УДК 512.552.8+512.6

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОСНАЩЕННЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ, I

А.В. Забарило, А.Г. Завадский

A.V. Zabarilo, A.G. Zavadskij. *Representations of one-parameter equipped posets, I*, Matematychni Studii, **11**(1999) 3–16.

The paper is the first part of the work devoted to a full classification of indecomposables of one-parameter equipped posets over the pair $(\mathbb{R},\mathbb{C})$. In this publication the preliminaries are contained, the main results are formulated and the differentiation algorithms for equipped posets are constructed.

А.В. Забарило, А.Г. Завадский. *Представления однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств, I*// Математичні Студії. – 1999. – Т.11, № 1. – С.3–16.

Первая часть работы, посвященной полной классификации представлений однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств над парой $(\mathbb{R},\mathbb{C})$. В этой публикации приводятся предварительные сведения, формулируются основные результаты и разрабатываются алгоритмы дифференцирования оснащенных множеств.

Введение

Представления частично упорядоченных множеств, введенные Л.А. Назаровой и А.В. Ройтером в начале 70-х годов [1] и нашедшие разнообразные приложения в теории представлений групп, колец, алгебр, естественно возникли при рассмотрении категорных матричных задач, связанных с классификацией представлений конечномерных алгебр [2]. Построенная в целом к середине 80-х годов теория представлений частично упорядоченных множеств ручного типа (охватывающая, в частности, множества конечного типа [3,4], однопараметрические [5,6], конечного и бесконечного роста [7–11]), оказалась одним из наиболее содержательных разделов теории представлений. Отличительной особенностью этой классической теории является то обстоятельство, что в категории, определяющей соответствующую матричную задачу (и называемой вектроидом), все объекты и их кольца эндоморфизмов одномерны над заданным полем k.

Наряду с этим существует и остается пока малоизученным большое число категорных матричных задач с нетривиальными кольцами эндоморфизмов

1991 *Mathematics Subject Classification.* 16G20, 16G30, 16G60.

объектов вектроида. Особое положение среди них занимают шуровские задачи, у которых эти кольца являются телами над (алгебраически незамкнутым) полем k.

Настоящая работа, разделенная на две отдельные публикации, посвящена исследованию ситуации именно такого типа. Выбирая в качестве основного поля k поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, мы рассматриваем вектроиды с не более чем двумерными объектами, причем кольцо эндоморфизмов любого двумерного объекта считаем изоморфным полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. В этом случае вектроид полностью задается частично упорядоченным множеством с некоторой простой дополнительной структурой. Такое множество мы называем оснащенным (обычное частично упорядоченное множество является частным случаем оснащенного).

Отметим, что вопрос о представлениях оснащенных множеств конечного типа является полностью решенным — соответствующие утверждения вытекают непосредственно из более общего результата Б. Клемп и Д. Симсона [12] о шуровских вектроидах конечного типа.

Цель предлагаемого исследования — дать полную классификацию представлений однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств. Учитывая результаты В.В. Отрашевской [5,6], описавшей представления обычных однопараметрических множеств, мы ограничиваемся рассмотрением нетривиального оснащения, доказывая в этом случае критерий однопараметричности, перечисляя точные однопараметрические множества и классифицируя все их неразложимые представления вместе с размерностями.

Доказательство базируется на разработке и применении техники дифференцирования оснащенных множеств, использовании результатов работы [13] и непосредственных вычислениях.

Полное изложение материала содержится в препринте [15], сокращенным и модифицированным вариантом которого является данная журнальная версия в двух частях (по сравнению с [15] опущены некоторые технические детали и почти весь графический и табличный материал — они заменены ссылками на препринт либо представлены в видоизмененной форме).

Содержание первой публикации следующее. В §1 даются основные определения и формулируются главные результаты (теоремы 1, 2, 3). В §2 содержатся дальнейшие определения и разрабатываются алгоритмы дифференцирования оснащенных множеств. В §3 приводится необходимая для дальнейших рассмотрений модификация результата работы [13].

Собственно классификация представлений выносится во вторую публикацию.

§1. Основные определения и формулировка результатов

Частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$ будем называть *оснащенным*, если оно удовлетворяет трем условиям:

1) точки множества $\mathcal{P}$ делятся на *одинарные* и *двойные*;
2) отношения между точками делятся на *слабые* и *сильные*;
3) если $x < y$ — слабое отношение, то точки x, y двойные, причем если $x < t < y$, то отношения $x < t$ и $t < y$ тоже слабые (и автоматически точка t двойная).

Оснащение будет считаться *тривиальным*, если двойные точки отсутствуют, т.е. частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$ является *обычным*.

Ниже для сильного (слабого) отношения в оснащенном множестве применяем обозначение $x \lhd y$ ($x \prec y$), в то время как $x < y$ обозначает произвольное отношение.

Всякое оснащенное множество $\mathcal{P}$ (которое может быть и бесконечным) определяет *матричную задачу* над парой $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — соответственно поля действительных и комплексных чисел. Именно, рассмотрим конечную прямоугольную матрицу M, разделенную на вертикальные полосы M_x, $x \in \mathcal{P}$ (почти все из которых пустые), причем коэффициенты полосы M_x принадлежат полю $\mathbb{R}$, если точка x одинарная, и полю $\mathbb{C}$, если она двойная.

Над матрицей M такого типа разрешается производить следующие *допустимые преобразования*:

a) элементарные преобразования строк всей матрицы M над $\mathbb{R}$;
b) элементарные преобразования столбцов полосы M_x над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$), если точка x одинарная (двойная);
c) прибавления столбцов полосы M_x к столбцам полосы M_y с коэффициентами из $\mathbb{C}$, если отношение $x < y$ слабое;
d) независимые прибавления действительных и мнимых частей столбцов полосы M_x к действительным и мнимым частям (в любых сочетаниях) столбцов полосы M_y с коэффициентами из $\mathbb{R}$, если отношение $x < y$ сильное.

Располосованные матрицы считаются *эквивалентными*, если они переводятся друг в друга указанными преобразованиями, и задача состоит в классификации неразложимых в естественном смысле матриц с точностью до эквивалентности.

Замечание. Если оснащение тривиально, то получаем обычную задачу о представлениях частично упорядоченного множества в смысле [1] над полем $\mathbb{R}$. Если же множество $\mathcal{P}$ является антицепью (т.е. состоит из попарно несравнимых элементов), то возникает задача того же типа, что и в [14].

На категорном языке рассматриваемая задача выглядит следующим образом. Оснащенному множеству $\mathcal{P}$ сопоставляется *вектроид* $\mathcal{L}$ над $\mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{R}$-линейная подкатегория категории конечномерных $\mathbb{R}$-пространств, объекты которой неразложимы и попарно неизоморфны[1]. Именно, каждой одинарной (двойной) точке $x \in \mathcal{P}$ соответствует объект $\mathcal{L}(x)$ вектроида $\mathcal{L}$, являющийся $\mathbb{R}$-пространством, отождествляемым с экземпляром поля $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ и имеющим кольцо эндоморфизмов $\mathcal{L}(x,x) = \mathbb{R}$ ($\mathcal{L}(x,x) = \mathbb{C}$). Кроме этого, при $x < y$ множество морфизмов $\mathcal{L}(x,y)$ из объекта $\mathcal{L}(x)$ в объект $\mathcal{L}(y)$ естественно отождествляется с полем $\mathbb{C}$, если отношение $x < y$ слабое, и с полным пространством $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y))$, если оно сильное.

