для некоторого $A \subset \mathbf{n}$. Для каждого $i \in A$ зафиксируем локальное сечение $s_i\colon W_y^i \to V_i$ отображения f. Положим $W_y = \bigcap_{i\in A} W_y^i \setminus \bigcup_{B\ne A} F_B$. Пусть α_i^A, $i \in A$, — такие неотрицательные числа, что $\sum_{i\in A} \alpha_i^A = 1$ и $\alpha_i^A \eta_0(W_y) \ge \mu_0(f^{-1}(W_y)\cap V_i)$. Пусть $s_y\colon W_y \to \widehat{P}(X)$ — отображение, определенное формулой $s_y(z) = \sum_{i\in A} \alpha_i^A \delta(s_i(z))$ для $z \in W_y$. Легко видеть, что $\widehat{P}(f) \circ s_y = \delta \mid W_y$ (здесь $\delta\colon X \to \widehat{P}(X)$ — преобразование Дирака).

Пусть $\{\lambda_y\colon Y \to [0,1]\}_{y\in Y}$ — локально конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{W} = \{W_y \mid y \in Y\}$. Определим отображение $g\colon Y \to \widehat{P}(X)$ следующим образом: $g(z) = \sum_{y\in Y} \lambda_y(z) s_y(z)$, $z \in Y$. Положим $s = b_{\widehat{P}(X)} \circ \widehat{P}(g)\colon \widehat{P}(Y) \to \widehat{P}(X)$. Несложно проверить, что s — сечение отображения $\widehat{P}(f)$. Мы утверждаем, что для любого $i \in \mathbf{n}$ $s(\eta_0)(V_i) > \mu_0(V_i) - \frac{\varepsilon}{4n}$. Зафиксируем $i \in \mathbf{n}$. Тогда $s(\eta_0)(V_i) \ge \sum_{A\ni i} \alpha_i^A \eta_0(F_A) \ge \sum_{A\ni i} \mu_0(f^{-1}(F_A) \cap V_i) = \mu_0(f^{-1}(\bigcup_{A\ni i} F_A) \cap V_i)$. Поскольку $\eta_0(U_i) - \eta_0(\bigcup_{A\ni i} F_A) < \frac{\varepsilon}{4n}$ и $\eta_0 = \widehat{P}(f)(\mu_0)$, то $\mu_0(f^{-1}(U_i) \setminus f^{-1}(\bigcup_{A\ni i} F_A)) < \frac{\varepsilon}{4n}$. Отсюда $\mu_0(V_i \setminus f^{-1}(\bigcup_{A\ni i} F_A)) < \frac{\varepsilon}{4n}$. Аналогично доказательству леммы 4.2 [3], доказываем, что $\widehat{d}(s(\eta_0), \mu_0) < \varepsilon$. Таким образом, отображение $\widehat{P}(f)$ локально обратимо. Теорема доказана.

§2. $P_\omega(f)$.

В этом параграфе мы рассматриваем вопрос мягкости отображений вида $P_\omega(f)$. Наша цель — обобщить уже упоминавшийся результат [5], утверждающий, что функтор P_ω переводит всюду локально обратимые отображения метрических пространств в мягкие.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс пространств. Мы говорим, что $\mathcal{C}$ — топологический замкнуто-наследственный класс, если $\mathcal{C}$, вместе с каждым пространством $X \in \mathcal{C}$, содержит все его топологические копии и все его замкнутые подмножества. Через $\mathcal{C}_\sigma$ мы обозначаем класс пространств, представляющихся в виде счетного объединения своих замкнутых подпространств, принадлежащих классу $\mathcal{C}$. Отметим, что если $\mathcal{C}$ — класс всех конечномерных пространств, тогда $\mathcal{C}_\sigma$ — это в точности класс всех сильно счетномерных пространств.

2.1. Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — топологический замкнуто-наследственный класс пространств. Если $f\colon X \to Y$ — открытое всюду локально $\mathcal{C}$-обратимое отображение сепарабельных метрических пространств, тогда отображение $P_\omega(f)\colon P_\omega(X) \to P_\omega(Y)$ — $\mathcal{C}_\sigma$-мягкое.*

Доказательство. Пусть cX — любая метрическая компактификация сепарабельного метрического пространства X. Вложим пространство X в произведение $cX \times Y$, отождествляя точки $x \in X$ и $(x, f(x)) \in cX \times Y$, и рассмотрим множество $\overline{X} = \bigcup_{y \in Y} \mathrm{cl}(f^{-1}(y) \times \{y\}) \subset cX \times Y$, вместе с отображением $\bar{f}\colon \overline{X} \to Y$, действующим очевидным образом: $\bar{f}(x,y) = y$ для $(x,y) \in \overline{X}$. Отождествляя пространство X с соответствующим подмножеством в $\overline{X}$, мы видим, что отображение $\bar{f}$ (1) продолжает отображение f, (2) имеет компактные слои и (3) открыто (как и отображение f). Кроме того, множество X всюду плотно в каждом слое отображения $\bar{f}$. Из теоремы 1.1 следует, что отображение $\widehat{P}(\bar{f})\colon \widehat{P}(\overline{X}) \to \widehat{P}(Y)$ мягко.

Напомним, что нам нужно доказать $\mathcal{C}_\sigma$-мягкость отображения $P_\omega(f)\colon P_\omega(X) \to P_\omega(Y)$. Зафиксируем пространство $A \in \mathcal{C}_\sigma$, его замкнутое подмножество $B \subset A$ и отображения $g\colon A \to P_\omega(Y)$, $h\colon B \to P_\omega(X)$ с $P_\omega(f) \circ h = g|B$. Поскольку $f = \bar{f}|X$ и отображение $\widehat{P}(\bar{f})$ мягко, существует такое отображение $\widetilde{h}\colon A \to \widehat{P}(\overline{X})$, что $\widetilde{h}|B = h$ и $\widehat{P}(\bar{f}) \circ \widetilde{h} = g$. Теперь нам осталось пошевелить отображение $\widetilde{h}$ так, чтобы его образ лежал в множестве $P_\omega(X) \subset \widehat{P}(\overline{X})$.

