Математичні Студії. Т.9, №2 Matematychni Studii. V.9, No.2

УДК 517.51

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ НА КРИВИХ

В.К. Маслюченко, В.В. Нестеренко

V.K. Masluchenko, V.V. Nesterenko. *On existence of separately continuous mappings at courves*, Matematychni Studii, **9**(1998) 205–210.

One continues Baire's and Bögel's investigations on existence of points of joint continuity of separately continuous functions at continuous curves. In particular, one shows that for every mapping on product of Baire's space X and topological space Y with values at metrizable space Z, which is horizontally quasycontinuous and continuous respectively the second variable, and every continuous curve $L = \{(x, g(x)) : x \in X\}$ of countable type in the product $X \times Y$, the set of point $x \in P$ in which the mapping f is jointly continuous in the point $(x, g(x))$, is dense in X.

1. У своїй дисертації [1] Р. Бер встановив, що кожна функція $z = f(x, y)\colon [a, b]\times [c, d] \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно другої змінної і неперервна відносно першої змінної для значень, що пробігають деяку щільну підмножину відрізка $[c, d]$, має щільну множину точок сукупної неперервності на будь-якій неперервній кривій $L : y = g(x), a \le x \le b$, а отже, і на будь-якій горизонталі $y = \mathrm{const}$. Дослідження Бера продовжив К. Бегель [2], який розглянув криві, що задаються параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Ще раніше Ван Влек [3] показав, що для розглянутих Бером функцій f множина тих точок x, в яких f сукупно неперервна на всьому відрізку $\{x\} \times [c, d]$, всюди щільна на відрізку $[a, b]$, звідки легко випливає результат Бера.

У працях багатьох математиків XX ст. були продовжені дослідження Бера і Ван Влека для відображень $f\colon X \times Y \to Z$ топологічних просторів у тій частині, що стосується наявності точок неперервності на горизонталях (властивість Бера) і насиченості множини точок неперервності вертикалями (властивість Ван Влека) (див. огляди [4–6]). Наявність точок неперервності на кривих залишалась в тіні (можливо через те, що властивість Ван Влека її гарантує) і таке враження, що в абстрактній ситуації ніхто нею не займався.

Цю роботу слід розглядати як першу спробу дослідження наявності точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f\colon X \times Y \to Z$ в топологічних просторах на неперервних кривих $L : y = g(x)$, $x \in X$. Спочатку ми переносимо метод Бера на той випадок, коли X берівський, Y і Z метризовні. Далі, ми розвиваємо підхід Бегеля [7], розглядаючи клас відображень K_hC,

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C05, 54C08.

які горизонтально квазінеперервні і неперервні відносно другої змінної, подібно до того, як це робилось у [8] при дослідженні наявності точок неперервності на горизонталях. У зв'язку з цим ми вводимо відповідну умову зліченності для кривої L (див. означення п.3), яка негайно виконується, якщо Y метризовний, і показуємо, що кожне відображення з класу K_hC має всюди щільну множину точок сукупної неперервності на будь-якій неперервній кривій $L : y = g(x)$, $x \in X$, зліченого типу, якщо X берівський і Z метризований. Зауважимо, що, як показує приклад з [6, 9], існує нарізно неперервне відображення $f_0 : \mathbb{R} \times l_\infty \to \mathbb{R}$, яке на кожній прямій $\{x\} \times l_\infty$ має точку розриву, і при цьому будь-яке нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R} \times l_\infty \to \mathbb{R}$ має всюди щільну множину точок сукупної неперервності на кожній неперервній кривій $L : y = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, тому, у загальній ситуації властивість Ван Влека виявляється сильнішою від властивості Бера для кривих.

2. Нехай X, Y і Z — топологічні простори і $f : X \times Y \to Z$ — відображення. Для точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Відображення f називається нарізно неперервним, якщо для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ неперервні. Сукупність всіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ ми будемо позначати через $CC(X, Y, Z)$.

