Математичні Студії. Т.9, №2 Matematychni Studii. V.9, No.2

УДК 517.5

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДЕЯКИХ ОПЕРАТОРІВ ПОММ'Є

М.І. Нагнибіда, Я.В. Микитюк

M.I. Nahnybida, Ya.V. Mykytyuk. *On similarity of some Pommier operators in spaces of analytic functions*, Matematychni Studii, **9**(1998) 193–198.

Let A_R, $(0 < R \le \infty)$ be the space of all analytic in disk $|\zeta| < R$ functions, with usual topology, $(\Delta f)(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(0)}{\zeta}$ the Pommier operator in this space. The necessary and sufficient conditions of similarity of the operators $L_0 = z^j \Delta^{m+s}$ and $L = \sum_{j=0}^{s} \alpha_{s-j} z^s \Delta^{m+j}$, where $m, s \in \mathbb{N}$ and α_j $(j = 0, 1, \dots, s)$ are fixed functions from A_R are obtained.

Через A_R, $0 < R \le \infty$, позначимо лінійний топологічний простір всіх аналітичних у крузі $K_R = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta| < R\}$ функцій з топологією компактної збіжності (див. [1]), а символами $\mathcal{L}(A_R)$ і $\mathcal{L}^0(A_R)$ — відповідно алгебру всіх лінійних неперервних операторів, що діють в A_R, та її підмножину, яка складається з усіх оборотних елементів алгебри $\mathcal{L}(A_R)$. Нехай, далі, Δ — оператор Помм'є в A_R, тобто $(\Delta f)(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(0)}{\zeta}$, $f \in A_R$.

Нагадаємо, що оператори L, $L_0 \in \mathcal{L}(A_R)$ називаються *еквівалентними* між собою $(L \sim L_0)$ в просторі A_R, якщо існує такий оператор $T \in \mathcal{L}^0(A_R)$, що

$$T^{-1} L T = L_0. \tag{1}$$

Оператор T називається при цьому *оператором перетворення* L *в* L_0.

Як уже відзначалося, наприклад, у монографії [2], результати, що стосуються умов еквівалентності операторів, породжених за допомогою перетворення Помм'є в A_R, інколи кардинально відрізняються від результатів стосовно еквівалентності відповідних звичайних диференціальних операторів (а оператор Δ — це один з операторів узагальненого диференціювання). Такий факт буде отримано і у цій роботі, мета якої — дослідження на еквівалентність в A_R, операторів

$$L_0 \stackrel{\text{def}}{=} z^s \Delta^{m+s}, \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{s} \alpha_{s-j} z^j \Delta^{m+j}, \tag{2}$$

де $s, m \in \mathbb{N}$, α_j $(j = 0, 1, \dots, s)$ — фіксовані функції з A_R, z — тотожнє перетворення в K_R. Умови еквівалентності відповідних (тобто з заміною Δ на оператор $D = \frac{d}{d\zeta}$) диференціальних операторів з регулярною особливою точкою наведені в [2, 3].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47B99.

1. Формулювання основного результату. Позначимо через G_m ($m \in \mathbb{N}$) підпростір в A_R, що складається з усіх тих $f \in A_R$, які мають вигляд $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{km}$, і розглянемо оператори $M_q\colon A_R \to G_m$ ($q = 0, 1, \ldots, m-1$):

$$M_q f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(q+nm) z^{nm}, \quad f \in A_R, \tag{3}$$

де $\hat{f}(j) = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ ($j \in \mathbb{Z}_+$). Покладемо (див. (2))

$$\beta = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j, \quad \beta_k = \sum_{j=0}^{s-k-1} \alpha_j, \quad k = 0, \ldots, s-1, \tag{4}$$

$$b_{kp} = M_k z^p \beta_{s-m+p}, \quad k, p = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{5}$$

де в (5) ми вважаємо, що $\beta_j(\zeta) \equiv \beta(0)$ при $j < 0$, і нехай b — аналітична в K_R матричнозначна функція, що задана формулою

$$b(\zeta) = \|b_{kp}(\zeta)\|_{k,p=0}^{m-1}, \quad \zeta \in K_R. \tag{6}$$

Теорема 1. *1) Для того, щоб оператори L і L_0 були еквівалентними, необхідно і досить, щоб виконувались умови: а) $\beta(\zeta) \equiv \lambda$, де $\lambda \in \mathbb{C}$ і $|\lambda| = 1$ у випадку $R < \infty$, і $\lambda \neq 0$ у випадку $R = \infty$; б) $\alpha_k \in z^k A_R$, $k = 1, \ldots, s$; в) $(\forall \zeta \in K_R) \quad \det b(\zeta) \neq 0$.*

