УДК 517.547.2

ОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

М.Т. Бордуляк

M.T. Bordulyak. *The boundedness of value distribution of Mittag-Leffler function*, Matematychni Studii, **9**(1998) 177–186.

It's proved that the function of Mittag-Leffler type is of bounded l-index which implies the boundness of value distribution of Mittag-Leffler function.

1. Вступ. Нехай l — додатна неперервна на $[0;+\infty)$ функція. Ціла функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\leqslant\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)}:0\leqslant k\leqslant N\right\}.$$

Функція f називається [1] функцією обмеженого l-розподілу значень, якщо існує число $p\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}$ і $w\in\mathbb{C}$

$$n\Big(\frac{1}{l(|z|)},\ z,\ \frac{1}{f-w}\Big)\leqslant p,$$

де $n(R,a,1/f)$ — кількість нулів функції f в крузі $\{z:|z-a|\leqslant R\}$. При $l\equiv 1$ з наведених вище означень випливають означення цілої функції обмеженого індексу і обмеженого розподілу значень відповідно. Дослідженню властивостей цілих функцій обмеженого індексу і обмеженого розподілу значень та їх застосуванню присвячено багато праць (бібліогр. див. у [2]).

Нехай $0<\rho<+\infty$. Функцією Міттаг-Леффлера називається ціла функція

$$E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k/\rho)}.$$

Властивості цієї функції використовуються в багатьох задачах теорії цілих функцій; вкажемо тут тільки на монографію [3], де вивчаються і застосовуються узагальнення цієї функції, мова про які піде нижче.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D35.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

С. Шах [2] висловив гіпотезу, що якщо $0 < \rho \leqslant 1$, то функція E_ρ є обмеженого індексу, і довів її [4] для випадку $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Загальнішу гіпотезу висловив М.М. Шеремета [5]. Згідно з нею функція Міттаг-Леффлера є обмеженого l_ρ-індексу, де $l_\rho(x) \equiv 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $l_\rho(x) = x^{\rho-1}$ при $x \geqslant 1$. Ця гіпотеза для раціональних ρ доведена в [5]. А.А. Гольдберг [6] довів гіпотезу М.М. Шеремети для всіх $\rho \in (0; +\infty)$, а з цим і гіпотезу С. Шаха для всіх $\rho \in (0; 1]$.

З відомих асимптотичних формул для нулів функції E_ρ легко випливає, що для довільного $q > 0$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ в крузі $\big\{w : |w - z| \leqslant q/l_\rho(|z|)\big\}$ міститься рівномірно (відносно z) обмежена кількість цих нулів. Тому природним є поставлене М.М. Шереметою питання, чи є функція Міттаг-Леффлера обмеженого l_ρ-розподілу значень. Позитивну відповідь на це питання дає

Теорема 1. *Функція Міттаг-Леффлера E_ρ є обмеженого l_ρ-розподілу значень.*

Нехай Q — клас додатних неперервних на $[0; +\infty)$ функцій l таких, що $l\big(x + O\big(\frac{1}{l(x)}\big)\big) = O(l(x))$ $(x \to \infty)$. В [7] доведено, що якщо $l \in Q$, то ціла функція f має обмежений l-розподіл значень тоді і тільки тоді, коли її похідна f' має обмежений l-індекс. Оскільки $l_\rho \in Q$ для кожного $\rho \in (0; +\infty)$, то звідси випливає, що для доведення теореми 1 достатньо показати, що E'_ρ є функцією обмеженого l_ρ-індексу. Відомо [8] також, що якщо $l \in Q$, f — ціла функція обмеженого l-індексу, φ — ціла функція і $\psi(z) = \varphi(z) f(z)$, то ψ є цілою функцією обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли φ є функцією обмеженого l-індексу. Оскільки [3, с.118] $\frac{z}{\rho} E'_\rho(z) = E_\rho(z; 0)$, де

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)} \quad —$$

функція типу Міттаг-Леффлера $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, то звідси випливає, що для доведення теореми 1 треба показати, що функція $E_\rho(z; 0)$ є обмеженого l_ρ-індексу, а це випливає з наступної теореми, яка узагальнює теорему А.А. Гольдберга.

Теорема 2. *Для довільних $\rho \in (0; +\infty)$ і $\mu \in \mathbb{R}$ функція $E_\rho(z; \mu)$ є обмеженого l_ρ-індексу.*

При доведенні цієї теореми у випадку $\rho \neq 1/2$ використовується методика, розроблена А.А. Гольдбергом [6].