Множество всех морфизмов вектроида $\mathcal{L}$ порождает кольцо (быть может, без единицы) $\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{x,y} \mathcal{L}(x,y)$, модули над которым будем просто называть $\mathcal{L}$-модулями. *Базисным модулем* вектроида $\mathcal{L}$ назовем естественный правый $\mathcal{L}$-модуль $\mathcal{L}_0 = \bigoplus_{x \in \mathcal{P}} \mathcal{L}(x)$ (при таком соглашении сам вектроид $\mathcal{L}$ можно рассматривать как пару $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1)$).

Представлением вектроида $\mathcal{L}$ (или множества $\mathcal{P}$) над $\mathbb{R}$ называется любой правый $\mathcal{L}$-подмодуль U тензорного произведения

$$U \subset U_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_0 \,,$$

где U_0 — некоторое $\mathbb{R}$-пространство (условимся иметь дело исключительно с *конечномерными* представлениями, у которых $\dim U_0 < \infty$ и $\dim U/U\mathcal{R} < \infty$, где $\mathcal{R} = \operatorname{rad} \mathcal{L}$).

Морфизм из представления $U \subset U_0 \otimes \mathcal{L}_0$ в представление $V \subset V_0 \otimes \mathcal{L}_0$ — это любое такое $\mathbb{R}$-линейное отображение $\varphi\colon U_0 \to V_0$, что $U(\varphi \otimes 1) \subset V$ (символ линейного отображения пишем справа от аргумента).

Категория представлений вектроида $\mathcal{L}$ или связанного с ним оснащенного множества $\mathcal{P}$ будет обозначаться через $\mathcal{L}$–sp или $\mathcal{P}$–sp. Классификация неразложимых представлений этой категории в точности соответствует описанной

[1] Понятие вектроида и его представлений фактически было введено в [2] (в иной терминологии).

выше матричной задаче (мы исключаем из рассмотрения матрицы с нулевым числом строк).

Оснащенное множество называется множеством *конечного типа*, если оно имеет лишь конечное число неизоморфных неразложимых представлений.

Поскольку любое представление U разложимо в прямую сумму подпространств $U = \bigoplus_{x\in\mathcal{P}} U_x$, где $U_x \subset U_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(x)$, то можем рассматривать его как набор вида $U = (U_0; U_x \mid x \in \mathcal{P})$, удовлетворяющий условию $U_x\mathcal{L}(x,y) \subset U_y$.

Обозначим $\underline{U}_x = (U\mathcal{R})_x = \sum_{y<x} U_y\mathcal{L}(y,x)$.

Размерность представления U есть вектор $d = \underline{\dim}\, U = (d_0; d_x \mid x \in \mathcal{P})$, где $d_0 = \dim_{\mathbb{R}} U_0$ и $d_x = \dim_{\mathcal{L}(x,x)} U_x/\underline{U}_x$. Если этот вектор не имеет нулевых координат, то его (и представление U) называют *точным*. Непустое множество $\mathcal{P}$ называется *точным*, если оно имеет хотя бы одно точное неразложимое представление. Представление U называют *точным в точке* x, если $d_x \neq 0$.

Пусть S — представление множества $\mathcal{P}$ над кольцом полиномов $\mathbb{R}[X]$, определяемое аналогично случаю поля:

$$S \subset S_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_0\,,$$

где S_0 — свободный $\mathbb{R}[X]$-модуль конечного ранга. Говорят, что $\mathbb{R}[X]$-представление S *порождает* обычное $\mathbb{R}$-представление U, если

$$U = \operatorname{Im}\left(A \underset{\mathbb{R}[X]}{\otimes} S \xrightarrow{1_A\otimes i} A \underset{\mathbb{R}[X]}{\otimes} S_0 \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{L}_0\right),$$

где A — некоторый конечномерный (над $\mathbb{R}$) $\mathbb{R}[X]$-модуль, а $i\colon S \to S_0 \otimes \mathcal{L}_0$ — естественное вложение. Совокупность всех представлений множества $\mathcal{P}$ над $\mathbb{R}$, порожденных одним представлением S, принято называть *серией представлений.*

Множество бесконечного типа называется *однопараметрическим*, если у него есть серия представлений, содержащая почти все неразложимые представления любой фиксированной размерности.

С каждым оснащенным множеством $\mathcal{P}$ связывается квадратичная *форма Титса* f, определяемая на размерностях (или произвольных векторах) $d = (d_0; d_i \mid i \in \mathcal{P})$ формулой

$$f(d) = d_0^2 + \sum_i f_i d_i^2 + \sum_{i>j} p_{ij} f_i f_j d_i d_j - d_0 \sum_i f_i d_i\,,$$

где $f_i = 1$ ($f_i = 2$), если точка $i \in \mathcal{P}$ одинарная (двойная), и $p_{ij} = 1$ ($p_{ij} = 1/2$), если отношение $i > j$ сильное (слабое).

Число f_i назовем *весом* точки $i \in \mathcal{P}$. Будем называть *весом антицепи* $X \subset \mathcal{P}$ число $\sum_{i\in X} f_i$. Назовем *весом* произвольного множества $\mathcal{P}$ максимальный вес содержащихся в $\mathcal{P}$ антицепей.

Заметим, что вес обычного множества $\mathcal{P}$ равен его *ширине*, т.е. максимальному числу попарно несравнимых элементов.

Форму f называют *слабо положительной (слабо неотрицательной)*, если $f(d) > 0$ ($f(d) \geq 0$) при всех $d > 0$ (мы пишем $d \leq d'$, если $d_i \leq d'_i$ при любых $i \in \widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{0\}$, при этом $d < d'$ означает $d \leq d'$ и $d \neq d'$).

Корнями формы f (или множества $\mathcal{P}$) называются векторы, получающиеся отражениями (см. [16]) из *простых корней* δ_i ($i \in \widehat{\mathcal{P}}$), имеющих единственную отличную от нуля координату, равную 1 ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Условимся положительные корни, отличные от корней δ_i, $i \in \mathcal{P}$, называть *допустимыми* (в частности, простой корень δ_0 — допустимый)[2].

[2]В отличие от корня δ_0 простые корни δ_i, $i \in \mathcal{P}$, соответствуют матрицам с нулевым числом строк, которые мы не рассматриваем.

Целочисленный вектор μ будем называть *мнимым корнем* формы f (множества $\mathcal{P}$), если $f(\mu) = 0$.

Ниже $(l_1, \dots, l_n)$ обозначает кардинальную сумму n обычных цепей (т.е. линейно упорядоченных множеств) с соответствующим числом точек, а (N, l) — кардинальную сумму (тоже неоснащенную) l-точечной цепи и четырехточечного множества $N = \{a < b > c < d\}$.