2) Якщо $L \sim L_0$, то існує оператор перетворення T (див. (1)), який зберігає початкові умови Коші, тобто

$$(Tf)^{(j)}(0) = f^{(j)}(0), \quad j = 0, \ldots, s+m-1, \ f \in A_R. \tag{7}$$

Якщо умови теореми 1 (порівнюючи їх між собою) записати для випадку $\alpha_0(\zeta) \equiv 1$, $m = 2$, а $s = 1, 2, 3$, то для відповідних операторів L і L_0 дістаємо такі твердження:

1) при $s = 1$ $\quad L_1 = z\Delta^3 + a\Delta^2 \sim L_0 = z\Delta^3$ лише при виконанні умови $a = 0$;
2) при $s = 2$ $\quad L_2 = z^2\Delta^4 + az\Delta^3 + b\Delta^2 \sim L_0 = z^2\Delta^4$ тоді і тільки тоді, коли а) $a(0) = b(0) = b'(0) = 0$, б) $a + b = 0$, в) $2 + a(\zeta) + a(-\zeta) \neq 0$ в K_R;
3) при $s = 3$ оператори $L_3 = z^3\Delta^5 + az^2\Delta^4 + bz\Delta^3 + c\Delta^2$ і $L_0 = z^3\Delta^5$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли а) $a(0) = b(0) = b'(0) = c(0) = c'(0) = c''(0) = 0$, б) $a + b + c = 0$, в) $2 + a(\zeta) + a(-\zeta) \neq 0$ в K_R.

2. Доведення теореми 1. Доведення теореми 1 розіб'ємо на деяку кількість кроків, які будемо оформляти у вигляді коротких лем. Почнемо з двох допоміжних тверджень, які близькі до відомих, проте ми вважаємо за доцільне подати їх доведення.

Нехай X, Y — лінійні простори, $L(X,Y)$ — простір всіх лінійних операторів, які діють з X в Y. Позначимо через $F(X,Y)$ множину всіх тих $A \in L(X,Y)$, для яких $\dim\ker A < \infty$, $\operatorname{codim}\operatorname{Im} A < \infty$. Нехай також $L(X) \stackrel{\text{def}}{=} L(X,X)$, $F(X) \stackrel{\text{def}}{=} F(X,X)$. Для операторів $A \in F(X,Y)$ введемо поняття індексу, покладаючи $\operatorname{ind} A = \dim\ker A - \operatorname{codim}\operatorname{Im} A$.

Твердження 1. *Нехай $A \in F(X,Y)$, $K \in L(X,Y)$ і K скінченновимірний. Тоді $(A+K) \in F(X,Y)$ та $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind} A$.*

Доведення. Якщо X і Y є скінченновимірними, то $\operatorname{ind} A = \dim X - \dim Y$ для довільного $A \in L(X,Y)$, тобто у цьому випадку твердження є вірним. Розглянемо тепер загальний випадок. Легко переконатися, що простір X можна подати у вигляді прямої суми $X_1 \oplus X_2$ підпросторів X_1 і X_2, що задовольняють умови: i) $X_1 \subset \ker K$, $AX_1 \cap \operatorname{Im} K = \{0\}$; ii) $\dim X_2 < \infty$, $\ker A \subset X_2$.