Введемо також ширший клас $\overline{C}C(X, Y, Z)$. У цей клас входять відображення $f : X \times Y \to Z$, у яких f^x неперервне для кожного $x \in X$ і f_y неперервне для всіх y з деякої всюди щільної в Y множини. Такі відображення ми назвемо ослаблено нарізно неперервними. Декартів добуток $P = X \times Y$ двох топологічних просторів X і Y топологізується з допомогою топології добутку і всі топологічні поняття щодо відображень $f : X \times Y \to Z$ стосуються саме цієї топології. Зокрема, через $C(f)$ позначається множина всіх точок сукупної неперервності відображення f, а через $D(f)$ — множина точок розриву.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається берівським, якщо кожна його відкрита непорожня підмножина є другої категорії, тобто не подається у вигляді зліченного об'єднання ніде не щільних множин. Простір X буде берівським тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності замкнених в X множин F_n, що покриває простір X, множина $G = \bigcup_{n=1}^\infty \operatorname{int} F_n$ буде всюди щільною в X [6].

Ми скажемо, що невід'ємна функція $f : X \to [0, +\infty]$ відокремлена від нуля в точці x_0, якщо існує таке число $\gamma > 0$ і такий окіл U точки x_0, що $f(x) \geq \gamma$ для кожного $x \in U$.

Функція $f : X \to (-\infty, +\infty]$ називається напівнеперервною зверху, якщо для кожної точки $x_0 \in X$, в якій $f(x_0) < +\infty$, і для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ для всіх $x \in U$. Для напівнеперервних зверху функцій $f : X \to (-\infty, +\infty]$ прообрази $f^{-1}([c, +\infty])$ замкнені для кожного $c \in (-\infty, +\infty]$.

Лема 1. *Для кожної додатної напівнеперервної зверху функції $f : X \to (0, +\infty]$, що задана на берівському просторі X, множина G всіх тих точок, де f відокремлена від нуля, є відкритою і всюди щільною в X множиною.*

Доведення. Розглянемо множини $F_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$, де $n \in N$. Оскільки f додатна і напівнеперервна зверху, то F_n замкнена для кожного $n \in N$ і $\bigcup_{n=1}^\infty F_n = X$. Тоді згідно з беровістю простору X множина $\bigcup_{n=1}^\infty \operatorname{int} F_n$ всюди щільна в X. Але $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} F_n = G$. Справді, якщо $x_0 \in U_n = \operatorname{int} F_n$ для деякого n, то $f(x) \geq \frac{1}{n}$ на U_n, отже, $x_0 \in G$. Якщо ж $x_0 \in G$, то існує такий окіл U точки x_0, що $f(x) \geq \gamma$ на U для деякого $\gamma > 0$. Якщо взяти номер n такий, що $\frac{1}{n} \leq \gamma$, то ми одержимо, що $U \subseteq F_n$, отже, $x_0 \in \operatorname{int} F_n$.

Нехай P — деяка множина, а Z — метричний простір з метрикою $|\bullet - \bullet|_Z$. Для відображення $f\colon P \to Z$, множини $E \subseteq P$ і точки $p_0 \in P$ покладемо

$$\omega_f(E) = \sup_{p', p'' \in E} |f(p') - f(p'')|_Z \quad \text{і} \quad \omega_{f,p_0}(E) = \sup_{p \in E} |f(p) - f(p_0)|_Z.$$

Число $\omega_f(E)$ називається коливанням f на множині E, а число $\omega_{f,p_0}(E)$ — центрованим коливанням. Ясно, що $\omega_f(E) \leq 2\omega_{f,p_0}(E)$. Якщо P — топологічний простір і $\mathcal{U}_{p_0}$ — система всіх околів точки $p_0 \in P$, то число $\omega_f(p_0) = \inf\{\omega_f(U) : U \in \mathcal{U}_{p_0}\}$ називається коливанням f у точці p_0. Відмітимо, що ω_f є напівнеперервною зверху функцією і тому для кожного ε множини $\{p \in P : \omega_f(p) \geq \varepsilon\}$ замкнені.