Положим $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, где $A_n = g^{-1}(P_n(Y)) \cup B$, $n \in \mathbb{N}$, а $P_n(Y)$ — подмножество $P_\omega(Y)$, состоящее из мер с носителями мощности $\le n$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $P_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}$, — замкнутые подмножества $P_\omega(Y)$, то A_n — замкнутые подмножества A. Пусть d — любая ограниченная метрика на пространстве $\overline{X}$. Через $\widehat{d}$ мы обозначаем метрику на $\widehat{P}(\overline{X})$, порожденную метрикой d (см. [3, §4]).

Пусть $A_0 = B$ и $h_0 = \widetilde{h}$. Индуктивно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы построим отображение $h_n\colon A \to \widehat{P}(\overline{X})$, удовлетворяющее условиям

$$h_n|A_{n-1} = h_{n-1}|A_{n-1}, \quad h_n(A_n) \subset P_\omega(X), \quad \widehat{P}(\bar{f}) \circ h_n = \widehat{P}(\bar{f}) \circ \widetilde{h}$$
$$\text{и } \widehat{d}(h_n, h_{n-1}) = \sup\{\widehat{d}(h_n(a), h_{n-1}(a)) \mid a \in A\} \le 2^{-n}. \tag{$*_n$}$$

Предположим, что для $n \in \mathbb{N}$ отображения $h_k\colon A \to \widehat{P}(X)$, $k < n$, удовлетворяющие условиям $(*_k)$, уже построены. Индуктивный шаг мы опять будем делать по индукции. Поскольку $\mathcal{C}$ — топологический замкнуто-наследственный класс и $A \in \mathcal{C}_\sigma$, пространство A_n представляется в виде счетного объединения $A_n = \bigcup_{m=1}^\infty B_n^m$ замкнутых подмножеств, принадлежащих классу $\mathcal{C}$. Положим $h_n^0 = h_{n-1}$, $A_n^0 = A_{n-1}$ и $A_n^m = A_n^{m-1} \cup B_n^m$. Индуктивно, для каждого $m \in \mathbb{N}$ мы построим отображение $h_n^m\colon A \to \widehat{P}(\overline{X})$, удовлетворяющее условиям:

$$h_n^m|A_n^{m-1} = h_n^{m-1}|A_n^{m-1},\ h_n^m(A_n^m) \subset P_\omega(X),$$
$$\widehat{P}(\bar{f}) \circ h_n^m = \widehat{P}(\bar{f}) \circ \widetilde{h} \text{ и } \widehat{d}(h_n^m, h_n^{m-1}) \le 2^{-n-m}. \tag{$*_n^m$}$$

Покажем, как делать шаг индукции. Предположим, что для $m \in \mathbb{N}$ отображения $h_n^k \colon A \to \widehat{P}(\overline{X})$, $k < m$, удовлетворяющие условиям $(*_n^k)$, уже построены. Пусть ϱ — метрика на пространстве A. Нетрудно доказать, что из всюду локальной $\mathcal{C}$-обратимости отображения f следует всюду локальная $\mathcal{C}$-обратимость отображения $P_\omega(f)|P_\omega(f)^{-1}(P_n(Y) \setminus P_{n-1}(Y))$. Используя тот факт, что множество $P_\omega(X)$ всюду плотно в каждом слое $\widehat{P}(\bar{f})^{-1}(\mu) \subset \widehat{P}(\overline{X})$, где $\mu \in P_\omega(Y)$, для каждой точки $a \in A_n^m \setminus A_n^{m-1}$ найдем ее окрестность $V_a \in A_n^m$ с $\operatorname{diam}(V_a) < \frac{1}{3}\varrho(a, A_n^{m-1})$ и отображение $s \colon V_a \to P_\omega(X)$ такое, что $P_\omega(f) \circ s_a = \widehat{P}(\bar{f}) \circ h_n^{m-1}|V_a = g|V_a$ и $\sup\{\widehat{d}(s_a(a'), h_n^{m-1}(a') \mid a' \in V_a\} < \min\{2^{-n-m-1}, \varrho(a, A_n^{m-1})\}$. Пусть $\{\tau_a \colon A_n^m \setminus A_n^{m-1} \to [0,1]\}_{a \in A_n^m \setminus A_n^{m-1}}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_a \mid a \in A_n^m \setminus A_n^{m-1}\}$ пространства $A_n^m \setminus A_m^{m-1}$. Определим отображение $H \colon A_n^m \to P_\omega(X)$ формулой

$$H(b) = \begin{cases} h_n^{m-1}(b), & \text{если } b \in A_n^{m-1}; \\ \sum_{a \in A_n^m \setminus A_n^{m-1}} \tau_a(b) s_a(b), & \text{если } b \in A_n^m \setminus A_n^{m-1}. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что отображение H непрерывно, $P_\omega(f) \circ H = \widehat{P}(\bar{f}) \circ h_n^{m-1}|A_n^m = g|A_n^m$ и $\sup\{\widehat{d}(H(a), h_n^m(a)) \mid a \in A_n^m\} \le 2^{-n-m-1}$.

Поскольку отображение $\widehat{P}(\bar{f}) \colon \widehat{P}(\overline{X}) \to \widehat{P}(Y)$ мягко, существует такое продолжение $\overline{H} \colon A \to \widehat{P}(\overline{X})$ отображения H, что $\widehat{P}(\bar{f}) \circ \overline{H} = \widehat{P}(\bar{f}) \circ h_n^{m-1} = g$. Пусть $U \subset A$ – такая окрестность множества $A_n^m \subset A$, что $\sup\{\widehat{d}(\overline{H}(a), h_n^{m-1}(a)) \mid a \in U\} < 2^{-n-m}$ и $\lambda \colon A \to [0,1]$ — такая функция, что $\lambda(A_n^m) = \{0\}$ и $\lambda(A \setminus U) = \{1\}$. Окончательно положим $h_n^m(a) = \lambda(a) h_n^{m-1}(a) + (1 - \lambda(a))\overline{H}(a)$, $a \in A$. Нетрудно проверить, что отображение $h_n^m \colon A \to \widehat{P}(\overline{X})$ удовлетворяет условиям $(*_n^m)$. Внутреннее индуктивное построение закончено.