При коректурі цієї статті мені стало відомо, що за виконання однієї з наступних умов:

(а) $\quad \rho > 1/2, \quad 1 + 1/\rho > \mu > \begin{cases} 1 - 3/\rho, & \mu \neq 1/\rho - n, n \in \mathbb{Z}_+, \\ 1 - 2/\rho, & \mu = 1/\rho - n, n \in \mathbb{Z}_+, 1/\rho \notin \mathbb{N}; \end{cases}$

(б) $\quad 0 < \rho \leqslant 1/2, \quad 1 + 1/\rho > \mu.$

аналогічні результати отримала І.Н. Пересьолкова.

Щиро дякую М.М. Шереметі за постійну увагу до роботи та цінні зауваження.

2. Допоміжні леми. Нехай (a_k) — послідовність нулів цілої функції f, $q > 0$ і $G_\rho(f) = \bigcup_k \{z : |z - a_k| \leqslant q|a_k|^{1-\rho}\}$, $0 < \rho < \infty$. З теореми 1 із [8] при $l(x) \equiv l_\rho(x)$ випливає

Лема 1. *Для того щоб ціла функція f була обмеженого l_ρ-індексу, необхідно і досить, щоб виконувались наступні умови:*

1) для кожного $q>0$ існує $P(q)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus G_\rho(f)$, $|z|\geqslant 1$, виконується нерівність

$$|f'(z)/f(z)|\leqslant P(q)|z|^{\rho-1}; \tag{1}$$

2) для кожного $q>0$ існує $m(q)\in\mathbb{N}$ таке, що для кожного $z_0\in\mathbb{C}$, $|z_0|\geqslant 1$, виконується нерівність

$$n(q|z_0|^{1-\rho}, z_0, 1/f)\leqslant m(q). \tag{2}$$

А з теореми 1 із [9] при $l(x)\equiv l_\rho(x)$ випливає

Лема 2. *Нехай функції $g_0, g_1, \dots, g_m$ і h обмеженого l_ρ-індексу і для кожного $q>0$ існує $M(q)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus G_q(g_0)$ і $j=1,2,\dots,m$*

$$|g_j(z)|\leqslant M(q)|g_0(z)|\,|z|^{j(\rho-1)}.$$

Тоді кожний цілий цілий розв'язок f лінійного диференціального рівняння

$$g_0(z)f^{(m)}(z)+g_1(z)f^{(m-1)}(z)+\dots+g_m(z)f(z)=h(z)$$

є функцією обмеженого l_ρ-індексу.

В процесі доведення теореми 1 в [6] А.А. Гольдберг довів, фактично, наступну лему.

Лема 3. *Нехай $\alpha\in(-\pi;\pi]$, $\eta\in(0;\pi)$ і*

$$W=\{z:\ |z|\geqslant 1,\ |\arg z-\alpha|<\eta\},$$

a f — ціла функція порядку $\rho\in(0;+\infty)$. Тоді, якщо існує число $K>0$ таке, що $|f'(z)/f(z)|\leqslant K|z|^{\rho-1}$ для всіх $z\in\partial\big(W\setminus G_q(f)\big)$, і існує послідовність $(r_n)\uparrow+\infty$ така, що на дугах $\{z\in W\setminus G_q(f): |z|=r_n\}$ справедливе співвідношення $|f'(r_ne^{i\varphi})/f(r_ne^{i\varphi})|=O(r_n^{\rho-1}\ln r_n)$ $(n\to\infty)$, то $|f'(z)/f(z)|\leqslant K|z|^{\rho-1}$ для всіх $z\in W\setminus G_q(f)$.

Як і в [10], позначимо

$$c_\mu=\begin{cases}\frac{1}{\rho}\Gamma(\mu-\frac{1}{\rho}), & \text{якщо } \mu\neq\frac{1}{\rho}-n,\ n\in\mathbb{Z}_+,\\ \frac{1}{\rho}\Gamma(\mu-\frac{2}{\rho}), & \text{якщо } \mu=\frac{1}{\rho}-n,\ n\in\mathbb{Z}_+,\ \frac{1}{\rho}\in\mathbb{N},\end{cases}$$

$$\tau_\mu=\begin{cases}1+\rho(1-\mu), & \text{якщо } \mu\neq\frac{1}{\rho}-n,\ n\in\mathbb{Z}_+,\\ 2+\rho(1-\mu), & \text{якщо } \mu=\frac{1}{\rho}-n,\ n\in\mathbb{Z}_+,\ \frac{1}{\rho}\in\mathbb{N},\end{cases}$$

За побудовою $c_\mu\neq 0$ для вказаних пар (ρ,μ). Пари (ρ,μ), що не увійшли в формули для c_μ і τ_μ, називаються [10] винятковими і є такими: $\rho=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\mu=\frac{1}{\rho}-n$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Якщо $\rho=1$, то $\mu=1-n$, і тоді [10] $E_\rho(z;\mu)=E_1(z;\mu)=z^{1-\mu}e^z=z^ne^z$, тобто $E_1(z;\mu)$ в цьому випадку є обмеженого індексу (l_1-індексу). Тому надалі випадок $\rho=1$, $\mu=1-n$ розглядати не треба. Для доведення теореми 2 в решта випадках нам будуть потрібні наступні дві леми з [10].