Нехай X — топологічний, а Y і Z — метричні простори. Розглянемо функцію $f\colon X \times Y \to Z$. Для кожної точки $p = (x, y) \in X \times Y$ через $\omega(p, \varrho)$ позначимо коливання функції f^x у відкритій кулі $V_\varrho(y)$ з центром y і радіусом ϱ у просторі Y.

Візьмемо деяке число $\sigma > 0$ і покладемо $\alpha_\sigma(p) = \sup\{\varrho : \omega(p, \varrho) \leq \sigma\}$. Зрозуміло, що $\omega(p, \varrho) \leq \sigma$ при $\varrho < \alpha_\sigma(p)$ і $\omega(p, \varrho) > \sigma$ при $\varrho > \alpha_\sigma(p)$.

Лема 2. *Якщо $f \in \overline{C}C(X, Y, Z)$, то α_σ є додатною напівнеперервною зверху функцією на $X \times Y$.*

Доведення. Візьмемо $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Оскільки $f^{x_0}\colon Y \to Z$ неперервне, то існує $\delta > 0$ таке, що $\omega_{f^{x_0}}(V_\delta(y_0)) \leq \sigma$. Тоді $\alpha_\sigma(p_0) \geq \delta$. Покажемо, що α_σ напівнеперервна зверху в точці p_0. Будемо вважати, що $\alpha_\sigma(p_0) < +\infty$. Візьмемо яке-небудь $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує такий окіл O точки p_0, що $\alpha_\sigma(p) \leq \alpha_\sigma(p_0) + \varepsilon$ на O.

Покладемо $\varrho_0 = \alpha_\sigma(p_0)$ і розглянемо кулі $V_0 = V_{\varrho_0}(y_0)$ і $V_1 = V_{\varrho_0 + \varepsilon/2}(y_0)$. Зрозуміло, що $\omega_{f^{x_0}}(V_1) > \sigma$. Візьмемо $\eta > 0$, таке, що $\omega_{f^{x_0}}(V_1) > \sigma + \eta$.

Нехай $B = \{y \in Y : f_y \text{ неперервне}\}$. Оскільки $\overline{B} = Y$ і f^x неперервне для кожного $x \in X$, то $\omega_{f^{x_0}}(V_1) = \omega_{f^{x_0}}(V_1 \cap B)$. Тому знайдуться точки $p_1 = (x_0, y_1)$ і $p_2 = (x_0, y_2)$, такі, що $y_1,\ y_2 \in V_1 \cap B$ і $|f(p_1) - f(p_2)|_Z > \sigma + \eta$. Функції f_{y_1} і f_{y_2} неперервні в точці x_0. Тому існує такий окіл U точки x_0, що $|f_{y_i}(x) - f_{y_i}(x_0)| < \eta/2$ при $x \in U$ та $i = 1, 2$. Покладемо $V = V_{\varepsilon/2}(y_0)$ і $O = U \times V$. Нехай $p = (x, y) \in O$. Розглянемо точки $p' = (x, y_1)$ і $p'' = (x, y_2)$. Маємо $|y_i - y|_Y \leq |y_i - y_0|_Y + |y_0 - y|_Y < \varrho + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varrho_0 + \varepsilon$ при $i = 1, 2$. Отже, $y_i \in V_{\varrho_0 + \varepsilon}(y)$ при $i = 1, 2$. Крім того, $|f(p') - f(p'')|_Z \geq$ $\geq |f(p_1) - f(p_2)| - |f(p') - f(p_1)|_Z - |f(p'') - f(p_2)|_Z > \sigma + \eta - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} = \sigma$. Тому, $\alpha_\sigma(p) \leq \varrho_0 + \varepsilon = \alpha_\sigma(p_0) + \varepsilon$.