Мы предполагаем известными результаты М. Клейнера [3,4] об обычных частично упорядоченных множествах конечного типа и их представлениях, включая его список критических множеств $K_1 = (1,1,1,1)$, $K_2 = (2,2,2)$, $K_3 = (1,3,3)$, $K_4 = (N,4)$, $K_5 = (1,2,5)$, а также результаты В.В. Отрашевской [5,6] о представлениях обычных однопараметрических множеств, в том числе (в обозначениях из [10]) ее список точных множеств $K_1, \dots, K_5$, $A_1, \dots, A_{24}$, $S_1, \dots, S_3$.

Следующие четыре оснащенных множества $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{a \prec b \prec c;\ \xi\}$, $L_1 = \{a; \omega; \nu\}$, $L_2 = \{a \prec b;\ \xi < \eta\}$, в которых точки a, b, c двойные, а ξ, η, ω, ν — одинарные, тоже называются *критическими*.

Описание оснащенных множеств конечного типа и их представлений является прямым следствием более общего результата Б. Клемп и Д. Симсона [12] о вектроидах конечного типа. В частности, из [12] следуют такие факты.

(1) Для конечного оснащенного частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ следующие утверждения равносильны:
  (a) $\mathcal{P}$ является множеством конечного типа;
  (b) $\mathcal{P}$ не содержит критических подмножеств $K_1, \dots, K_5$, M_1, M_2, L_1, L_2;
  (c) форма Титса множества $\mathcal{P}$ слабо положительна.

(2) Размерности неразложимых представлений оснащенных множеств конечного типа в точности совпадают с допустимыми корнями формы Титса, причем для каждого такого корня r существует (с точностью до изоморфизма) ровно одно неразложимое представление размерности r.

(3) Список точных нетривиально оснащенных множеств конечного типа состоит из шести множеств $H_1 = \{a\}$, $H_2 = \{a; \xi\}$, $H_3 = \{a; \xi < \eta\}$, $H_4 = \{a \prec b\}$, $H_5 = \{a \prec b;\ \xi\}$, $H_6 = \{a \prec b \prec c;\ \xi,\ \text{где } a \lhd c\}$ (где, как и выше, точки a, b, c двойные, ξ, η — одинарные), имеющих соответственно 2,3,1,1,7,1 точных неразложимых представлений, выписанных в [12, 15].

При исследовании однопараметрических оснащенных множеств достаточно ограничиться рассмотрением множеств веса ≤ 4, поскольку, как нетрудно проверить, любая антицепь веса ≥ 5 не является однопараметрической.

Основной целью данной работы является доказательство следующих утверждений.

Теорема 1. *Оснащенное частично упорядоченное множество веса ≤ 4 является однопараметрическим тогда и только тогда, когда оно содержит ровно одно критическое подмножество (т.е. ровно одно из множеств $K_1, \dots, K_5$, M_1, M_2, L_1, L_2).*

Теорема 2. *Для того чтобы вектор $d > 0$, соответствующий оснащенному однопараметрическому множеству, был размерностью неразложимого представления, необходимо и достаточно, чтобы он был допустимым корнем, мнимым корнем или особым вектором (определение особого вектора дано в замечании 2 ниже). При этом:*

a) если d — допустимый корень или особый вектор, то существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) неразложимое представление размерности d;

b) если d — мнимый корень, то существует бесконечно много неизоморфных неразложимых представлений размерности d.

Теорема 3. *Нетривиально оснащенное однопараметрическое частично упорядоченное множество является точным тогда и только тогда, когда оно изоморфно или антиизоморфно одному из следующих 28 множеств (буквами a, b, p, q обозначены двойные точки, ξ, η, ω, ν — одинарные):*
M_1, M_2, $M_3 = \{a < \xi; b\}$, $M_4 = \{a < \xi; b < \eta\}$, $M_5 = \{a < \xi < \eta; b\}$,
$M_6 = \{\xi < a; b < \eta\}$, $M_7 = \{\xi < a < \eta; b\}$, $M_8 = \{a \prec p \succ b\}$,
$M_9 = \{\xi > a \prec p \succ b\}$, $M_{10} = \{q \prec (a,b) \prec p\}$, $M_{11} = \{(a,b) \prec p \prec q\}$,
$M_{12} = \{a > \xi < \eta > b\}$, $M_{13} = \{q \prec (a,b) \prec p,$ *где* $q \lhd p\}$,
L_1, L_2, $L_3 = \{a < \xi; \omega; \nu\}$, $L_4 = \{a; \omega < \xi > \nu\}$, $L_5 = \{a < \xi < \eta; \omega; \nu\}$,
$L_6 = \{a < \xi; (\omega, \nu) < \eta\}$, $L_7 = \{a; (\omega, \nu) < \xi < \eta\}$, $L_8 = \{a < \xi; \eta < (\omega, \nu)\}$,
$L_9 = \{\xi < a < \eta; \omega; \nu\}$, $L_{10} = \{a; \xi < (\omega; \nu) < \eta\}$, $L_{11} = \{a \prec p > \omega; \nu\}$,
$L_{12} = \{q \prec a \prec p > \omega > q; \nu\}$, $L_{13} = \{\omega > q \prec a \prec p > \nu\}$,
$L_{14} = \{a > \xi < \eta > (\omega, \nu)\}$, $L_{15} = \{\omega > q \prec a \prec p > \nu,$ *где* $q \lhd p\}$.

Замечание 1. $(x, y) < z$ означает $x < z$ и $y < z$ (аналогично для символов $>$, $\prec$, $\succ$). Диаграммы перечисленных множеств изображены в [15] (таблица 1).

Замечание 2. Точный вектор d, соответствующий нетривиально оснащенному однопараметрическому множеству $\mathcal{P}$, называется *особым* тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{P}$ (рассматриваемое с точностью до антиизоморфизма) совпадает с одним из множеств M_{12}, M_{13}, L_{14}, L_{15} и $d = (d_0; d_a, d_b, d_x, d_y) = (2k+1; k, k, 1, 1)$ при $\mathcal{P} = M_{12}$; $d = (d_0; d_a, d_b, d_p, d_q) = (2k+2; k, k, 1, 1)$ при $\mathcal{P} = M_{13}$; $d = (d_0; d_a, d_u, d_v, d_x, d_y) = (2k+1; k, k, k, 1, 1)$ при $\mathcal{P} = L_{14}$; $d = (d_0; d_a, d_u, d_v, d_p, d_q) = (4k+2; 2k, 2k, 2k, 1, 1)$ при $\mathcal{P} = L_{15}$, где $k \geq 1$. При этом $f(d) = 2$ в случае $\mathcal{P} = M_{12}$, L_{14} и $f(d) = 4$ в случае $\mathcal{P} = M_{13}$, L_{15}.

В процессе работы получен полный список неразложимых представлений всех перечисленных множеств в матричной форме (включая двойственные множества).