Покладемо $Y_1 = AX_1$. Очевидно, що $\operatorname{codim} Y_1 < \infty$ і $Y_1 \cap AX_2 = \{0\}$. Звідси, враховуючи i), робимо висновок, що існує скінченновимірне пряме доповнення Y_2 до Y_1 таке, що $(AX_2 + \operatorname{Im} K) \subset Y_2$. Задамо оператори A_j, $K_j \in L(X_j, Y_j)$ $(j = 1, 2)$ формулами $A_j = A|_{X_j}$, $K_j = K|_{X_j}$. Легко бачити, що $A = A_1 \oplus A_2$ і $A + K = A_1 \oplus (A_2 + K_2)$. Оператор A_1 є бієкцією, а тому $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} A_2$, $\operatorname{ind}(A + K) = \operatorname{ind}(A_2 + K_2)$. Оскільки підпростори X_2 і Y_2 є скінченновимірними, то $\operatorname{ind}(A_2 + K_2) = \operatorname{ind} A_2$ і, отже, $\operatorname{ind}(A + K) = \operatorname{ind} A$. Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, f — аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ функція, яка задовольняє умови: i) $f(\mathbb{D}_0) = \mathbb{D}_0$, де $\mathbb{D}_0 = \mathbb{D} \setminus \{0\}$; ii) для довільних $w \in \mathbb{D}_0$ функція $\varphi_w = f - w$ має в $\mathbb{D}_0$ точно m нулів (підрахунок ведеться з урахуванням їх кратностей). Тоді $f = e^{i\theta} z^m$, де $\theta \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Оскільки f — обмежена, то згідно з теоремою Фату [4,стор.33], майже для всіх $\zeta \in \mathbb{T} = \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$ існують радіальні границі $\lim\limits_{r\to 1} f(r\zeta)$. Покажемо, що радіальні граничні значення не можуть лежати в $\mathbb{D}_0$. Припустимо, що це не так і для деяких $\zeta \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{D}_0$ $\lim\limits_{r\to 1} f(r\zeta) = a$. Тоді для довільного околу $U_a \subset \mathbb{D}_0$ точки a

$$\overline{f^{-1}(U_a)} \cap \mathbb{T} \neq \varnothing. \tag{8}$$

Нехай $f^{-1}(a) = \{z_k\}_{k=1}^{p}$. З i) випливає, що $f(0) = 0$ і $f^{-1}(\mathbb{D}_0) = \mathbb{D}_0$. Звідси, враховуючи ii), отримуємо, що $p \leq m$ і $f^{-1}(a) \subset \mathbb{D}_0$. Очевидно, що існує множина відкритих кругів $B_k \ni z_k$ $(k = 1, \ldots, p)$, які попарно не перетинаються і замикання яких лежать в $\mathbb{D}_0$. З теореми Руше випливає, що існує такий окіл $U \subset \mathbb{D}_0$ точки a, що для довільного $w \in U$ функції φ_w і φ_a мають однакову кількість нулів у кожному крузі B_k. Звідси, приймаючи до уваги умову ii), отримуємо, що $f^{-1}(U) \subset \bigcup_{k=1}^{p} B_k$. Але це суперечить (8), оскільки круги $\overline{B}_k$ не мають спільних точок з $\mathbb{T}$. Отже, ми довели, що граничні значення функції не належать $\mathbb{D}_0$, а, тому, належать множині $\mathbb{T} \cup \{0\}$. Оскільки $f \neq 0$, то згідно з теоремою братів Ріс [47, стор. 39] майже для всіх $\zeta \in \mathbb{T}$ радіальні граничні значення функції f не рівні нулю. Отже, f — внутрішня.

З однієї теореми єдиності Фростмана [4, стор. 56], випливає, що скінченнолиста внутрішня функція може бути лише скінченним добутком Бляшке. Звідси, приймаючи до уваги i) та ii), легко отримуємо, що $f = e^{i\theta} z^m$. Твердження 2 доведено.

Лема 1. *Нехай $h \in A_R$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ і $M = h\Delta^m - \zeta I$, де I — одиничний оператор в A_R. Нехай p — число нулів функції $\varphi = h - \zeta z^m$ в крузі K_R (підрахунок кількості нулів ведеться з урахуванням їх кратностей). Для того, щоб оператор M належав до $F(A_R)$, необхідно і досить, щоб $p < \infty$. Якщо $p < \infty$, то* $\operatorname{ind} M = m - p$.

Доведення. Нехай $\zeta \neq 0$. Позначимо через $\mathcal{P}_{m-1}$ простір многочленів степеня не вище $m - 1$. Зауваживши, що $A_R = z^m A_R + \mathcal{P}_{m-1}$ і, що для довільних $f \in A_R$, $f_0 \in \mathcal{P}_{m-1}$

$$M(z^m f + f_0) = \varphi f - \zeta f_0, \tag{9}$$

отримуємо рівність

$$\operatorname{Im} M = \varphi A_R + \mathcal{P}_{m-1}. \tag{10}$$

З (9) випливає, що $\ker M$ складається з функцій вигляду $g = \frac{f_0}{\varphi}$ $(f_0 \in \mathcal{P}_{m-1})$, які належать до A_R. Отже, $\dim\ker M = 0$, якщо $p > m$ і $\dim\ker M = m - p$, якщо $p \leq m$. Оскільки $\operatorname{codim} \varphi A_R = p$, то враховуючи (10), отримуємо, що

$\operatorname{codim}\operatorname{Im} M = 0$ при $p \leq m$ і $\operatorname{codim}\operatorname{Im} M = p - m$ при $p > m$. Із сказаного вище легко отримуємо твердження леми у випадку $\zeta \neq 0$. Випадок $\zeta = 0$ розглядається аналогічно. Лему доведено.