Положив $h_n = \lim_{m\to\infty} h_n^m \colon A \to \widehat{P}(X)$, мы построим отображение, удовлетворяющее условиям $(*_n)$, и тем самым закончим внешний индуктивный шаг.

Отображение $\overline{H} = \lim_{n\to\infty} h_n \colon A \to P_\omega(X) \subset \widehat{P}(\overline{X})$ — искомое, поскольку оно непрерывно и удовлетворяет условиям: $\bar{h}|B = \widetilde{h}|B = h$ и $P_\omega(f) \circ \overline{H} = g$. Таким образом, $P_\omega(f) \colon P_\omega(X) \to P_\omega(Y)$ — $\mathcal{C}_\sigma$-мягкое отображение. Теорема доказана.

2.2. Замечание. Если класс $\mathcal{C}$ содержит сходящуюся последовательность, тогда всякое всюду локально $\mathcal{C}$-обратимое отображение открыто.

Будем говорить, что отображение $f \colon X \to Y$ слабо $\mathcal{C}$-обратимо, если для любого отображения $g \colon A \to Y$, где $\varnothing \neq A \in \mathcal{C}$, существует такое отображение $s \colon U \to X$ непустого открытого подмножества $U \subset A$, что $f \circ s = g|U$. Очевидно, что любое всюду локально $\mathcal{C}$-обратимое отображение является слабо $\mathcal{C}$-обратимым. Напомним, что бэровским называется пространство, не содержащее открытых подмножеств первой категории.

Используя классическую теорему Бэра, несложно доказать

2.3. Предложение. *Если класс $\mathcal{C}$ состоит из бэровских пространств, тогда слабая $\mathcal{C}$-обратимость отображения $f \colon X \to Y$ эквивалентна слабой $\mathcal{C}$-обратимости отображения $P_\omega(f) \colon P_\omega(X) \to P_\omega(Y)$.*

Напомним, что класс пространств $\mathcal{C}$ называется *мультипликативным*, если из $A, B \in \mathcal{C}$ следует $A \times B \in \mathcal{C}$. Следующее предложение доказывается стандартными методами.

2.4. Предложение. *Если $\mathcal{C}$ — мультипликативный замкнуто-наследственный топологический класс, содержащий отрезок $[0,1]$, то $X \in \mathcal{C}_\sigma$ тогда и только тогда, когда $P_\omega(X) \in \mathcal{C}_\sigma$.*

Теперь, из полученных результатов мы выведем несколько важных для бесконечномерной топологии следствий. Если $\mathcal{C}$ — класс, сосотоящий из всех метрических пространств размерности $< n+1$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то мы говорим о n-мягких, всюду локально n-обратимых и слабо n-обратимых отображениях. Напомним, что $\sigma = \{(t_i)_{i=1}^{\infty} \in (-1,1)^{\omega} \mid t_i = 0$ для почти всех $i\}$, и $\Sigma = \{(t_i)_{i=1}^{\infty} \in (-1,1)^{\omega} \mid \sup\{|t_i| : i \in \mathbb{N}\} < 1\}$.

2.5. Предложение. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует n-мягкое, но не слабо $(n+1)$-обратимое отображение $g_n\colon \sigma \to \Sigma$.*

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и положим $g_n = P_\omega(f_n)\colon P_\omega(M_n) \to P_\omega(Q)$, где $f_n\colon M_n \to Q$ — универсальное отображение n-мерного Менгерового компакта на гильбертов куб, построенное А. Дранишниковым [11]. Отображение $f_n\colon M_n \to Q$ всюду локально n-обратимо, но не слабо $(n+1)$-обратимо. Теперь из теоремы 2.1 и предложения 2.3 следует, что $g_n = P_\omega(f_n)\colon P_\omega(M_n) \to P_\omega(Q)$ — n-мягкое не слабо $(n+1)$-обратимое отображение. Поскольку M_n — конечномерный компакт, из [12] следует, что пространство $P_\omega(M_n)$ гомеоморфно σ, а из [4, 3.17] — что пространство $P_\omega(Q)$ гомеоморфно Σ. Предложение доказано.

ω-Мягкими мы будем называть мягкие отображения в классе метрических сильно счетномерных пространств, т.е. пространств, являющихся счетными объединениями замкнутых конечномерных подмножеств. Используя теорему 2.1, мы приведем альтернативное доказательство следующего результата, впервые и другой техникой доказанного М. Заричным [6].

2.6. Предложение. *Существует ω-мягкое отображение $g_\omega\colon \sigma \to \Sigma$.*

Доказательство. Пусть $f_n\colon M_n \to Q$, $n \in \mathbb{N}$, — универсальные отображения Дранишникова [11]. Согласно [11], для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое вложение $i_n\colon M_n \to M_{n+1}$, что $f_{n+1} \circ i_n = f_n$. Далее мы будем отождествлять пространство M_n с подмножеством $i_n(M_n)$ в M_{n+1}. Таким образом, мы получим возрастающую последовательность

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

и отображение $f = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \to Q$. На объединении $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ рассмотрим любую метрику ϱ, порождающую на каждом M_n исходную топологию и такую, что отображение $f\colon (M,\varrho) \to Q$ непрерывно. Из известных свойств отображений f_n (см. [11]) следует, что отображение f всюду локально ∞-обратимо. Тогда из теоремы 2.1 следует, что отображение $P_\omega(f)\colon P_\omega(M) \to P_\omega(Q)$ ω-мягко. Поскольку пространство M представляется в виде счетного объединения конечномерных компактов, $P_\omega(M)$ гомеоморфно σ [12]; кроме того, как мы уже отмечали, $P_\omega(Q)$ гомеоморфно Σ. Предложение доказано.