Попутно описаны также все их положительные корни. Будем говорить, что два корня (особых вектора) однопараметрического множества принадлежат одному *типу*, если их разность является мнимым корнем. Минимальный положительный корень среди множества всех однотипных корней назовем *неприводимым.*

Оказывается, множества $M_1, \ldots, M_{11}$, $L_1, \ldots, L_{13}$ имеют в совокупности 185 типов точных положительных корней (в том числе 102 типа со значением формы Титса 1 и 83 — со значением 2). Из них только 17 корней являются точными неприводимыми — ими обладают множества M_1, M_2, L_1, L_2, L_3, L_{11}, имеющие соответственно 1,3,3,8,1,1 таких корней. Все корни перечислены в [15] (таблицы 1, 2 и Приложения 2, 3, 4).

Комбинируя теорему 3 с результатами [6], получаем полный список точных оснащенных однопараметрических множеств, состоящий из 60 множеств $K_1, \ldots, K_5$; $A_1, \ldots, A_{24}$; $S_1, \ldots, S_3$; $M_1, \ldots, M_{13}$; $L_1, \ldots, L_{15}$, рассматриваемых с точностью до антиизоморфизма.

С учетом результатов [10] получаем также список всех их точных неприводимых корней, состоящий из 42 векторов, отвечающих рассматриваемым с точностью до антиизоморфизма множествам $K_1, \ldots, K_5$, A_{11}, M_1, M_2, L_1, L_2, L_3, L_{11} (с числом точных неприводимых корней соответственно 1,1,3,8,11,1,1,3,3,8,1,1).

§2. Алгоритмы дифференцирования

Рассмотрим алгоритмы A и B, представляющие собой некоторую модификацию для оснащенного случая операций дифференцирования по максимальному элементу [1] и пополнения особым отношением [18] соответственно.

Запись $x - y$ будет означать несравнимость элементов x, y частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$. Обозначим $N(a) = \{x \in \mathcal{P} \mid x - a\}$ при $a \in \mathcal{P}$

и $N(A) = \bigcap_{a\in A} N(a)$ при $A \subset \mathcal{P}$. Вместо $N(\{a_1,\dots,a_n\})$ просто пишем $N(a_1,\dots,a_n)$.

Пусть

$$a^{\vee} = \{x\in\mathcal{P} \mid a\le x\},\quad a_{\wedge} = \{x\in\mathcal{P} \mid x\le a\},\quad A^{\mathrm{up}} = \bigcup_{a\in A} a^{\vee},\quad A_{\mathrm{down}} = \bigcup_{a\in A} a_{\wedge}.$$

Если ρ — произвольное бинарное отношение на точках множества $\mathcal{P}$, то для подмножеств $X,Y\subset\mathcal{P}$ пишем $X\ \rho\ Y$, если $x\ \rho\ y$ для всех $x\in X$, $y\in Y$. В частности, $X - Y$ ($X<Y$) означает, что подмножества X,Y образуют *кардинальную (ординальную)* сумму в $\mathcal{P}$.

Объединение непересекающихся подмножеств X,Y называем их *суммой* и обозначаем $X+Y$.

Для подмножества $A\subset\mathcal{P}$ положим $A^{\nabla} = A+\{x\in\mathcal{P} \mid A\lhd x\}$, $A_{\Delta} = A+\{x\in\mathcal{P} \mid x\lhd A\}$ и обозначим через $\max A$ ($\min A$) множество всех максимальных (минимальных) точек A. Будем рассматривать также *выпуклую оболочку* $[A] = \{x\in\mathcal{P} \mid a'\le x\le a''$ для некоторых $a',a''\in A\}$, частным случаем которой является *сегмент* $[a,b]$ при $A=\{a,b\}$ и $a\le b$. Отношение $x<y$ назовем *коротким*, если сегмент $[x,y]$ не содержит точек, отличных от x,y.

Цепь вида $a_1\prec a_2\prec\dots\prec a_n$ ($n\ge 1$) будем называть *слабой* (при этом отношения $a_i<a_{i+k}$ при $k\ge 2$ могут быть произвольными: как сильными, так и слабыми). Указанную цепь назовем *вполне слабой*, если $a_1\prec a_n$.

Цепь вида $a_1\lhd a_2\lhd\dots\lhd a_n$ назовем *сильной* (ее точки могут быть как одинарными, так и двойными).

Через $|X|$ обозначим число элементов множества X.

Мы часто отождествляем одноточечное множество с точкой: $\{a\}=a$.

Для произвольного вещественного пространства U_0 обозначим через $\widetilde{U}_0 = U_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ его *комплексификацию*, а для гомоморфизма $\varphi\colon U_0\to V_0$ $\mathbb{R}$-пространств положим $\widetilde{\varphi} = \varphi\otimes 1_{\mathbb{C}}\colon \widetilde{U}_0\to\widetilde{V}_0$. Ясно, что в этих обозначениях морфизм представлений оснащенного множества $U\to V$, где $U=(U_0;U_x \mid x\in\mathcal{P})$, $V=(V_0;V_x \mid x\in\mathcal{P})$ есть любое такое $\mathbb{R}$-линейное отображение $\varphi\colon U_0\to V_0$, что $U_x\varphi\subset V_x$ ($U_x\widetilde{\varphi}\subset V_x$) для одинарной (двойной) точки $x\in\mathcal{P}$ (напомним, что U_x есть $\mathbb{R}$-подпространство в U_0, если x — одинарная точка, и $\mathbb{C}$-подпространство в $\widetilde{U}_0$, если эта точка двойная).

Поскольку комплексификация $\widetilde{U}_0$ является естественной прямой суммой $\mathbb{R}$-пространств $\widetilde{U}_0 = U_0\oplus iU_0$ (при отождествлении $U_0=U_0\otimes 1$ и $iU_0 = U_0\otimes i$), то произвольное $\mathbb{R}$-подпространство $L\subset\widetilde{U}_0$ имеет *действительную* и *мнимую* части $\operatorname{Re} L$, $\operatorname{Im} L\subset U_0$ (которые совпадают, если L является $\mathbb{C}$-пространством). Положим $L^- = L\cap U_0$, $L^+ = \operatorname{Re} L$ (очевидно, $L^-\subset L^+\subset U_0$, причем $L^- = L^+ = L$, если $L\subset U_0$).

В частности, для любой точки $x\in\mathcal{P}$ имеем вещественные подпространства $U_x^-\subset U_x^+\subset U_0$, причем $U_x^- = U_x^+ = U_x$, если x — одинарная точка. При $X\subset\mathcal{P}$ пусть $U_X^+ = \sum_{x\in X} U_x^+$ и $U_X^- = \bigcap_{x\in X} U_x^-$ (заметим, что $U_\phi^+ = 0$ и $U_\phi^- = U_0$, и что $U_x^+\subset U_y^-$ при $x\lhd y$).

k-пространство с базисом $e_1,\dots,e_n$ обозначаем $k\{e_1,\dots,e_n\}$ либо просто $\{e_1,\dots,e_n\}$.