Лема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y і Z метричні, $f \in \overline{C}C(X, Y, Z)$, $g\colon X \to Y$ — неперервне відображення і функція $h_\sigma(x) = \alpha_\sigma(x, g(x))$, $x \in X$, відокремлена від нуля в точці $x_0 \in X$. Тоді $\omega_f(x_0, g(x_0)) \leq 2\sigma$.*

Доведення. Покладемо $y_0 = g(x_0)$ і $p_0 = (x_0, y_0)$. Існує $\gamma > 0$ і окіл U_1 точки x_0 в X, такі, що $h_\sigma(x) > \gamma$ на U_1. Нехай U_2 — окіл точки x_0 в X такий, що $\omega_{g,x_0}(U_2) < \frac{\gamma}{2}$. Покладемо $U_0 = U_1 \cap U_2$ і візьмемо x з U_0. Ясно, що $V_{\gamma/2}(y_0) \subseteq V_\gamma(g(x))$, адже $|g(x) - y_0|_Y < \frac{\gamma}{2}$. Оскільки $h_\sigma(x) > \gamma$, то $\omega_{f^x}(V_{\gamma/2}(y_0)) \leq \omega_{f^x}(V_\gamma(g(x))) \leq \sigma$. Нехай $B = \{y \in Y : f_y$ неперервне$\}$. За умовою $\overline{B} = Y$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і точку $b \in B \cap V_{\gamma/2}(y_0)$. Існує такий окіл U_3 точки x_0 в X, що $\omega_{f_b,x_0}(U_3) < \varepsilon/2$. Покладемо $U = U_0 \cap U_3$ і $V = V_{\gamma/2}(y_0)$. Нехай $p' = (x', y')$ і $p'' = (x'', y'')$ — точки з $U \times V$ і $p_1 = (x', b)$, а $p_2 = (x'', b)$. Тоді $|f(p') - f(p'')|_Z \leq |f(p') - f(p_1)|_Z + |f(p_1) - f(p_2)|_Z + |f(p_2) - f(p'')|_Z \leq \sigma + \varepsilon + \sigma = 2\sigma + \varepsilon$, звідки $\omega_f(U \times V) \leq 2\sigma + \varepsilon$. Отже, $\omega_f(p_0) \leq 2\sigma + \varepsilon$, звідки при $\varepsilon \to 0$ одержуємо, що $\omega_f(p_0) \leq 2\sigma$.

Теорема 1. *Нехай X — берівський простір, а Y і Z метризовні, $f \in \overline{C}C(X, Y, Z)$ і $g\colon X \to Y$ — неперервне відображення. Тоді існує така всюди щільна в X множина A типу G_δ, що $\{(x, g(x)) : x \in A\} \subseteq C(f)$.*

Доведення. Зафіксуємо метрики на Y і Z, узгоджені з їхніми топологіями, і визначимо для f функцію α_σ. Покладемо $h_\sigma(x) = \alpha_\sigma(x, g(x))$. Функція $h_\sigma\colon X \to (0, +\infty]$ напівнеперервна зверху і додатна. За лемою 1 множина G_σ тих точок x, в яких h_σ відгороджена від нуля, відкрита і всюди щільна в X. Візьмемо якусь послідовність додатних чисел $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, яка прямує до нуля і покладемо $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\sigma_n}$. Покажемо, що A шукана множина.

Зрозуміло, що A є множиною типу G_δ, причому $\bar{A} = X$, оскільки X берівський. Нехай $a \in A$. Тоді $a \in G_{\sigma_n}$ для кожного n. За лемою 3 $\omega_f(a, g(a)) \leq 2\sigma_n$ для кожного n. Спрямувавши n до ∞ одержимо, що $\omega_f(a, g(a)) = 0$, тобто $(a, g(a)) \in C(f)$.