Лема 4. *Нехай $\rho > 1/2$ і $\mu \in \mathbb{R}$, прицьому $(\rho, \mu) \neq (1, 1-n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді всі великі за модулем нулі λ_n функції $E_\rho(z;\mu)$, що лежать у верхній півплощині (всі нулі цієї функції, що лежать у нижній півплощині, є спряженими до λ_n), є простими і мають асимптотику*

$$\lambda_n^\rho = 2\pi i n + \frac{\tau_\mu}{\rho}\Big(\ln 2\pi n + \frac{i\pi}{2}\Big) + \ln c_\mu + O\Big(\frac{1}{n^{1/\rho}} + \frac{\ln n}{n}\Big) \quad (n \to \infty).$$

Лема 5. *Нехай $0 < \rho < 1/2$ і $\mu \in \mathbb{R}$. Тоді всі великі за модулем нулі λ_n функції $E_\rho(z;\mu)$ є простими, дійсними і мають асимптотику*

$$\lambda_n = -\Big\{\frac{\pi}{\sin \pi\rho}\Big(n + \frac{1}{2} + \rho(\mu - 1)\Big) + o(1)\Big\}^{1/\rho} \quad (n \to \infty).$$

3. Доведення теореми 2 для $\rho > 1/2$. Як було зауважено вище, при $\rho = 1$ ми маємо розглядати лише $\mu \neq 1 - n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Але тоді, використовуючи лему 4, можна показати, що для нулів λ_n функції $E_\rho(z;\mu)$ справедлива асимптотика

$$|\lambda_n| = \Big\{4\pi^2 n^2\Big(1 - \frac{\tau_\mu}{2\rho n} + O\Big(\frac{\ln^2 n}{n^2} + \frac{1}{n^{1+1/\rho}}\Big)\Big)\Big\}^{1/2\rho} =$$
$$= (2\pi n)^{1/\rho} - \frac{\tau_\mu (2\pi)^{1/\rho}}{4\rho^2} n^{1/\rho - 1} + O\Big(\frac{\ln^2 n}{n^{2-1/\rho}} + \frac{1}{n}\Big) \quad (n \to \infty). \quad (3)$$

Звідси випливає, що

$$|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| = \big(1 + o(1)\big)\frac{1}{\rho}(2\pi)^{1/\rho} n^{1/\rho - 1} =$$
$$= \big(1 + o(1)\big)\frac{2\pi}{\rho}(2\pi n)^{1/\rho - 1} = \big(1 + o(1)\big)\frac{2\pi}{\rho}|\lambda_n|^{1-\rho} \quad (n \to \infty), \quad (4)$$

тобто для довільного $q \in (0; 2\pi/\rho)$ і всіх $n \geqslant n_0(q)$

$$|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| > q|\lambda_n|^{1-\rho}. \quad (5)$$

З нерівності (5) легко випливає виконання умови 2) леми 1, і нам залишилось перевірити тільки умову 1).

Добре відомо [3, с.133], що для довільних $\beta \in \big(\pi/2\rho; \min\{\pi/\rho, \pi\}\big)$ і $p \in \mathbb{N}$ при $|z| \to +\infty$ справедливі співвідношення

$$E_\rho(z;\mu) = \begin{cases} \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} - \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O\Big(\dfrac{1}{|z|^{p+1}}\Big), & \text{якщо } |\arg z| \leqslant \beta, \\ -\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O\Big(\dfrac{1}{|z|^{p+1}}\Big), & \text{якщо } \beta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi. \end{cases} \quad (6)$$

Використовуючи ці співвідношення, неважко показати, що для довільного $\eta \in \big(0; \min\{\pi - \pi/2\rho, \pi/2\rho\}\big)$ при $|z| \to +\infty$ виконується

$$\frac{E'_\rho(z;\mu)}{E_\rho(z;\mu)} = \begin{cases} \rho z^{\rho-1} + O\Big(\dfrac{1}{z}\Big), & \text{якщо } |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2\rho} - \eta, \\ -\dfrac{1}{z} + O\Big(\dfrac{1}{z^2}\Big), & \text{якщо } \dfrac{\pi}{2\rho} + \eta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi, \end{cases}$$