З (2) і (4) випливає, що

$$Lf = \beta\Delta^m f - \textstyle\sum_{j=0}^{s-1} \hat{f}(j+m) z^j \beta_j, \quad f \in A_R, \tag{11}$$

і, зокрема,

$$Lz^{m+s} f = \beta z^s f = \beta z^s f, \quad f \in A_R. \tag{12}$$

Зауваження 1. Якщо $\beta \neq 0$, то з (12) випливає, що $\ker L \cap z^{m+s} A_R = \{0\}$ і, отже, $\dim\ker L \leq m + s$.

Лема 2. *Нехай $L \sim L_0$. Тоді виконується умова (а).*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\zeta \in \mathbb{C}$. З леми 1 випливає, що $(\Delta^m - \zeta I) \in F(A_R)$. Оскільки оператор $L_0 - \Delta^m$ є скінченновимірним, то згідно твердження 1 $(L_0 - \zeta I) \in F(A_R)$ і

$$\operatorname{ind}(L_0 - \zeta I) = \operatorname{ind}(\Delta^m - \zeta I). \tag{13}$$

З еквівалентності операторів L і L_0 випливає еквівалентність операторів $L - \zeta I$ і $L_0 - \zeta I$. Очевидно, що еквівалентні оператори мають рівні індекси, які дорівнюють один одному, а тому

$$\operatorname{ind}(L - \zeta I) = \operatorname{ind}(L_0 - \zeta I). \tag{14}$$

З (11) випливає, що оператор $L - \beta\Delta^m$ є скінченновимірним, а, отже, згідно з твердженням 1

$$\operatorname{ind}(L - \zeta I) = \operatorname{ind}(\beta\Delta^m - \zeta I). \tag{15}$$

На основі співвідношень (13)–(15) робимо висновок, що $(\forall \zeta \in \mathbb{C})$: $\operatorname{ind}(\beta\Delta^m - \zeta I) = \operatorname{ind}(\Delta^m - \zeta I)$. Звідки, приймаючи до уваги лему 1, отримуємо, що для довільного $\zeta \in \mathbb{C}$ функції $\beta - \zeta z^m$ і $1 - \zeta z^m$ мають однакову кількість нулів в K_R. Зокрема, функція β не має нулів в K_R. Враховуючи сказане, легко переконатися, що у випадку $R < \infty$ функція $f = \frac{z^m}{\beta(Rz)}$ задовольняє умови твердження 2, а, отже, $\beta = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. У випадку $R = \infty$ розглянемо функцію $g = z^m/\beta$. Вона є цілою і скінченнолистою, а, отже, g — многочлен. Звідки випливає, що $\beta \equiv \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Лему доведено.

Лема 3. *Нехай $L \sim L_0$. Тоді виконується умова (б).*

Доведення. Нехай $L \sim L_0$. Тоді, як легко бачити, $\dim\ker L = \dim\ker L_0 = m + s$. З огляду на лему 2 і зауваження 1, оператор $S\colon \ker L \to \mathbb{C}^{m+s}$, який діє за формулою $Sf = \big(\hat{f}(j)\big)_{j=0}^{s+m-1}$, є біекцією. Тому в $\ker L$ існує такий базис $(\varphi_j)_{j=0}^{s+m-1}$, що $\widehat{\varphi}_j(k) = \delta_{jk}$, $j, k = 0, \ldots, s+m-1$, де δ_{jk} — символ Кронекера. З (11) випливає, що $\beta\varphi_j = z^j\beta_{j-m}$, $j = m, \ldots, s+m-1$, а тому $z^j(\beta_{j-m} - \beta) = \beta(\varphi_j - z^j) \in z^{m+s}A_R$, і, отже, $(\beta - \beta_{s-k}) \in z^k A_R$, $k = 1, \ldots, s$. Звідси, беручи до уваги, що $\alpha_s = \beta - \beta_0$ і $\alpha_p = (\beta - \beta_{s-p}) - (\beta - \beta_{s-p-1})$, $p = 0, \ldots, s-1$, легко отримуємо (б). Лему доведено.