Обозначим через $\mathcal{P}^*$ множество, антиизоморфное множеству $\mathcal{P}$ (а через $\mathcal{L}^*$ — соответствующий ему вектроид). Полагая $U_0^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(U_0,\mathbb{R})$ и $\widetilde{U}_0^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\widetilde{U}_0,\mathbb{C})$, сопоставим каждому представлению $U=(U_0;U_x \mid x\in\mathcal{P})$ множества $\mathcal{P}$ *двойственное представление* $U^* = (U_0^*;U_x^* \mid x\in\mathcal{P}^*)$ множества $\mathcal{P}^*$, где $U_x^* = U_x^{\perp}$ — ортогональное дополнение пространства U_x в пространстве $\mathbb{R}$- или

$\mathbb{C}$-функционалов $(U_0 \otimes \mathcal{L}(x))^*$, т.е. $U_x^\perp = \{\varphi \in U_0^* \mid U_x\varphi = 0\}$ для одинарной точки x и $U_x^\perp = \{\varphi \in \widetilde{U}_0^* \mid U_x\varphi = 0\}$ для двойной точки x. Ясно, что $(U^*)^* \cong U$.

Иногда удобно отождествлять $\widetilde{U}_0$ с прямой суммой $U_0 \oplus U_0$ и представлять пространство $\mathbb{C}$-функционалов $\widetilde{U}_0^*$ в виде $\widetilde{U}_0^* = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} f & g \\ -g & f \end{smallmatrix}\right) \mid f, g \in U_0^* \right\}$ или, более кратко, $\widetilde{U}_0^* = \{(f,g) \mid f, g \in U_0^*\}$. Тогда при $L \subset \widetilde{U}_0$ будем иметь $L^* = \{(f,g) \mid xf = yg$ и $xg = -yf \ \forall\, (x,y) \in L\}$, откуда легко выводится $(L^+)^* = (L^*)^- = \{f \mid xf = 0 \ \forall\, (x,y) \in L\}$ и $(L^-)^* = (L^*)^+ = \{f \mid xf = 0 \ \forall\, (x,0) \in L\}$.

Определим *коразмерность* представления U соотношением $\underline{\operatorname{codim}}\, U = \underline{\dim}\, U^*$. Отметим следующий простой, но полезный факт.

Лемма 1. *Произвольное оснащенное множество $\mathcal{P}$ является точным тогда и только тогда, когда точным является двойственное множество $\mathcal{P}^*$.*

В самом деле, если U — точное неразложимое представление множества $\mathcal{P}$ и $d = \underline{\dim}\, U$, $d^* = \underline{\dim}\, U^*$, то при замене каждого пространства U_x с условием $d_x^* = 0$ пространством $\underline{U}_x$ получим новое неразложимое представление U_1 множества $\mathcal{P}$ коразмерности $d_1^* = \underline{\dim}\, U_1^*$, такой, что $(d_1^*)_x \neq 0$ при всех $x \in \mathcal{P}$, т.е. U_1^* будет точным представлением множества $\mathcal{P}^*$.

Дефектом представления U (или вектора $d = \underline{\dim}\, U$) относительно критического подмножества $K \subset \mathcal{P}$ принято называть число $\partial = \partial(U) = \partial(d) = (\mu_K, d)$, где $(\cdot,\cdot)$ — соответствующая оснащенному множеству $\mathcal{P}$ несимметрическая билинейная форма, задаваемая формулой

$$(\alpha,\beta) = \alpha_0\beta_0 + \sum_i f_i\alpha_i\beta_i + \sum_{i>j} p_{ij} f_i f_j \alpha_i \beta_j - \beta_0 \sum_i f_i \alpha_i \quad (i,j \in \mathcal{P}).$$

Обозначим через $\operatorname{Ind}\mathcal{P}$ полный набор попарно неизоморфных неразложимых представлений множества $\mathcal{P}$, а через U^m (φ^m) — прямую сумму m экземпляров представления U (отображения φ).

Напомним, что *носителем* представления U называется подмножество $\operatorname{Supp} U = \{x \in \mathcal{P} \mid d_x \neq 0$ при $d = \underline{\dim}\, U\}$.

Антицепь, состоящую из двух (трех) точек, будем называть *диадой (триадой)*, а произвольную ординальную сумму одноточечных множеств и диад — *гирляндой.*

Дифференцирование A. Пусть $\mathcal{P}$ — оснащенное множество. Пару $(\mathcal{A}, b)$, где $\mathcal{A} = \{a_1 \prec \cdots \prec a_n\}$, $n \geq 1$, — вполне слабая цепь в $\mathcal{P}$, и b — одинарная точка, не сравнимая с $\mathcal{A}$, будем называть A-подходящей (т.е. подходящей для дифференцирования A), если $\mathcal{P} = \mathcal{A}^\nabla + b_\Delta$. *Производным множеством* множества $\mathcal{P}$ по паре $(\mathcal{A}, b)$ назовем множество $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{(\mathcal{A},b)}$, получаемое из $\mathcal{P}$ следующим образом.

1) Отношения в подмножестве $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$ сохраняются без изменений.
2) Цепь $\mathcal{A}$ заменяется множеством $\mathcal{A}'$, состоящим из одинарных точек $a_1^+, \dots, a_n^+$, двойных точек $a_1^-, \dots, a_n^-$, а также двойных точек (a_i, a_j) при $i < j$ со следующими отношениями:
   a) $a_1^- \prec a_2^- \prec \cdots \prec a_n^-$;
   b) $a_i^+ \lhd (a_i, a_{i+1}) \prec \cdots \prec (a_i, a_n)$;
   c) $a_i^- \prec (a_1, a_i) \prec \cdots \prec (a_{i-1}, a_i) \lhd a_i^+$.
3) Всякое отношение $x < a_i$ в $\mathcal{P}$, где $x \in b_\Delta$, индуцирует отношение того же типа (т.е. слабое или сильное) $x < a_i^-$ в $\mathcal{P}'$; кроме того, добавляются отношения $a_n^+ \lhd \mathcal{A} + b$ (разумеется, добавляются все отношения, индуцируемые указанными).

Функтор дифференцирования $(-)'\colon \mathcal{P}\text{-sp} \to \mathcal{P}'\text{-sp}$ сопоставляет объекту U производный объект U' по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
&U'_0 = U_0, \quad U'_{a_i^-} = U_{a_i} \cap \widetilde{U}_b, \quad U'_{a_i^+} = U^+_{a_i} \cap U_b,\\
&U'_{(a_i,a_j)} = (\widetilde{U}^+_{a_i} + U_{a_j}) \cap \widetilde{U}_b \quad (i<j),\\
&U'_x = U_x \ \text{ для остальных } \ x \in \mathcal{P}'.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для морфизма $\varphi\colon U \to V$, рассматриваемого как линейное отображение $\varphi\colon U_0 \to V_0$, полагаем $\varphi' = \varphi$.

Можно показать, по аналогии с [10, 18], что функтор $(-)'$ индуцирует эквивалентность факторкатегорий категорий $\mathcal{P}$-sp и $\mathcal{P}'$-sp по некоторым идеалам, однако такая категорная интерпретация в данной работе нам не понадобится. Мы установим лишь соответствие между неразложимыми объектами категорий $\mathcal{P}$-sp и $\mathcal{P}'$-sp.