звідки випливає виконання (1) з $f(z) = E_\rho(z;\mu)$ у вказаних кутах з деяким $P > \rho$. Отже, нам залишилось отримати (1) в кутах $W_1 = \bigl\{z : \frac{\pi}{2\rho} - \eta < \arg z < \frac{\pi}{2\rho} + \eta,\ |z| \geqslant 1\bigr\}$ і $W_2 = \bigl\{z : -\frac{\pi}{2\rho} - \eta < \arg z < -\frac{\pi}{2\rho} + \eta,\ |z| \geqslant 1\bigr\}$. Оскільки $E'_\rho(\overline{z};\mu) = \overline{E'_\rho(z;\mu)}$ і $E_\rho(\overline{z};\mu) = \overline{E_\rho(z;\mu)}$, то досить довести (1) в W_1. У цьому куті функцію $E_\rho(z;\mu)$ можна зобразити у вигляді (6). З леми 4 випливає, що всі великі за модулем нулі λ_n з верхньої півплощини лежать в W_1 і, завдяки (5), круги $\{z : |z-\lambda_n| \leqslant q|\lambda_n|^{1-\rho}\}$, $0 < q < \pi/\rho$, також лежать в W_1 і попарно не перетинаються.

Позначимо $a = 1/\Gamma(\mu - \frac{1}{\rho})$. Тоді з (6) при $p = 1$ маємо

$$\rho\lambda_n^{\rho(1-\mu)} e^{\lambda_n^\rho} = \frac{a}{\lambda_n} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr) \quad (n \to \infty). \tag{7}$$

Вивчимо поводження $E'_\rho(z;\mu)/E_\rho(z;\mu)$ на колах $\{\xi : |\xi - \lambda_n| = q|\lambda_n|^{1-\rho}\}$. Нехай $\xi = \lambda_n + q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Тоді $\xi^\rho = \lambda_n^\rho + q\rho e^{i\theta} + O\bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\bigr)$, $\xi^{\rho(1-\mu)} = \lambda_n^{\rho(1-\mu)} + \rho q(1-\mu)\lambda_n^{-\rho\mu}e^{i\theta} + O\bigl(\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\mu+1)}}\bigr)$, $(n \to \infty)$, і, завдяки (6) з $p = 1$ і (7),

$$E_\rho(\xi;\mu) = \rho\Bigl(\lambda_n^{\rho(1-\mu)} + \frac{\rho q(1-\mu)}{\lambda_n^{\rho\mu}} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\mu+1)}}\Bigr)\Bigr)\times$$
$$\times \exp\Bigl\{\lambda_n^\rho + \rho q e^{i\theta} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr\} - \frac{a}{\lambda_n + q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta}} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr) =$$
$$= \rho\lambda_n^{\rho(1-\mu)}\Bigl(1 + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr)\exp\Bigl\{\lambda_n^\rho + \rho q e^{i\theta} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr\} - \frac{a}{\lambda_n + q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta}} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr) =$$
$$= \Bigl(1 + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr)\Bigl(\frac{a}{\lambda_n} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr)\Bigr)\exp\Bigl\{\rho q e^{i\theta} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr\} - \frac{a}{\lambda_n + q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta}} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr) =$$
$$= \frac{a}{\lambda_n}\exp\Bigl\{\rho q e^{i\theta} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr\} - \frac{a}{\lambda_n + q\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta}} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^{(1+\rho)}} + \frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr) =$$
$$= \frac{a}{\lambda_n}\Bigl\{\exp\Bigl(\rho q e^{i\theta} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr) - 1\Bigr\} + \frac{aq\lambda_n^{1-\rho}e^{i\theta}}{\lambda_n^2(1 + q\lambda_n^{-\rho}e^{i\theta})} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^{(1+\rho)}} + \frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr) =$$
$$= \frac{a}{\lambda_n}\Bigl\{\exp\Bigl(\rho q e^{i\theta} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr) - 1\Bigr\} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^{(1+\rho)}} + \frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr) \quad (n \to \infty).$$

При досить великих λ_n модуль величини у фігурних дужках, обмежений знизу додатною сталою, тобто існує $K > 0$ таке, що

$$|E_\rho(\xi;\mu)| \geqslant K/|\lambda_n| \tag{8}$$

для всіх ξ, $|\xi - \lambda_n| = q|\lambda_n|^{1-\rho}$, і всіх $\lambda_n \in W_1$, $n \geqslant n_0$.