3. Нехай X, Y і Z топологічні простори і $f\colon X \times Y \to Z$. Ми кажемо, що відображення f горизонтально квазінеперервне в точці $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного околу U точки x_0 в X і для кожного околу V точки y_0 в Y існують точка $(x_1, y_1) \in U \times V$ і окіл U_1 точки x_1 в X, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. Якщо ця умова виконується в кожній точці з $X \times Y$, то f називається горизонтально квазінеперервним. Якщо Z — метричний простір, то відображення $f\colon X \times Y \to Z$ буде горизонтально квазінеперервним в точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ і довільних околів U і V точок x_0 і y_0 відповідно в просторах X і Y існують точка $(x_1, y_1) \in U \times V$ і окіл U_1 точки x_1 в X, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_{f,p_0}(U_1 \times \{y_1\}) < \varepsilon$.

Лема 4. *Нехай $\varepsilon > 0$ і $f\colon X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне відображення зі значеннями в метричному просторі Z. Якщо для кожної непорожньої відкритої множини U в X коливання $\omega_f(U \times V) > 4\varepsilon$, то множина $A = \{x \in X : \omega_f(\{x\} \times Y) \leq \varepsilon\}$ ніде не щільна в X.*

Доведення. Розглянемо довільну відкриту непорожню множину U в X і точку $p' \in U \times Y$. Оскільки f горизонтально квазінеперевне в точці p', то існують така непорожня відкрита множина U_1 в X і точка $y_1 \in Y$, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_{f,p'}(U_1 \times \{y_1\}) < \varepsilon/2$. За умовою $\omega_f(U_1 \times Y) > 4\varepsilon$. Оскільки $2\omega_{f,p'}(U_1 \times Y) \geq \omega_f(U_1 \times Y)$, то $\omega_{f,p'}(U_1 \times Y) > 2\varepsilon$. Тому існує точка $p'' \in U_1 \times Y$ така, що $|f(p') - f(p'')| > 2\varepsilon$. Але f горизонтально квазінеперервна і в точці p''. Тому існує непорожня відкрита множина U_2 в X і точка $y_2 \in Y$, такі, що $U_2 \subseteq U_1$ і $\omega_{f,p''}(U_2 \times \{y_2\}) < \varepsilon/2$. Візьмемо тепер довільне $x \in U_2$ і розглянемо точки $p_1 = (x, y_1)$

і $p_2 = (x, y_2)$. Оскільки $p_i \in U_i \times \{y_i\}$ при $i = 1, 2$, то $|f(p_1) - f(p')| < \varepsilon/2$ і $|f(p_2) - f(p'')| < \varepsilon/2$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \geq |f(p') - f(p'')| - |f(p_1) - f(p')| - |f(p_2) - f(p'')| > \varepsilon.$$

Звідси $\omega_f(\{x\} \times Y) > \varepsilon$ і, тому $A \cap U_2 = \varnothing$. А це означає, що множина A є ніде не щільною в X.

Для множини E в добутку $X \times Y$ і точки $x \in X$ покладемо $E^x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$. Нехай $g\colon X \to Y$ — неперервне відображення і $L = \{(x, g(x)) : x \in X\}$ — відповідна крива в добутку $X \times Y$. Ми будемо говорити, що крива L є зліченного типу, якщо існує послідовність відкритих множин W_n в $X \times Y$, така, що для кожного $x \in X$ система $\{W_n^x : n \in N\}$ утворює базу околів точки $g(x)$ в Y.

Зауважимо, що у випадку метризовного простору Y кожна неперервна крива L в $X \times Y$ є зліченного типу. Справді, досить покласти $W_n = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X \text{ і } |y - g(x)|_Y < \frac{1}{n}\}$, де $|\bullet - \bullet|_Y$ — метрика на Y, що узгоджена з його топологією.

Через $K_hC(X, Y, Z)$ позначимо сукупність всіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і неперервні відносно другої змінної.