Для этого нам понадобятся стандартные представления малых размерностей $P(x)$, $D(x)$, $D(x,y)$, определяемые матрицами следующего вида:

$$P(x) = \begin{array}{c} x \\ \boxed{1} \end{array} \qquad D(x) = \begin{array}{c} x \\ \left[\begin{array}{|c|} \hline i \\ 1 \\ \hline \end{array}\right] \end{array} \qquad D(x,y) = \begin{array}{cc} x & y \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{|c|c|} \hline i & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline \end{array}\right]} \end{array}$$

(x — произвольная точка) (x — двойная точка) ($x \prec y$ — слабое отношение)

Заметим, что $P(x) \subset \mathcal{L}_0$, именно, $P(x) = \sum_{x\le y} \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(x,y)$. Для подмножества $X \subset \mathcal{P}$ можем также определить представление $P(x) = \sum_{x\in X} P(x)$, содержащееся в $\mathcal{L}_0$. Условимся считать, $P(x_1,\dots,x_n) = P(\{x_1,\dots,x_n\})$. Ясно, что $P(X) = P(\min X)$, $P(\mathcal{P}) = \mathcal{L}_0$ и $P(\phi) = [\delta_0]$, где $[d]$ обозначает неразложимое представление размерности d (в случае, если оно существует и единственно с точностью до изоморфизма). Таким образом, $P(x) = [\delta_0 + \delta_x]$, $D(x) = [2\delta_0 + \delta_x]$, $D(x,y) = [2\delta_0 + \delta_x + \delta_y]$. Несложно проверить следующий факт (вытекающий также из [12]).

Лемма 2. *Представлениями типа $P(x)$, $D(x)$, $D(x,y)$ и $[\delta_0]$ исчерпываются все неразложимые представления любой слабой цепи.*

Обозначим $A = a_n^\nabla \backslash a_n$ (не следует путать с самим символом дифференцирования). Легко видеть, что $(P(a_i))' = (P(A))' = P(A)$ и $(D(a_i))' = (D(a_i,a_j))' = P^2(A)$, где $i<j$. Представления множества $\mathcal{P}$, не содержащие прямых слагаемых $P(a_i)$, $D(a_i)$ и $D(a_i,a_j)$, будем называть *приведенными*.

Если U — представление множества $\mathcal{P}$, то, как правило, производное представление U' содержит прямые слагаемые типа $P(A)$. Обозначим через $U^\downarrow$ представление множества $\mathcal{P}'$, определенное однозначно (с точностью до изоморфизма) условием $U' = U^\downarrow \oplus P^m(A)$, где $m = \dim\,(U^+_{a_n} + U_b)/U_b$.

Пусть W — объект производной категории $\mathcal{P}'$-sp. Для построения *первообразного объекта* $W^\uparrow$ категории $\mathcal{P}$-sp, удовлетворяющего соотношению $(W^\uparrow)^\downarrow \cong W$, представим $\mathbb{R}$-пространства $W_{a_i^+}$ в виде $W_{a_i^+} = \underline{W}_{a_i^+} \oplus F_i$, а $\mathbb{C}$-пространства $W_{(a_i,a_j)}$ при $i<j$ — в виде $W_{(a_i,a_j)} = \underline{W}_{(a_i,a_j)} \oplus G_{ij}$, где F_i и G_{ij} — некоторые дополнения. Фиксируя в дополнениях F_i и G_{ij} базисы $F_i = \{f_i^1,\dots,f_i^{m_i}\}$, $G_{ij} = \{g_{ij}^1,\dots,g_{ij}^{m_{ij}}\}$, рассмотрим новые $\mathbb{R}$-пространства $T_i = \{e_i^1,\dots,e_i^{m_i}\}$,

$T_{ij} = \{p_{ij}^1, q_{ij}^1, \dots, p_{ij}^{m_{ij}}, q_{ij}^{m_{ij}}\}$ $(i < j)$ и $T = \big(\bigoplus_{i=1}^n T_i\big) \oplus \big(\bigoplus_{i<j} T_{ij}\big)$. Положим $W^{\uparrow} = U = (U_0, U_x)_{x\in\mathcal{P}}$, где

$$\begin{aligned}
U_0 &= W_0 \oplus T;\\
U_{a_i} &= U_{a_{i-1}} + W_{a_i^-} + \{f_i^1 + e_i^1 \otimes i, \dots, f_i^{m_i} + e_i^{m_i} \otimes i\} +\\
&\quad + \sum_{i<j} \{p_{ij}^1 + q_{ij}^1 \otimes i, \dots, p_{ij}^{m_{ij}} + q_{ij}^{m_{ij}} \otimes i\} +\\
&\quad + \sum_{k<i} \{g_{ki}^1 + p_{ki}^1, \dots, g_{ki}^{m_{ki}} + p_{ki}^{m_{ki}}\} \quad (U_{a_0} = 0);\\
U_x &= W_x \quad \text{при} \quad x \le b;\\
U_x &= W_x + (T \otimes \mathcal{L}(x)) \quad \text{при} \quad x > a_n\,.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Достаточно громоздкие, на первый взгляд, соотношения (2.1) и (2.2) становятся естественными и прозрачными при переходе к матричной интерпретации алгоритма. Именно, рассмотрим матрицу, соответствующую представлению U, и выделим в ее нижней части строки, отвечающие пространству U_b. Затем приведем (используя лемму 2) верхние части полос точек a_i и с помощью сильных прибавлений $\mathcal{A} \lhd A$ сделаем нулевой часть верхней части полосы A. Получим матрицу следующего вида (оставим лишь две точки a_i, a_j и отбросим прямые слагаемые $D(a_i)$, $D(a_j)$):

$$U = W^{\uparrow}\quad
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 & & a_i & & & a_j & & A & b_{\Delta} & \\
\hline
T_i & 0 & 0 & iE & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
T_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & iE & 0 & 0 & T\\
\hline
T_{ij} & 0 & iE & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & W = U^{\downarrow}\\
\hline
 & & 0 & \mathbb{R} & & & \mathbb{R} & & & U_b\\
\hline
 & a_i^- & & a_i^+ & a_j^- & (a_i, a_j) & a_j^+ & & &
\end{array}$$

Стоящая в двух блоках буква $\mathbb{R}$ обозначает вещественность элементов этих блоков (что достигается прибавлениями строк двух верхних горизонтальных полос), E обозначает, как обычно, единичную матрицу, а iE — скалярную, полученную из E умножением на мнимую единицу $i \in \mathbb{C}$ (последнюю не следует путать с индексом i).