Далі, оскільки в W_1, $E'_\rho(z;\mu) = \rho^2 z^{\rho(1-\mu)-1}(z^\rho + 1 - \mu)e^{z^\rho} + \frac{a}{z^2} + O\bigl(\frac{1}{z^3}\bigr)$ $(z \to \infty)$, то

$$E'_\rho(\xi;\mu) = \rho^2\Bigl(\xi^{\rho-1} + \frac{1-\mu}{\xi}\Bigr)\xi^{\rho(1-\mu)}e^{\xi^\rho} + O\Bigl(\frac{1}{\xi^2}\Bigr) =$$
$$= \rho^2\Bigl(\xi^{\rho-1} + \frac{1-\mu}{\xi}\Bigr)\Bigl(\lambda_n^{\rho(1-\mu)} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^{\rho\mu}}\Bigr)\Bigr)\exp\Bigl\{\lambda_n^\rho + q\rho e^{i\theta} + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr\} + O\Bigl(\frac{1}{\xi^2}\Bigr) =$$
$$= \rho\Bigl(\xi^{\rho-1} + \frac{1-\mu}{\xi}\Bigr)\Bigl(1 + O\Bigl(\frac{1}{\lambda_n^\rho}\Bigr)\Bigr)\Bigl(\frac{2}{\lambda_n} + \Bigl(\frac{1}{\lambda_n^2}\Bigr)\Bigr) \quad (n \to \infty),$$

тобто

$$|E'_\rho(\xi;\mu)| \leqslant (1+o(1))\frac{\rho|a|}{|\lambda_n|}|\xi|^{\rho-1} \quad (n\to\infty). \tag{9}$$

З (8) і (9) випливає, що $\left|E'_\rho(\xi;\mu)/E_\rho(\xi;\mu)\right| \leqslant K_1|\xi|^{\rho-1}$, $K_1 \equiv \mathrm{const} > 0$, для всіх ξ, $|\xi-\lambda_n| = q|\lambda_n|^{1-\rho}$, і досить великих $|\lambda_n|$. Отже, ми показали, що на краю області $W_1 \setminus G_q(f)$ справедлива оцінка (1) з $f(z) = E_\rho(z;\mu)$.

Оцінимо, нарешті, $\left|E'_\rho(z;\mu)/E_\rho(z;\mu)\right|$ на дугах $\left\{z \in W_1 : |z| = r_n = \frac{|\lambda_n|+|\lambda_{n+1}|}{2}\right\}$. Позначимо $\varkappa = \frac{1}{2}|\tau_\mu| + 1$. Тоді з (3) випливає існування $n_0 \in \mathbb{N}$ такого, що при $n \geqslant n_0$

$$\left\{2\pi(n-\varkappa)\right\}^{1/\rho} < |\lambda_n| < \left\{2\pi(n+\varkappa)\right\}^{1/\rho}. \tag{10}$$

Справді,

$$|\lambda_n| - \{2\pi(n-\varkappa)\}^{1/\rho} = (2\pi n)^{1/\rho}\Big\{1 - \frac{\tau_\mu}{4\rho^2 n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\} - (2\pi n)^{1/\rho}\Big\{1 - \frac{\varkappa}{n\rho} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\} =$$
$$= \big(1+o(1)\big)\frac{(2\pi n)^{1/\rho}}{4n\rho^2}(4\rho\varkappa - \tau_\mu) \geqslant \big(1+o(1)\big)\frac{(2\pi n)^{1/\rho}}{4n\rho^2}(2\varkappa - \tau_\mu) > 0, \quad n \geqslant n_0,$$

тобто отримуємо ліву нерівність з (10). Права нерівність з (10) доводиться аналогічно.

За теоремою Адамара функцію $E_\rho(z;\mu) = e^{P(z)}\prod_{k=1}^{\infty} E\big(\frac{z}{\lambda_k}, p\big)E\big(z/\overline{\lambda_k}, p\big)$, де $p = [\rho]$, $E(z,p)$ — первинний множник Вейєрштрасса роду p, а $P(z)$ — многочлен степеня $\deg P \leqslant p$. Тому

$$\frac{E'_\rho(z;\mu)}{E_\rho(z;\mu)} = O\big(z^{p-1}\big) + z^p\sum_{k=n_0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_k^p(z-\lambda_k)} + \frac{1}{\overline{\lambda_k}^p(z-\overline{\lambda_k})}\Big) \ \ (z\to\infty),$$

де $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що при $n \geqslant n_0$ виконується (10).

Покладемо $n_1 = \big[\big(\frac{p+1}{p+2}\big)^2 n\big]$, $n_2 = [n - 2\varkappa]$, $n_3 = [n + 2\varkappa] + 3$.