§3. $\widehat{P}(f)$.

Все рассматриваемые в этом параграфе пространства предполагаются сепарабельными и метризуемыми. Отображения $f\colon E \to B$, $f'\colon E' \to B$ называются гомеоморфными, если $f' \circ h = f$ для некоторого гомеоморфизма $h\colon E \to E'$.

Напомним, что совершенным называется замкнутое отображение с компактными прообразами точек.

3.1. Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$ — совершенное всюду локально обратимое отображение сепарабельных метрических пространств. Если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ бесконечен, тогда отображение $\widehat{P}(f)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ гомеоморфно тривиальному Q-расслоению $\widehat{P}(Y) \times Q \to \widehat{P}(Y)$.*

Доказательство. Из теорем [2, 2.2] и 1.3 следует, что $\widehat{P}(f)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ — собственное мягкое отображение сепарабельных метрических пространств. Согласно [13, 2.3], отображение $\widehat{P}(f)$ будет гомеоморфно тривиальному Q-расслоению, если для любого покрытия $\mathcal{U} \in \operatorname{cov}(\widehat{P}(X))$ существуют такие два отображения $H_1, H_2\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(X)$, что $H_1(\widehat{P}(X)) \cap H_2(\widehat{P}(X)) = \varnothing$ и $\widehat{P}(f) \circ H_i = H_i$, $(H_i, \mathrm{id}) \prec \mathcal{U}$, $i = 1, 2$.

Зафиксируем открытое покрытие $\mathcal{U} \in \operatorname{cov}(\widehat{P}(X))$ и ограниченную единицей метрику d на X. Рассмотрим индуцированную метрику $\widehat{d}$ на $\widehat{P}(X)$. Пусть $\varepsilon\colon \widehat{P}(X) \to (0,1]$ — такая функция, что для любого $\mu \in \widehat{P}(X)$ существует $U \in \mathcal{U}$ с $\{\eta \in \widehat{P}(X) \mid \widehat{d}(\eta,\mu) < \varepsilon(\mu)\} \subset U$. Поскольку $\widehat{P}(f)$ — собственное мягкое отображение, то отображение $\delta\colon \widehat{P}(Y) \to (0,1]$, определенное формулой $\delta(\mu) = \min\{\varepsilon(\eta) \mid \eta \in \widehat{P}(f)^{-1}(\mu)\}$, непрерывно. Для каждого $n \geq 0$ положим $U_n = \{\mu \in \widehat{P}(Y) \mid 2^{-(n+1)} < \delta(\mu) < 2^{-(n-1)}\}$ и $U'_n = \widehat{P}(f)^{-1}(U_n)$. Пусть $\{\lambda_n\colon \widehat{P}(Y) \to [0,1]\}_{n\geq 0}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_n\}_{n\geq 0}$ пространства $\widehat{P}(Y)$.

Зафиксируем $n \geq 0$. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем локальное сечение $s_x^n\colon W_x \to X$, $f(x) \in W_x \subset Y$, отображения f такое, что $s_x^n(W_x) \subset O_d(x, 2^{-(n+3)})$. Пусть $\{\tau_x^n\colon X \to [0,1]\}_{x\in X}$ — локально-конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{f^{-1}(W_x) \cap O_d(x, 2^{-(n+3)})\}_{x\in X}$. Определим отображение $g_n\colon X \to \widehat{P}(X)$ формулой $g_n(x') = \sum_{x\in X} \tau_x^n(x')\delta(s_x^n \circ f(x'))$, $x' \in X$. Легко видеть, что $\widehat{d}(g_n(x), x) < 2^{-(n+2)}$ для $x \in X$. Положим $G_n = b_{\widehat{P}(X)} \circ \widehat{P}(g_n)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(X)$, где $b_{\widehat{P}(X)}\colon \widehat{P}^2(X) \to \widehat{P}(X)$ — отображение барицентра (см. [3, §3]). По предложениям 4.16, 4.18 [3] имеем $\widehat{d}(G_n, \mathrm{id}) < 2^{-(n+2)}$.

Вспоминая конструкцию отображений g_n и тот факт, что слои отображения f бесконечны, видим, что для каждого $y \in Y$ существует локальное сечение $\pi_y\colon V_y \to X$, $y \in V_y \subset Y$, отображения f, для которого

$$\mathrm{cl}_X(s(V_y)) \cap \big(\textstyle\bigcup_{z\in f^{-1}(V_n)} \operatorname{supp}(g_n(z))\big) = \varnothing.$$

Пусть $\{\alpha_y\colon Y \to [0,1]\}_{y\in Y}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_y\}_{y\in Y}$. Пусть $h_n\colon Y \to \widehat{P}(X)$ — отображение, определенное формулой

$$h_n(y') = \sum_{y\in Y} \alpha_y(y')\delta(\pi_y(y')),\ y' \in Y,$$

и $S_n = b_{\widehat{P}(X)} \circ \widehat{P}(h_n) \circ \widehat{P}(f)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(X)$. Легко видеть, что $(\bigcup_{\mu\in\widehat{P}(X)} \operatorname{supp}(S_n(\mu))) \cap (\bigcup_{\mu\in\widehat{P}(X)} \operatorname{supp}(G_n(\mu))) = \varnothing$.

Окончательно, положим $H_1, H_2\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(X)$ — отображения, определенные формулами

$$H_1(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\mu) G_n(\mu) \quad \text{и} \quad H_2(\mu) = \Big(1 - \frac{\varepsilon(\mu)}{2}\Big) H_1(\mu) + \frac{\varepsilon(\mu)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\mu) S_n(\mu).$$

Несложно проверить, что $H_1(\widehat{P}(X)) \cap H_2(\widehat{P}(X)) = \varnothing$, $\widehat{P}(f) \circ H_i = \widehat{P}(f)$ и $\widehat{d}(H_i(\mu), \mu) < \varepsilon(\mu)$ для $i = 1, 2$, $\mu \in \widehat{P}(X)$. Теорема доказана.