Стандартный прием обоснования алгоритма состоит в выделении лишь тех допустимых преобразований всей матрицы (соответствующей представлению U), которые не изменяют вида уже приведенной части, расположенной в горизонтальной полосе T. Несложно проверить, что при этом в оставшейся полосе (соответствующей W) получим в точности задачу о представлениях производного множества $\mathcal{P}'$. Наоборот, если исходить из представления W, то восстанавливаемое первообразное представление $U = W^{\uparrow}$ не будет зависеть, с точностью до изоморфизма, от выбора дополнений F_i и G_{ij}. Более того, очевидно, $(W^{\uparrow})' \cong W \oplus P^m(A)$, где $m = \dim T = \dim (U_{a_n}^+ + U_b)/U_b$, т.е. $(W^{\uparrow})^{\downarrow} \cong W$, что и требуется. Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Соответствие $U \to U^{\downarrow}$, индуцируемое функтором $(-)'$, задает биекцию множества всех приведенных попарно неизоморфных представлений множества $\mathcal{P}$ на множество всех попарно неизоморфных представлений множества $\mathcal{P}'$, причем обратная биекция задается операцией $(-)^{\uparrow}$, неразложимые представления переходят в неразложимые и выполняется неравенство* $\dim U_0^{\downarrow} \leq \dim U_0$.

Замечания.

(a) Если $U^+_{a_n} \not\subset U_b$, то, очевидно, $\dim U_0^{\downarrow} < \dim U_0$, а если $U^+_{a_n} \subset U_b$, то U фактически является представлением множества $\overline{\mathcal{P}}$, получаемого из $\mathcal{P}$ добавлением отношения $a_n < b$.

(b) Аналогично строится более общее дифференцирование A по паре $(\mathcal{A}, b)$, где $\mathcal{A}$ — слабая (но необязательно вполне слабая) цепь.

(c) В ситуации $a_n^{\nabla} = a_n$ (т. е. при $A = \phi$) комбинацию дифференцирования A с последующим отбрасыванием единственного максимального элемента b будем называть, как и в [1], *дифференцированием по максимальной точке* b.

Дифференцирование B (операция усиления слабого отношения). Пару двойных точек (a, b) оснащенного множества $\mathcal{P}$ будем называть *B-подходящей*, если отрезок $[a, b]$ является вполне слабой цепью и $\mathcal{P} = [a, b] + A + B$, где $A = a^{\nabla} \setminus a$, $B = b_{\Delta} \setminus b$. *Производным* множеством множества $\mathcal{P}$ по такой паре (a, b) назовем множество $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}_{(a,b)}$, получаемое из $\mathcal{P}$ *усилением* слабого отношения $a \prec b$, т.е. превращением его в сильное отношение $a \lhd b$.

Очевидно, категория $\overline{\mathcal{P}}$-sp является полной подкатегорией категории $\mathcal{P}$-sp, и вопрос состоит в том, насколько меньше неразложимых представлений имеет множество $\overline{\mathcal{P}}$ по сравнению с $\mathcal{P}$. Оказывается, ровно на одно.

Предложение 1. *Категория $\overline{\mathcal{P}}$-sp совпадает с полной подкатегорией категории $\mathcal{P}$-sp, образованной объектами без прямых слагаемых $D(a)$ и, следовательно,* $\operatorname{Ind}\overline{\mathcal{P}} = \operatorname{Ind}\mathcal{P} \setminus \{D(a)\}$.

Для доказательства обозначим $[a, b] = \{a_1 \prec \cdots \prec a_n\}$, где $a_1 = a$; $a_n = b$ и $a_1 \prec a_n$ $(n \geq 2)$. Очевидно, представление $D = D(a)$ множества $\mathcal{P}$ не является представлением множества $\overline{\mathcal{P}}$, так как при $D_0 = \mathbb{R}\{e_1, e_2\}$ пространство $D_a = D_b = \mathbb{C}\{e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes i\}$ не выдерживает умножения на полный $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Пусть $U \in \operatorname{Ind}\mathcal{P}$ и $U \neq D(a)$. Представим $\mathbb{R}$-пространство U_0 в виде $U_0 = U_B^+ \oplus V_0$, где V_0 — некоторое дополнение, и обозначим через $\pi\colon U_0 \to V_0$ естественную проекцию. Рассмотрим представление $V = (V_0, V_{a_1}, \ldots, V_{a_n})$ цепи $[a_1, a_n]$ при $V_{a_i} = U_{a_i}\widetilde{\pi}$ и разложим его в прямую сумму неразложимых. Если W — любое из прямых слагаемых V, точное в точке a, то $W \neq D(a)$, иначе, как легко видеть (учитывая сильное отношение $a \lhd A$), $W = D(a)$ выделится прямым слагаемым из U, что невозможно. Значит (см. лемму 2), $W = P(a)$ или $W = D(a, a_i)$, $i \geq 2$, а тогда $W_b = \widetilde{W_0}$, т.е. $W_a \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset W_b$ и, как следствие, $V_a \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset V_b$. Но поскольку $\widetilde{U}_B^+ \subset U_b$, то это влечет $U_a \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset U_b$, т.е. $U \in \operatorname{Ind}\overline{\mathcal{P}}$, что и требовалось показать.

Примером Дифференцирования B может служить переход от множества L_{13} к L_{15}.

Пополнение особым отношением. Понятно, что Дифференцирование B является оснащенным аналогом более простой операции пополнения обычного частично упорядоченного множества особым отношением, описанной, например, в [10, 18] (в качестве предельного частного случая дифференцирования по паре точек [17]). В духе изложенного выше операцию пополнения удобно трактовать теперь следующим образом.

Пару одинарных несравнимых точек (a, b) оснащенного (или даже какого-либо более общего) множества $\mathcal{P}$ будем называть *особой*, если $\mathcal{P} = a^{\nabla} + b_{\Delta}$, а *пополнением* множества $\mathcal{P}$ относительно этой пары назовем множество $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}_{(a,b)}$, получаемое из $\mathcal{P}$ добавлением отношения $a < b$. Легко показывается (матричная выкладка здесь тривиальна), что категория $\overline{\mathcal{P}}$-sp является полной подкатегорией категории $\mathcal{P}$-sp, образованной объектами без прямых слагаемых $P(a)$, и что, в частности, $\operatorname{Ind}\overline{\mathcal{P}} = \operatorname{Ind}\mathcal{P} \setminus \{P(a)\}$. Примером операции пополнения может служить переход от множества M_6 к M_{12} и от L_8 к L_{14}.

§3. Об одной канонической форме

Условимся обозначать через $J(a)$ стандартную *клетку Жордана* над полем $\mathbb{R}$ (т.е. квадратную матрицу с числом a по главной диагонали, единицами под или над ней и нулями на остальных местах), а через $\Phi^{[k]}$ — *клетку Фробениуса* над $\mathbb{R}$, т.е. квадратную матрицу во второй естественной нормальной форме (см. [19], гл. VI, §6) вида

$$\Phi^{[k]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$

характеристический многочлен которой $f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ совпадает с минимальным и являетя k-й степенью неприводимого многочлена. В случае $f(x) = (x^2 + px + q)^k$, где $p^2 - 4q < 0$, клетку Фробениуса $\Phi^{[k]}$ будем обозначать также через $\Phi^{[k]}(p, q)$.

В работе [13] В. Длаб и К. Рингель рассмотрели и решили матричную задачу о приведении к каноническому виду вещественной прямоугольной матрицы A четного размера $2m \times 2n$ преобразованиями типа PAQ, где P, Q — квадратные невырожденные *формально комплексные* матрицы порядка $2m$ и $2n$ соответственно, т.е. матрицы, состоящие из 2×2 блоков типа $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Были получены четыре канонические формы (i)–(iv) для этой задачи, из которых нас особо будут интересовать формы (iii) и (iv).