Лема 5. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z метричний, $f \in K_hC(X, Y, Z)$ і L — крива зліченного типу в $X \times Y$. Якщо в кожній точці з L коливання функції f більше, ніж 4ε, то множина $A = \{x \in X : \omega_{f^x}(g(x)) \leq \varepsilon\}$ є першої категорії.*

Доведення. Нехай (W_n) — послідовність, що фігурує в означенні кривої зліченного типу. Покажемо, що множина $A_n = \{x \in X : \omega_f(\{x\} \times W_n^x) < \varepsilon\}$ ніде не щільна в X. Розглянемо відкриту непорожню множину U_0 в X. Оскільки g — неперервне, то існують відкриті непорожні множини U в X і V в Y, такі, що $U \subseteq U_0$, $U \times V \subseteq W_n$ і $g(U) \subseteq V$. Легко бачити, що для кожної відкритої непорожньої множини U', яка міститься в U, маємо $\omega_f(U' \times V) > 4\varepsilon$, адже $(U' \times V) \cap L \neq \varnothing$. За лемою 4 існує відкрита непорожня множина U_1, яка міститься в U, така, що $\omega_f(\{x\} \times V) > \varepsilon$ для кожного $x \in U_1$. Оскільки $V \subseteq W_n^x$ при $x \in U_1$, то і $\omega_f(\{x\} \times W_n^x) > \varepsilon$. Тому $A_n \cap U_1 = \varnothing$, отже, A_n ніде не щільна. Для кожного $x \in X$ множини W_n^x, $n = 1, 2, \ldots$, утворюють базу околів точки $g(x)$ в Y. Звідси $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і тому A першої категорії.

Теорема 2. *Нехай X берівський, Y топологічний, Z метризовний, $f \in K_hC(X, Y, Z)$ і L — крива зліченного типу в $X \times Y$. Тоді множина $C_L(f) = \{x \in X : (x, g(x)) \in C(f)\}$ є типу G_δ і всюди щільна в X.*

Доведення. Зафіксуємо метрику на Z, яка породжує його топологію. Досить довести, що для кожного $\eta > 0$ множина $X_\eta = \{x \in X : \omega_f((x, g(x))) \geq \eta\}$ ніде не щільна в X, адже $X \setminus C_L(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{1/n}$.

Припустимо, що для деякого η множина X_η десь щільна. Зазначимо, що X_η замкнена, і тому існує відкрита непорожня множина U в X, така, що $U \subseteq X_\eta$. Нехай $\varepsilon > 0$ і $4\varepsilon < \eta$. Тоді за лемою 5 множина $A = \{x \in U : \omega_{f^x}(g(x)) < \varepsilon\}$ першої категорії в U, а отже, і в X. Але ж f^x неперевна для кожного $x \in X$. Тому $A = U$, що суперечить беровості простору X.

Зауважимо, що коли простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то всі горизонтальні криві L (тобто графіки сталих відображень $g\colon X \to Y$) є, очевидно, зліченного типу. Тому теорема 1 з [8] є безпосереднім наслідком теореми 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Baire R. *Sur les fonctions de variables réeles* Annali. di mat. pura et appl., ser. 3. – 1899. – V.3. – P.1–123.
2. Bögel K. *Über die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier reller Veränderlichen* Math. Z. – 1921. – V.81. – S.64–93.
3. Van Vleck E.B. *A proof of some theorems on point wise discontinuous functions* Trans. Amer. Math. Soc. – 1907. – V.8. – P.189–204.
4. Piotrowski Z. *Separate and joint continuity* Real Anal. Exch. – 1985–1986. – V.11, №2. – P.293–322.
5. Piotrowski Z. *Separate and joint continuity II* Real Anal. Exch. – 1989–1990. – V.15, №1. – P.248–258.
6. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Дослідження про нарізно неперервні відображенння* Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам‘яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С.192–246.
7. Bögel K. *Über partiell differenzierbare Funktionen* Math. Z. – 1926. – 25. – S.490–498.
8. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Горизонтальна квазінеперервність та її застосування, – Чернівці, 1996. – 15с. – Деп в УкрІНТЕІ 01.11.96, №98 – Ук96.
9. Маслюченко В.К. Зв'язки між різними характеристиками величини множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень, Чернівці: Чернівецький ун-т, 1994. – 17с. – Деп. в ДНТБ України. – №79 – Ук94.

Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича

274012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

Надійшло 4.04.97