Отметим, что заменить в условии теоремы 3.1 всюду локальную обратимость на открытость нельзя, поскольку существует открытое отображение компактов $f\colon X \to Y$, для которого отображение $\widehat{P}(f)\colon \widehat{P}(X) \to \widehat{P}(Y)$ не гомеоморфно тривиальному Q-расслоению [14].

Поскольку для каждого бесконечного компакта F пространство $\widehat{P}(F) = P(F)$ гомеоморфно гильбертовому кирпичу Q, из предыдущей теоремы следует, что, если $f\colon B\times F \to B$ — тривиальное расслоение с бесконечным компактным слоем F, то отображение $\widehat{P}(f)$ гомеоморфно тривиальному расслоению со слоем $\widehat{P}(F)$. Этот факт допускает обобщение.

3.2. Теорема. *Пусть $f\colon B \times F \to B$ — тривиальное расслоение над сепарабельной метрической базой со слоем, являющимся бесконечным абсолютным борелевским пространством. Тогда отображение $\widehat{P}(f)\colon \widehat{P}(B\times F) \to \widehat{P}(B)$ гомеоморфно тривиальному расслоению $\widehat{P}(B) \times \widehat{P}(F) \to \widehat{P}(B)$.*

Для доказательства теоремы неоходимо напомнить некоторые сведения из топологии бесконечномерных расслоений.

Пусть $p\colon X \to B$ — расслоение (мы отождествляем термины расслоение и отображение). Замкнутое подмножество $A \subset X$ называется послойным Z-множеством в расслоении p, если для любого открытого покрытия $\mathcal{U} \in \operatorname{cov}(X)$ существует такое отображение $f\colon X \to X$, что $(f, \mathrm{id}) \prec \mathcal{U}$, $p \circ f = p$ и $f(X) \cap A = \varnothing$. Вложение $f\colon Y \to X$ топологического пространства Y называется послойным Z-вложением, если $f(Y)$ — послойное Z-множество в p.

Если $Y \subset X$ и $q\colon Y \to B$ — такое отображение, что $q = p|Y$, мы говорим, что q — подрасслоение расслоения p и обозначаем через $q \subset p$. Далее $Y \subset X$ и $q = p|Y$.

Пусть (K, L) — пара топологических пространств. Пара расслоений (p, q) называется сильно (K, L)-универсальной, если для любого покрытия $\mathcal{U} \in \operatorname{cov}(X)$, любого замкнутого подмножества $C \subset K$ и отображения $f\colon K \to X$ такого, что $f|C\colon C \to X$ — послойное Z-вложение с $f(C\cap L) = f(C) \cap Y$, существует такое послойное Z-вложение $h\colon K \to X$, что $(h, f) \prec \mathcal{U}$, $h|C = f|C$, $p \circ h = p \circ f$ и $h^{-1}(Y) = L$.

Пусть $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ — некоторый класс пар. Пара расслоений (p, q) называется сильно $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$-универсальной, если она сильно (K, L)-универсальна для любой пары $(K, L) \in (\mathcal{K}, \mathcal{C})$.

Пара расслоений (p, q) называется $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$-поглощающей, если:

1) Y содержится в счетном объединении $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ послойных Z-множеств $K_n \subset X$, причем для любого $n \in \mathbb{N}$ $(K_n, K_n \cap Y) \in (\mathcal{K}, \mathcal{C})$;
2) пара (p, q) сильно $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$-универсальна.

Основным инструментом в наших дальнейших исследованиях является послойная версия теоремы 2.1 [15], для доказательства которой следует использовать результаты [13].

3.3. Теорема. *Пусть $\mathcal{K}, \mathcal{C}$ — топологические аддитивные замкнуто-наследственные классы пространств и пусть $p\colon Q \times B \to B$ — тривиальное Q-расслоение над компактной базой B. Любые две $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$-поглощающие пары (p, q) и (p, q') гомеоморфны.*

3.4. Лемма. *Пусть X, B — метрические компакты и $Y \subset X$ — всюду плотное подмножество. Тогда для любого покрытия $\mathcal{U} \in \operatorname{cov}(P(X\times B))$ существует такое отображение $h\colon P(X \times B) \to P(X\times B)$, что $(h. \mathrm{id}) \prec \mathcal{U}$, $P(\mathrm{pr}_B) \circ h = P(\mathrm{pr}_B)$ и $P(\mathrm{pr}_X)(h(P(X\times B))) \subset P_\omega(Y)$. Здесь $\mathrm{pr}_B\colon X\times B \to B$ и $\mathrm{pr}_X\colon X \times B \to X$ — естественные проекции.*

Доказательство. Зафиксируем метрики d_X и d_B на метрических компактах X и B. На произведении $X\times B$ мы будем рассматривать метрику $d((x,b),(x',b')) = \max\{d_X(x,x'),d_B(b,b')\}$, которая порождает на $P(X\times B)$ метрику $\widehat{d}$.

Пусть $\mathcal{U}\in\operatorname{cov}(P(X\times B))$ — любое открытое покрытие. Поскольку пространство $P(X\times B)$ компактно, существует такое $\varepsilon>0$, что любое ε-близкое к тождественному отображение $h\colon P(X\times B)\to P(X\times B)$ является $\mathcal{U}$-близким к тождественному.

Пусть $\mathcal{O}=\{O(y_i,\varepsilon)\}_{i=1}^n$ — конечное покрытие компакта X открытыми шарами радиуса ε с центрами в множестве Y и пусть $\{\lambda_i\colon X\to[0,1]\}_{i=1}^n$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{O}$. Рассмотрим отображение $s\colon X\times B\to P(X\times B)$, определенное формулой $s(x,b)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)\delta_{(y_i,b)}$, где δ_z — мера Дирака, сосредоточенная в точке z. Отметим, что $\widehat{d}(s,\delta)<\varepsilon$, где $\delta\colon X\times B\to P(X\times B)$ — каноническое вложение.