Если в матрице A поставить на первые места нечетные строки (не меняя их порядка), а на последних местах оставить четные, и так же поступить со столбцами, то получим равносильную задачу о приведении вещественной матрицы $\widetilde{A}$, разделенной на две горизонтальные и две вертикальные полосы

$$\widetilde{A} = \begin{array}{|c|c|l} \hline & & \quad m \\ \hline & & \quad m \\ \hline \multicolumn{1}{c}{n} & \multicolumn{1}{c}{n} & \end{array} \qquad (3.1)$$

допустимыми преобразованиями ее строк и столбцов $\widetilde{P}\widetilde{A}\widetilde{Q}$, определяемыми квадратными невырожденными вещественными матрицами типа $\widetilde{P} = \left(\begin{smallmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{smallmatrix}\right)$ и $\widetilde{Q} = \left(\begin{smallmatrix} Z & T \\ -T & Z \end{smallmatrix}\right)$ порядка $2m$ и $2n$ соответственно.

В такой постановке канонические формы (iii) и (iv) из [13] приобретут вид

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{(iii)}} & & \widetilde{\text{(iv)}} \\ \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & J(a) \end{array}\right) & \qquad & \Theta^{[k]}(a,b) \\ (\,|a| \le 1\,) & & (\,b<0 \ \text{ или } \ b=0 \ \text{ и } \ a<0\,), \end{array} \tag{3.2}$$

где E — единичная матрица, $J(a)$ — упомянутая клетка Жордана, а $\Theta^{[k]}(a,b)$ — некоторая матрица специального вида, составленная из чисел $0, 1, a, b$ (со знаками $\pm$), которую мы не воспроизводим ввиду громоздкости, отсылая читателя к препринту [15] (либо к исходной работе [13]).

Дополняя это результат, мы показали в [15], что на самом деле матрица $\Theta^{[k]}(a,b)$ может быть приведена допустимыми преобразованиями к виду

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & \Phi^{[k]}(p,q) \end{array}\right), \qquad q \le 1, \tag{3.3}$$

и установили при этом явные соотношения, связывающие параметры a, b и p, q. Хотя соответствующие выкладки сравнительно короткие, они носят чисто технический и достаточно искусственный характер, поэтому мы предпочитаем их в этой публикации опустить, отсылая заинтересованного читателя к препринту [15] (§3).

Ограничимся, таким образом, формулировкой итогового результата, используемого в следующей публикации при описании представлений оснащенных множеств.

Предложение 2. *Матрица $\Theta^{[k]}(a,b)$ приводится допустимыми преобразованиями к виду (3.3), при этом параметры a, b (с условием $b < 0$ или $b = 0$ и $a < 0$) и p, q (с условием $p^2 - 4q < 0$ и $q \le 1$) связаны между собой через промежуточные параметры u, v (с условием $u \ge 0$ и $v > 0$) следующими соотношениями:*

$$\begin{cases} a = u^2 - v^2, \\ b = 2u\,v, \end{cases} \qquad \begin{cases} p = \dfrac{2(u^2+v^2-1)}{(1+u)^2+v^2}, \\[2mm] q = \dfrac{(1-u)^2+v^2}{(1+u)^2+v^2}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Объединяя предложение 2 с результатами [13], приходим к такому факту.

Теорема 5. *Матричная задача (3.1), равносильная задаче, рассмотренной в [13], имеет следующие канонические формы неразложимых матриц:*

(a) формы $\widetilde{\text{(i)}}$ и $\widetilde{\text{(ii)}}$, получающиеся указанной выше перестановкой строк и столбцов форм (i) и (ii) из [13];

(b) форму

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & X \end{array}\right),$$

фактически объединяющую формы $\widetilde{\text{(iii)}}$ и $\widetilde{\text{(iv)}}$, где X — клетка Фробениуса, характеристический полином которой является степенью произвольного неприводимого над $\mathbb{R}$ полинома (квадратичного либо линейного) со старшим коэффициентом 1 и свободным членом q с условием $|q| \le 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Назарова Л.А., Ройтер А.В., *Представления частично упорядоченных множеств*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **28** (1972), 5–31.

[2] Назарова Л.А., Ройтер А.В., *Категорные матричные задачи и проблема Брауэра–Трэлла*, Препринт 73.9, Ин-т математики АН УССР, Киев (1973), 1–100.

[3] Клейнер М.М., *Частично упорядоченные множества конечного типа*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **28** (1972), 32–41.

[4] Клейнер М.М., *О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **28** (1972), 42–59.

[5] Отрашевская В.В., *Об однопараметрических частично упорядоченных множествах*, Укр. мат. ж. **28,** (1976), №3, 334–341.

[6] Отрашевская В.В., *О представлениях однопараметрических частично упорядоченных множеств*, Матричные задачи, Киев, 1977, 144–149.

[7] Назарова Л.А., *Частично упорядоченные множества бесконечного типа*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **39** (1975), №5, 963–991.

[8] Завадский А.Г., Назарова Л.А., *Частично упорядоченные множества ручного типа*, Матричные задачи, Киев, 1977, 122–143.

[9] Завадский А.Г., Назарова Л.А., *Частично упорядоченные множества конечного роста*, Функц. анализ и его прилож. **16** (1982), №2, 72–73.

[10] Завадский А.Г., *Алгоритм дифференцирования и классификация представлений*, Извест. АН СССР. Сер. матем. **55** (1991), №5, 1007–1048.

[11] Назарова Л.А., Ройтер А.В., *Об одной задаче И.М. Гельфанда*, Функц. анализ и его прилож. **7** (1973), №4, 54–69.

[12] Klemp B., Simson D., *Schurian sp-representation-finite right peak PI-rings and their indecomposable socle projective modules*, Journal of Alg. **134** (1990), no. 2, 390–468.

[13] Dlab V., Ringel C.M., *Normal Forms of Real Matrices with Respect to Complex Similarity*, Linear Algebra and its appl. **17** (1977), 107–124.

[14] Dlab V., Ringel C.M., *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Memoires Amer. Math. Soc. **173** (1976).

[15] Забарило А.В., Завадский А.Г., *Представления однопараметрических оснащенных частично упорядоченных множеств*, Препринт 98.1, Киев. Гос. Техн. Ун-т Стр-ва и Архитект., 1998, 1–44.

[16] Ройтер А.В., *Корни целых квадратичных форм*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **148** (1978), 201–210.

[17] Завадский А.Г., *Дифференцирование по паре точек*, Матричные задачи, Киев, 1977, 115–121.

[18] Zavadskij A.G., *The Auslander-Reiten quiver for posets of finite growth, I*, Topics in Algebra, Banach Center Publ. **26** (1990), 569–587.

[19] Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, М., Наука, 1967.

Кафедра высшей математики, Киевский гос. техн. университет строительства и архитектуры

пр. Воздухофлотский, 31, Киев, 252680

zavad@public.icyb.kiev.ua

Получено 1.09.98