Вважаючи n досить великим, маємо

$$\left|\frac{E'_\rho(r_n e^{i\theta};\mu)}{E_\rho(r_n e^{i\theta};\mu)}\right| \leqslant O(r_n^{p-1}) + 2r_n^p\Big(\sum_{k=n_0}^{n_1} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} + \sum_{k=n_2+1}^{n_3-1} + \sum_{k=n_3}^{\infty}\Big)\frac{1}{|\lambda_k|^p|r_n - |\lambda_k||} \leqslant$$
$$\leqslant O(r_n^{p-1}) + 2r_n^p\Big(\sum_{k=n_0}^{n_1}\frac{1}{|\lambda_k|^p(r_n - |\lambda_k|)} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2}\frac{1}{|\lambda_k|^p(|\lambda_n| - |\lambda_k|)} +$$
$$+ \sum_{k=n_2+1}^{n_3-1}\frac{2}{|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n|}\frac{1}{|\lambda_k|^p} + \sum_{k=n_3}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|^p(\lambda_k - |\lambda_{n+1}|)}\Big) =$$
$$= A_1(r_n) + A_2(r_n) + A_3(r_n) + A_4(r_n) + O(r_n^{p-1}) \quad (n\to\infty). \tag{11}$$

З (3) отримуємо $r_n = \big(1+o(1)\big)|\lambda_n| = \big(1+o(1)\big)(2\pi n)^{1/\rho}$ $(n\to\infty)$. Тому

$$A_1(r_n) = 2r_n^p \sum_{k=n_0}^{n_1} \frac{1+o(1)}{(2\pi k)^{p/\rho} r_n\big(1-(1+o(1))(k/n)^{1/\rho}\big)} =$$

$$= O\Big(r_n^{p-1}\sum_{k=n_0}^{n_1}\frac{1}{k^{p/\rho}\big(1-(1+o(1))\frac{p+1}{p+2}\big)}\Big) = O\Big(r_n^{p-1}\sum_{k=n_0}^{n_1}\frac{1}{k^{p/\rho}}\Big) = O\Big(r_n^{p-1}\int_{n_0}^{n_1}\frac{dt}{t^{p/\rho}}\Big) =$$

$$= \begin{cases} O(r_n^{p-1}\ln n_1), & p=\rho,\\ O(r_n^{p-1}n_1^{1-p/\rho}), & p<\rho,\end{cases} = \begin{cases} O(r_n^{p-1}\ln r_n), & p=\rho,\\ O(r_n^{p-1}), & p<\rho,\end{cases} = O(r_n^{p-1}\ln r_n) \quad (n\to\infty).$$

Далі, з (3) і (10), використовуючи співвідношення $\int_{x_0}^{a}\frac{x^{\rho-p-1}}{1-x}dx \sim \ln\frac{1}{1-a}$, $(a\to 1-)$, $0<x_0<1$, маємо

$$A_2(r_n) \leqslant 2r_n^p \sum_{k=n_1+1}^{n_2}\frac{1+o(1)}{(2\pi k)^{p/\rho}\big(\{2\pi(n-\varkappa)\}^{1/\rho}-\{2\pi(k+\varkappa)\}^{1/\rho}\big)} =$$

$$= O\Big(r_n^p\sum_{k=n_1+1}^{n_2}\frac{1}{k^{\frac{p}{\rho}}\big((n-\varkappa)^{1/\rho}-(k+\varkappa)^{1/\rho}\big)}\Big) = O\Big(r_n^p\int\limits_{n(\frac{p+1}{p+2})^\rho}^{n-2\varkappa-1}\frac{t^{-p/\rho}dt}{(n-\varkappa)^{1/\rho}-(t+\varkappa)^{1/\rho}}\Big) =$$

$$=O\Big(r_n^p(n-\varkappa)^{1-\frac{1+p}{\rho}}\int\limits_{\frac{p+1}{p+2}}^{(1-\frac{1}{n-\varkappa})^{1/\rho}}\frac{x^{\rho-p-1}dx}{(1-\frac{\varkappa}{x^\rho(n-\varkappa)})^{\frac{p}{\rho}}(1-x)}\Big) = O\Big(r_n^{p-1}\int\limits_{\frac{p+1}{p+2}}^{(1-\frac{1}{n-\varkappa})^{1/\rho}}\frac{x^{\rho-p-1}dx}{1-x}\Big)=$$

$$= O\Big(r_n^{p-1}\ln\frac{1}{1-(1-\frac{1}{n-\varkappa})^{1/\rho}}\Big) = O(r_n^{p-1}\ln n) = O(r_n^{p-1}\ln r_n) \quad (n\to\infty).$$

З (3) і (4) випливає наступна оцінка при $n\to\infty$

$$A_3(r_n) = \frac{4r_n^p}{|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|}\sum_{k=[n-2\varkappa]-1}^{[n+2\varkappa]+1}\frac{1+o(1)}{(2\pi k)^{p/\rho}} = O(r_n^p n^{\frac{1-p}{\rho}-1}) = O(r_n^{\rho-1}) = O(r_n^{p-1}\ln r_n).$$