Положим $h=b\circ P(s)\colon P(X\times B)\to P(X\times B)$, где $b=b_{P(X\times B)}\colon P^2(X\times B)\to P(X\times B)$ — отображение барицентра. Поскольку $\widehat{d}(s,\delta)<\varepsilon$, то из [3, 4.16] следует, что $\widehat{d}(P(s),P(\delta))<\varepsilon$, а из [3, 4.18] — что $\widehat{d}(b\circ P(s),b\circ P(\delta))<\varepsilon$. Поскольку $b\circ P(\delta)=\mathrm{id}$, то $\widehat{d}(h,\mathrm{id})<\varepsilon$, откуда $(h,\mathrm{id})\prec\mathcal{U}$. Кроме того, очевидно, что $P(\mathrm{pr}_B)\circ h=P(\mathrm{pr}_B)$ и $P(\mathrm{pr}_X)(h(P(X\times B)))\subset P(\{y_1,\dots,y_n\})\subset P_\omega(Y)$. Лемма доказана.

Напомним, что пара пространств (X,Y) называется $(\mathcal{K},\mathcal{C})$-предуниверсальной, если для любой пары $(K,L)\in(\mathcal{K},\mathcal{C})$ существует такое отображение $\xi\colon K\to X$, что $\xi^{-1}(Y)=L$. Через $\mathrm{pr}^X\colon X\times B\to B$ мы обозначаем тривиальное X-расслоение над B.

3.5. Лемма. *Пусть X,B — метрические компакты, $Y\subset X$ — всюду плотное подмножество и $\mathcal{C}$ — некоторый класс пространств. Предположим, что существует замкнутое множество $A\subset X$ такое, что пара $(\widehat{P}(A),\widehat{P}(A\cap Y))$ $(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$-предуниверсальна, а дополнение $Y\setminus A$ — бесконечно. Тогда пара расслоений $(\widehat{P}(\mathrm{pr}^X),\widehat{P}(\mathrm{pr}^Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$-универсальна.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 4 из [16]. Зафиксируем ограниченные единицей метрики d_X и d_B на компактах X и B. На произведении $X\times B$ мы будем рассматривать метрику $d((x,b),(x',b'))=\max\{d_X(x,x'),d_B(b,b')\}$, которая индуцирует на пространстве $\widehat{P}(X\times B)$ метрику $\widehat{d}$.

Наведем порядок с обозначениями. Напомним, что $\mathrm{pr}^X\colon X\times B\to B$, $\mathrm{pr}^Y\colon Y\times B\to B$, $\mathrm{pr}_B\colon X\times B\to B$ — соответствующие проекции; таким образом, $\mathrm{pr}^X=\mathrm{pr}_B$ и $\mathrm{pr}^Y\subset\mathrm{pr}^X$.

Пусть $(K,L)\in(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$, $C\subset K$ — замкнутое подмножество метрического компакта K и $f\colon K\to\widehat{P}(X\times B)$ — такое отображение, что $f|C\colon C\to\widehat{P}(X\times B)$ является послойным Z-вложением со свойством $f(C\cap L)=f(C)\cap\widehat{P}(Y\times B)$.

Пусть $\eta>0$. Для доказательства сильной $(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$-универсальности пары $(\widehat{P}(\mathrm{pr}^X),\widehat{P}(\mathrm{pr}^Y))$ нужно построить такое η-близкое к f послойное Z-вложение $h\colon K\to\widehat{P}(X\times B)$, продолжающее вложение $f|C$, что $h^{-1}(\widehat{P}(Y\times B))=L$ и $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ h=\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ f$.

По теореме 3.1, отображение $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\colon\widehat{P}(X\times B)\to\widehat{P}(B)$ гомеоморфно тривиальному Q-расслоению. Поскольку $f(C)$ — послойное Z-множество в Q-расслоении $\widehat{P}(\mathrm{pr}^X)=\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)$, существует такое отображение $f'\colon K\to\widehat{P}(X\times B)$, что $\widehat{d}(f,f')<\frac{\eta}{2}$, $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ f'=\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ f$, $f'|C=f|C$ и $f'(K\setminus C)\cap f(C)=\varnothing$ (см.[13]). Для $x\in K\setminus C$ положим $\varepsilon(x)=\min\{\frac{\eta}{2},\widehat{d}(f'(x),f(C))\}$.

Используя лемму 3.4, несложно построить отображение $g\colon K\setminus C\to \widehat{P}(X\times B)$, обладающее следующими свойствами: $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ g=\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ f'$, $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)\circ g(K\setminus C)\subset P_\omega(Y)$ и $\hat{d}(g(x),f'(x))<\frac{\varepsilon(x)}{2}$ для любого $x\in K\setminus C$.

Пусть $\{l_n\}_{n=0}^\infty$ — любая последовательность различных точек из $Y\setminus A$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — такое семейство отображений из K в отрезок $[0,1]$, что для любых различных $x,x'\in K$, $\psi_n(x)\neq\psi_n(x')$ для бесконечного числа индексов n. Определим отображение $\varphi\colon K\to\widehat{P}(Y)$ следующим образом:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^{n+1}}\,\delta_{l_{2n}}\;+\sum_{n=1}^\infty\frac{\psi_n(x)}{2^{n+1}}\,\delta_{l_{2n-1}}\;+\Big(\frac12-\sum_{n=1}^\infty\frac{\psi_n(x)}{2^{n+1}}\Big)\,\delta_{l_0},\tag{1}$$

где δ_x — мера Дирака, сосредоточенная в точке x.