Лема 4. *Нехай виконуються умови (а), (б) і*

$$\varphi_k = \lambda^{-1} z^k \beta_{k-m}, \quad k = 0, \dots, s+m-1, \tag{16}$$

де $\beta_j(\zeta) \equiv \beta(\zeta) \equiv \lambda$ *при* $j < 0$ *Тоді*

$$\ker L = \operatorname{lin}(\varphi_j)_{j=0}^{s+m-1}, \tag{17}$$

$$\widehat{\varphi}_j(k) = \delta_{jk}, \quad j,k = 0, \dots, s+m-1. \tag{18}$$

Доведення. Згідно з (4) $\beta - \beta_{s-p} = \sum_{j=p}^{s} \alpha_j$, $p = 1, \dots, s$. Звідки, враховуючи (а) і (б), маємо, що $(\lambda - \beta_{s-p}) \in z^p A_R$, $p = 1, \dots, s$, і, отже,

$$(\varphi_j - z^j) \in z^{m+s} A_R, \quad j = 0, \dots, s+m-1. \tag{19}$$

Звідси випливає, що система $(\varphi_j)_{j=0}^{s+m-1}$ є лінійно незалежною і для неї виконуються рівності (18). Використовуючи (11) і (19), переконуємося, що $L\varphi_j = 0$ $(j = 0, \dots, s+m-1)$. Звідки, враховуючи зауваження 1, отримаємо (17). Лему доведено.

Розглянемо простір G всіх аналітичних вектор-функцій $g\colon K_R \to \mathbb{C}^m$, що мають вигляд $g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{km}$ $(c_k \in \mathbb{C}^m)$. Простір G наділимо топологією компактної збіжності. Нехай оператор $U\colon A_R \to G$ діє за формулою (див. (3)) $Uf = (M_0 f, \dots, M_{m-1} f)$, $f \in A_R$. Очевидно, що U є лінійним гомеоморфізмом простору A_R на G і $U^{-1} g = \sum_{j=0}^{m-1} z^j g_j$, $g = (g_0, \dots, g_{m-1}) \in G$. Припустимо, що виконуються умови (а) і (б). Задамо оператор $T_0 \in \mathcal{L}(A_R)$ рівністю

$$T_0 = P + z^s U^{-1} B \Lambda U \Delta^s, \tag{20}$$

в якій $B \in \mathcal{L}(G)$, $\Lambda \in \mathcal{L}^0(G)$, $P \in \mathcal{L}(A_R)$ і

$$(Bg)(\zeta) \overset{\text{def}}{=\!=} b(\zeta) g(\zeta), \quad g \in G, \zeta \in K_R, \tag{21}$$

$$\Lambda g \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} \hat{g}(km) z^{km}, \quad g \in G, \tag{22}$$

$$Pf \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{j=0}^{s-1} \hat{f}(j) \varphi_j, \quad f \in A_R, \tag{23}$$

де функції φ_j в (23) задані формулою (16), $\hat{g}(j) = \frac{g^{(j)}(0)}{j!}$.

Лема 5. *Нехай виконані умови (а) і (б), а оператор* T_0 *заданий формулою (20). Тоді* T_0 *зберігає початкові умови Коші, тобто для нього виконуються рівності (7), і*

$$LT_0 = T_0 L_0, \quad \ker T_0 = \{0\}. \tag{24}$$

Доведення. Нехай функції φ_j $(j = 0, \dots, s+m-1)$ задано формулою (16). Означимо функції φ_j для $j \ge s+m$, покладаючи

$$\varphi_{nm+s+r} \overset{\text{def}}{=\!=} \lambda^{-n} z^{nm} \varphi_{s+r}, \quad n \in \mathbb{N}, r = 0, \dots, m-1. \tag{25}$$