Нарешті, враховуючи (10) і співвідношення $\int\limits_a^{+\infty}\frac{x^{\rho-p-1}}{x-1}dx \sim \ln\frac{1}{a-1}$, $(a\to 1+)$, дістаємо

$$A_4(r_n) \leqslant 2r_n^p\sum_{k=n_3}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p+1}{p}}(k-\varkappa)^{p/\rho}\big((k-\varkappa)^{1/\rho}-(n+1+\varkappa)^{1/\rho}\big)} =$$

$$= O\Big(r_n^p\int\limits_{n+2\varkappa+3}^{\infty}\frac{dt}{(t-\varkappa)^{p/\rho}\big((t-\varkappa)^{1/\rho}-(n+1+\varkappa)^{1/\rho}\big)}\Big) =$$

$$= O\Big(r_n^p(n+1+\varkappa)^{1-\frac{1+\rho}{\rho}}\int\limits_{(1+\frac{2}{n+\varkappa+1})^{1/\rho}}^{\infty}\frac{x^{\rho-p-1}}{x-1}dt\Big) =$$

$$= O\Big(r_n^p\ln\frac{1}{(1+\frac{2}{n+\varkappa+1})^{1/\rho}-1}\Big) = O(r_n^{\rho-1}\ln n) = O(r_n^{\rho-1}\ln r_n) \quad (n\to\infty).$$

Отже, з (11) маємо $\left|E'_\rho(r_ne^{i\theta};\mu)/E_\rho(r_ne^{i\theta};\mu)\right| = O(r_n^{\rho-1}\ln r_n)$, $(n\to\infty)$. Звідси і з справедливості оцінки (1) на $\partial\big(W_1\setminus G_q(f)\big)$, використовуючи лему 3, отримуємо справедливість оцінки (1) з $f(z)=E_\rho(z;\mu)$ в $W_1\setminus G_q(f)$, а з цим теорему 2 для $\rho>1/2$ доведено.

4. Доведення теореми 2 для $\rho=1/2$. Використовуючи формулу (1.9) з [3, с.118] маємо

$$\Big(2z^{1/2}\frac{d}{dz}\Big)^2\big\{z^{\frac{\mu-1}{2}}E_{1/2}(z;\mu)\big\} = z^{\frac{\mu-1}{2}}E_{1/2}(z;\mu)+\frac{1}{\Gamma(\mu-2)}z^{\frac{\mu-1}{2}-1},$$

звідки

$$4z^{1/2}\Big(\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{4}z^{\frac{\mu}{2}-2}E_{1/2}(z;\mu)+\frac{2\mu-1}{2}z^{\frac{\mu}{2}-1}E'_{1/2}(z;\mu)+z^{\frac{\mu}{2}}E''_{1/2}(z;\mu)\Big) = \\ = z^{\frac{\mu-1}{2}}E_{1/2}(z;\mu)+\frac{1}{\Gamma(\mu-2)}z^{\frac{\mu-1}{2}-1},$$

тобто $4z^2E''_{1/2}(z;\mu)+2(2\mu-1)zE'_{1/2}(z;\mu)-\big(z-(\mu-1)(\mu-2)\big)E_{1/2}(z;\mu) = 1/\Gamma(\mu-2)$. Отже, функція $E_{1/2}(z;\mu)$ є розв'язком диференціального рівняння з леми 2, де $m=2$, $g_0(z)=4z^2$, $g_1(z)=2(2\mu-1)z$, $g_2(z)=(\mu-1)(\mu-2)-z$ і $h(z)=1/\Gamma(\mu-2)$. Всі ці многочлени є функціями обмеженого l-індексу для кожної додатної неперервної на $[0;+\infty)$ функції l, а якщо $l_{1/2}(|z|)=|z|^{-1/2}(|z|\geqslant 1)$, то $|g_j(z)| = O\big(|g_0(z)|l^j(|z|)\big)$, $|z|\to\infty$. Тому за лемою 2 функція $E_{1/2}(z;\mu)$ є обмеженого $l_{1/2}$-індексу.

5. Доведення теореми 2 для $0<\rho<1/2$. З леми 5 випливає, що при $n\to\infty$ $|\lambda_n| = \big(1+O(\frac{1}{n})\big)\big(\frac{\pi n}{\sin\pi\rho}\big)^{1/\rho}$, $|\lambda_n|^{1-\rho} = \big(1+O(\frac{1}{n})\big)\big(\frac{\pi n}{\sin\pi\rho}\big)^{1/\rho-1}$, а також $|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n| = \big(1+O(\frac{1}{n})\big)\frac{n^{1/\rho-1}}{\rho}\big(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\big)^{1/\rho}$, тобто, по-перше, для кожного q, $0<q<\frac{\pi}{\rho}<\frac{\pi}{\rho\sin\pi\rho}$ і всіх $n\geqslant n_0$ виконується (5), а з цим і умова 2) леми 1, і, по-друге, $n\big(r,0,E_\rho(z;\mu)\big) = \frac{\sin\pi\rho}{\pi\rho}r^\rho+o(r^\rho)$ $(r\to+\infty)$.