Поскольку пара $(\widehat{P}(A),\widehat{P}(A\cap Y))$ $(\mathcal{M}_0,\mathcal{C})$-предуниверсальна, существует такое отображение $\xi\colon K\to\widehat{P}(A)$, что $\xi^{-1}(\widehat{P}(A\cap Y))=L$. Определим отображение $h\colon K\to\widehat{P}(X\times B)$ следующим образом: для любого $x\in C$ положим $h(x)=f(x)$, а для $x\in K\setminus C$ —

$$h(x)=\Big(1-\frac{\varepsilon(x)}{4}\Big)g(x)+\frac{\varepsilon(x)}{4}\Big(\frac12\xi(x)+\frac12\varphi(x)\Big)\otimes\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)(f(x)).\tag{2}$$

Из выпуклости метрики $\widehat{d}\le 1$ (см. [3, 4.17]) следует, что $\widehat{d}(h(x),g(x))\le\frac{\varepsilon(x)}{2}$ для любого $x\in K\setminus C$. Отсюда $\widehat{d}(h(x),f'(x))\le\widehat{d}(h(x),g(x))+\widehat{d}(g(x),f'(x))<\varepsilon(x)$, $x\in K\setminus C$. Поскольку, $\widehat{d}(f,f')<\frac{\eta}{2}$ и $\varepsilon(x)\le\frac{\eta}{2}$, $x\in K\setminus C$, то $\widehat{d}(h,f)<\eta$. Кроме того, из построения видно, что $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ h=\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ f$, $h|C=f|C$ и $h(K\setminus C)\cap h(C)=\varnothing$.

Покажем, что $h\colon K\to\widehat{P}(X\times B)$ — вложение. Поскольку K — компакт, для этого достаточно показать, что $h|K\setminus C$ — инъективное отображение. Поскольку носитель меры $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)\circ g(x)$ конечен, а носитель меры $\xi(x)$ содержится в множестве A, то из условий (1) и (2) следует, что для почти всех n (т.е. для всех за исключением конечного числа) $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)\circ h(x)$-мера точки l_n равна $2^{-k-4}\varepsilon(x)$, если $n=2k$ и $2^{-k-4}\psi_k(x)\varepsilon(x)$, если $n=2k-1$. Тогда для различных точек $x,x'\in K\setminus C$ равенство $h(x)=h(x')$ влечет равенства $\varepsilon(x)=\varepsilon(x')$ и $\psi_n(x)=\psi_n(x')$ для почти всех n, что исключено в силу выбора семейства $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$. Таким образом, отображение $h|(K\setminus C)$ инъективно, откуда следует, что h — вложение.

Поскольку для каждого $x\in K\setminus C$ $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)\circ g(x)(Y)=1$ и $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)\circ\varphi(x)(Y)=1$, то $\widehat{P}(\mathrm{pr}_x)\circ h(x)(Y)=1$ тогда и только тогда, когда $\xi(x)(Y)=1$, что равносильно $x\in L$. Поскольку функтор $\widehat{P}$ сохраняет прообразы [2, 2.14], отсюда следует, что $h(x)\in\widehat{P}(Y\times B)$ тогда и только тогда, когда $x\in L$. Учитывая равенство $(h|C)^{-1}(\widehat{P}(Y\times B))=C\cap L$, получаем, что $h^{-1}(\widehat{P}(Y\times B))=L$.

Осталось доказать, что $h(K)$ — послойное Z-множество в $\widehat{P}(X\times B)$. Пусть $\varepsilon>0$. Нужно построить такое отображение $\bar{f}\colon\widehat{P}(X\times B)\to\widehat{P}(X\times B)$, что $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ\bar{f}=\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)$, $\widehat{d}(\bar{f},\mathrm{id})<\varepsilon$ и $\bar{f}(\widehat{P}(X\times B))\cap h(K)=\varnothing$.

Поскольку $h(C)=f(C)$ — послойное Z-множество в $\widehat{P}(X\times B)$, существует такое отображение $f_1\colon\widehat{P}(X\times B)\to\widehat{P}(X\times B)$, что $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)\circ f_1=\widehat{P}(\mathrm{pr}_B)$, $\widehat{d}(f_1,\mathrm{id})<\frac{\varepsilon}{2}$ и $f_1(\widehat{P}(X\times B))\cap f(C)=\varnothing$. Пусть $\eta=\min\{\varepsilon/2,\widehat{d}(f_1(\widehat{P}(X\times$

$B)), h(C))/2\}$. По лемме 3.4 существует такое отображение $f_2\colon \widehat{P}(X \times B) \to \widehat{P}(X \times B)$, для которого $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B) \circ f_2 = \widehat{P}(\mathrm{pr}_B)$, $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X) \circ f_2(\widehat{P}(X \times B)) \subset P_\omega(Y)$ и $\widehat{d}(h, \mathrm{id}) < \eta$. Тогда отображение $F = f_2 \circ f_1\colon \widehat{P}(X \times B) \to \widehat{P}(X \times B)$ удовлетворяет следующим условиям: $\widehat{d}(F, \mathrm{id}) < \varepsilon$, $\widehat{P}(\mathrm{pr}_B) \circ F = \widehat{P}(\mathrm{pr}_B)$, $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)(F(\widehat{P}(X \times B))) \subset P_\omega(Y)$ и $F(\widehat{P}(X \times B)) \cap h(C) = \varnothing$. Поскольку $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)(h(K \setminus C)) \cap P_\omega(X) = \varnothing$, то отсюда $F(\widehat{P}(X \times B)) \cap h(K) = \varnothing$, т.е. $h(C)$ — послойное Z-множество в $\widehat{P}(\mathrm{pr}_X)$. Лемма доказана.

3.6. Следствие. *Пусть $\alpha \geq 1$ — счетный ординал, X, B — метрические компакты и $Y \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$ — всюду плотное подмножество в X. Тогда пара расслоений $(\widehat{P}(\mathrm{pr}^X), \widehat{P}(\mathrm{pr}^Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$-универсальна.*

Доказательство. Поскольку $\alpha \geq 1$, то $Y \notin \mathcal{M}_0$, следовательно, пространство Y бесконечно, а X — бесконечный компакт. Предположим сперва, что X — компакт с единственной предельной точкой. Тогда компакт X гомеоморфен сходящейся последовательности $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, а множество Y — подмножеству $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Далее мы считаем, что $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, т.е. $Y \in \mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_0$.