Покажемо, що

$$T_0 z^j = \varphi_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{26}$$

З (18) випливає, що P є проектором на $\operatorname{lin}(\varphi_j)_{j=0}^{s-1}$ паралельно до $z^s A_R$. Тому рівність (26) досить довести для $j \ge s$. Нехай $j = nm + r + s$, де $n \in \mathbb{Z}_+$, $r = 0, \dots, m-1$. Тоді (див. (6)) $T_0 z^j = z^s (U^{-1} B \Lambda U) z^{j-s} = \lambda^{-(n+1)} z^{nm+s} \sum_{k=0}^{m-1} z^k b_{kr}$. Враховуючи (5), маємо, що $\sum_{k=0}^{m-1} z^k b_{kr} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} z^k M_k\right) z^r \beta_{s-m+r} = z^r \beta_{s-m+r}$ і цим самим (26) доведено. З рівності (26), приймаючи до уваги (12) і (17), отримуємо, що $LT_0 z^j = T_0 L_0 z^j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, а, отже, $LT_0 = T_0 L_0$. З (26) і (18) випливає також, що для T_0 виконуються рівності (7). Покажемо, що $\ker T_0 = \{0\}$. Оскільки $b(0) = \lambda I$, то $\det b(\zeta) \not\equiv 0$ і, отже, $\ker B = \{0\}$. Нехай $f \in \ker T_0$. Тоді зі сказаного вище випливає, що $Pf = 0$ і $\Delta^s f = 0$, тобто $f = 0$. Лему доведено.

Лема 6. *Нехай виконані умови (а), (б) і (в). Тоді* $T_0 \in \mathcal{L}^0(A_R)$.

Доведення. З умови (в) випливає, що $B \in \mathcal{L}^0(G)$, а тому оператор
$$M \stackrel{\text{def}}{=\!=} Q + z^s U^{-1} B \Lambda U \Delta^s,$$
де $Q = I - z^s\Delta^s$, належить до $\mathcal{L}^0(A_R)$, при цьому $M^{-1} = Q + z^s U^{-1}\Lambda^{-1}B^{-1}U\Delta^s$. Враховуючи (20), отримуємо, що $T_0 M^{-1} = (M - Q + P)M^{-1} = I - Q + P$. Але $(Q-P)^2 = 0$, а тому $(I - Q + P)^{-1} = I + Q - P$ і, отже, $T_0 \in \mathcal{L}^0(A_R)$. Лему доведено.

Лема 7. *Нехай* $L \sim L_0$. *Тоді виконується умова (в).*

Доведення. Нехай $L \sim L_0$ і виконується рівність (1). З лем 2 і 3 випливає, що виконані умови (а) і (б). Нехай оператор T_0 заданий формулою (20) і $S = T^{-1}T_0$. Приймаючи до уваги (24), отримуємо, що $SL_0 = L_0 S$ і $\ker S = \{0\}$. Використовуючи метод математичної індукції, легко переконатися, що підпростори $H_n = \text{lin}(z^j)_{j=0}^{nm+s-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ є інваріантними підпросторами оператора S. Оскільки $\ker S = \{0\}$, то $SH_n = H_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Це означає, що $\operatorname{Im} S$, а, отже, і $\operatorname{Im} T_0$ є всюди щільними в A_R. Звідси, беручи до уваги (20), робимо висновок, що $\operatorname{Im} B$ є всюди щільним в G. Припустимо, що (в) не виконується. Тоді існує таке $\zeta_0 \in K_R$, що $\det b(\zeta_0) = 0$, а, отже, існує ненульовий функціонал $l_0 \in (\mathbb{C}^m)'$ (X' — топологічний спряжений до X) такий, що $l_0 \circ b(\zeta_0) = 0$. Задамо функціонал $l \in G'$ формулою $l(g) = l_0(g(\zeta_0))$. Тоді $l \neq 0$ і $l \circ B = 0$. Але це суперечить тому, що $\operatorname{Im} B$ є всюди щільним в G. Отримана суперечність доводить справедливість леми.

Доведення теореми 1. Нехай $L \sim L_0$. Тоді з лем 2, 3 і 7 випливає, що виконуються умови (а), (б) і (в). Якщо ж виконані умови (а), (б) і (в), то з лем 5 і 6 випливає, що $L \sim L_0$. Крім того, з лем 5 і 6 випливає справедливість другої частини теореми 1. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Köthe G. *Dualität in der Funktionentheorie* J. für Reine und Angew. Math. – 1953. – Bd.191. – S.30–49.
2 Нагнибіда М.І. Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995. – 297с.
3. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифе-ренциальных операторов. – Новосибирск: Наука, 1987. – 280с.
4. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. – Москва: Мир, 1971. – 312с.

Чернівецький держуніверситет ім. Ю. Федьковича

274 012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

Львівський держуніверситет ім. І. Франка, мех.-матем. факультет

290602, м. Львів, вул. Університетська, 1

Надійшло 1.02.97