Положим $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. По [1, 2.4], пара $(\widehat{P}(A), \widehat{P}(A \cap Y))$ гомеоморфна паре (Q, s) и, как следствие, является $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$-предуниверсальной. По лемме 4.5, пара $(\widehat{P}(\mathrm{pr}^X), \widehat{P}(\mathrm{pr}^Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$-универсальна.

Теперь предположим, что компакт X содержит как минимум две предельные точки a, b и $Y \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$. Пусть $U_a, U_b \subset X$ — две непересекающиеся окрестности точек a, b. Поскольку $(X \setminus U_a) \cup (X \setminus U_b) = X$, то либо $(X \setminus U_a) \cap Y \notin \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$, либо $(X \setminus U_b) \cap Y \notin \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$. Предположим для определенности, что $(X \setminus U_a) \cap Y \notin \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$. Положим $A = X \setminus U_a$. Тогда множество $Y \setminus A$ — бесконечно, а пара $(\widehat{P}(A), \widehat{P}(A \cap Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$-универсальна и, следовательно, $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$-предуниверсальна (см. [1, 2.5]). По лемме 4.5, пара расслоений $(\widehat{P}(\mathrm{pr}^X), \widehat{P}(\mathrm{pr}^Y))$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$-универсальна. Следствие доказано.

Используя лемму 3.4, аналогично доказательству предложений 2.2 и 2.4 из [1], несложно доказать следующий результат.

3.7. Лемма. *Пусть X, B — метрические компакты и $Y \subset X$ — борелевское подмножество X. Если Y — бэровское пространство, тогда дополнение $\widehat{P}(X \times B) \setminus \widehat{P}(Y \times B)$ содержится в счетном объединении послойных Z-множеств в $\widehat{P}(X \times B)$; в противном случае пространство $\widehat{P}(Y \times B)$ содержится в счетном объединении послойных Z-множеств в $\widehat{P}(X \times B)$.*

Напомним, что для счетного ординала α через (Q, Ω_α) и (Q, Λ_α) обозначаются соответственно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_\alpha)$ и $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_\alpha)$-поглощающие пары. Через pr^F мы обозначаем тривиальное F-расслоение над соответствующей базой.

3.8. Теорема. *Пусть α — счетный ординал, B — сепарабельное метрическое пространство, X — метрический компакт и $Y \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$ — всюду плотное подмножество X. Пара расслоений $(\widehat{P}(\mathrm{pr}^X), \widehat{P}(\mathrm{pr}^Y))$ гомеоморфна:*

(i) паре $(\mathrm{pr}^Q, \mathrm{pr}^{\Omega_\alpha(Q)})$, если Y — подмножество где-то первой категории в X;

(ii) паре $(\mathrm{pr}^Q, \mathrm{pr}^{Q \setminus \Lambda_\alpha(Q)})$, если Y — множество нигде не первой категории в X.

Доказательство. Пусть $\bar{B}$ — любая метрическая компактификация пространства B. Теоерма следует из следствия 3.6, леммы 3.7, теоремы 3.3 и свойства сохранения прообразов функтором $\widehat{P}$.

Наконец, теорема 3.2 следует из теоремы 3.8 и теоремы 2.8 из [1], утверждающей, что пространство $\widehat{P}(Y)$ гомеоморфно $Q \setminus \Lambda_\alpha(Q)$, если Y — бэровское пространство, и $\Omega_\alpha(Q)$ в противном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банах Т.О., Радул Т.Н. *Топология пространств вероятностных мер* Мат. Сборник. 1997. Т.188, №7. С.23–46.
2. Банах Т.О. *Топология пространств вероятностных мер, I* Мат. Студії. 1995. №5. С.65–87.
3. Банах Т.О. *Топология пространств вероятностных мер, II* Мат. Студії. 1995. №5. С.88–106.
4. Федорчук В.В. *Вероятностные меры в топологии* УМН. 1991. Т.46, вып.1. С.41–80.
5. Банах Т.О. *Мягкие отображения, тривиальные расслоения и функторы в категориях сигма-компактных пространств* Общая топология. Пространства, отображения и функторы. – М.: Изд-во МГУ, 1992. С.11–22.
6. Zarichnyi M. *Universal map of σ onto Σ and absorbing sets in the classes of absolute Borelian and projective finite-dimensional spaces* Top. Appl. (to appear).
7. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986.
8. Куратовский К. Топология, II. – М.: Мир, 1969.
9. Mill J. van. Infinite-dimensional topology: prerequisites and introduction. – Amsterdam: North-Holland, 1989.
10. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976.
11. Дранишников А.Н. *Абсолютные экстензоры в размерности n и n-мягкие отображения, повышающие размерность* УМН. 1984. Т.39, Вып.5. С.55–95.
12. Жураев Т.Ф. *Пространство всех вероятностных мер с конечными носителями гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству* Общая топология. Пространства и отображения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. С.66–70.
13. Toruńczyk H., West J. *Fibrations and bundles with Hilbert cube manifolds fibers* Mem. Amer. Math. Soc. 1989. V.80, №406. C.1–75.
14. Дранишников А.Н. *О Q-расслоениях без дизъюнктных сечений* Функ. анализ и его приложения. 1988. Т.22. Вып.2. С.81–82.
15. Dijkstra J.J., Mill J. van, Mogilski J. *The space of infinite-dimensional compacta and other topological copies of $(l^2_f)^\omega$* Pacific J. Math. 1992. V.152. P.255–273.
16. Банах Т.О., Коти Р. *Топологическая классификация пространств вероятностных мер коаналитических множеств* Мат. заметки. 1994. Т.55, №1. С.10–19.

Львовский университет имени Ивана Франко
tbanakh@franko.lviv.ua

Получено 5.11.1997