З останнього співвідношення, як і в [6], випливає, що рівномірно відносно $\varphi\in[-\pi+\eta,\pi-\eta]$, $0<\eta<\pi/2$, виконується $E'_\rho(z;\mu)/E_\rho(z;\mu) = \rho z^{\rho-1}+o(r^{\rho-1})$, $(r\to\infty,\ z=re^{i\varphi})$. Отже, в куті $\{z:\ |\arg z|\leqslant\pi-\eta\}$ виконується оцінка (1) з $f(z)=E'_\rho(z;\mu)$, і нам залишилось довести цю оцінку в куті $W=\{z:\ |\arg z-\pi|\leqslant\eta\}$, $0<\eta<\pi/2$.

Відомо [3, с.137], що при $|z|\to+\infty$

$$E_\rho(z;\mu) = \rho\sum_{|\varphi+2\pi n|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}}(z^\rho e^{2\pi i\rho n})^{1-\mu}\exp\{z^\rho e^{2\pi i\rho n}\}+O\Big(\frac{1}{z}\Big), \tag{12}$$

де при $(\frac{1}{\rho}-\mu)\in\mathbb{N}$ член $O(\frac{1}{z})$ відсутній.

Як і в [6], позначимо $M(\varphi)=\big\{k\in\mathbb{Z}:\ \ |\varphi+2\pi k|<\frac{\pi}{\rho}\big\}$, а $\eta\in(0;\pi/2)$ вважаємо настільки малим, що $M(\varphi)=M(\pi)$ при $|\varphi-\pi|\leqslant\eta$. Нехай, далі, $m_0=\max\big\{m\in\mathbb{Z}_+:\ m<\frac{1}{2\rho}-\frac{1}{2}\big\}$, а для $m=0,1,\ldots,m_0$ позначимо

$$\psi_m(z) = \rho z^{\rho(1-\mu)}\Big(\exp\big\{z^\rho e^{2\pi i m\rho}+(1-\mu)2\pi i m\rho\big\}+ \\ +\exp\big\{z^\rho e^{-2\pi i(m+1)\rho}-(1-\mu)2\pi i(m+1)\rho\big\}\Big),$$

де вітка z^ρ в W вибрана з умови $\pi-\eta<\arg z<\pi+\eta$. Тоді з (12) маємо $E_\rho(z;\mu)=\sum_{m=0}^{m_0}\psi_m(z)+O\big(\frac{1}{z}\big)$, $(z\to\infty)$, звідки неважко отримати, що $E'_\rho(z;\mu)=\sum_{m=0}^{m_0}\psi'_m(z)+O\big(\frac{1}{z^2}\big)$, $(z\to\infty)$. Використовуючи ці співвідношення, оцінимо $|E'_\rho(z;\mu)/E_\rho(z;\mu)|$ на колах $\{z\in W: |z-\lambda_k|=q|\lambda_k|^{1-\rho}\}$. Нехай, як у випадку $\rho>1/2$, $\xi=\lambda_k+q|\lambda_k|^{1-\rho}e^{i\theta}=|\lambda_k|\big(e^{i\pi}+q|\lambda_k|^{-\rho}e^{i\theta}\big)$ $(k\geqslant k_0)$.

Тоді при $k\to+\infty$ $\xi^\rho=|\lambda_k|^\rho e^{i\pi\rho}\big(1-q|\lambda_k|^{-\rho}e^{i\theta}\big)^\rho=|\lambda_k|^\rho e^{i\pi\rho}-q\rho e^{i(\theta+\pi\rho)}+O\big(\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}\big)$, і $\xi^{\rho(1-\mu)}=|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}e^{i\pi\rho(1-\mu)}-\frac{(1-\mu)q\rho}{|\lambda_k|^{\rho\mu}}e^{i(\theta+\pi\rho(\mu-1))}+O\big(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\big)$.

Тому

$$|\psi_m(\xi)|\leqslant\rho(1+o(1))|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}\Big|\exp\Big\{(1-\mu)2\pi i\rho m+$$
$$+\Big(|\lambda_k|^\rho e^{i\pi\rho}-q\rho e^{i(\theta+\pi\rho)}+O\Big(\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}\Big)\Big)e^{2\pi i\rho m}\Big\}+$$
$$+\exp\Big\{-(1-\mu)2\pi i\rho(m+1)+\Big(|\lambda_k|^\rho e^{i\pi\rho}-q\rho e^{i(\theta+\pi\rho)}+O\Big(\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}\Big)\Big)e^{-2\pi i\rho(m+1)}\Big\}\Big|=$$
$$=\rho(1+o(1))|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}\Big(\exp\Big\{|\lambda_k|^\rho\cos(2m+1)\pi\rho-$$
$$-q\rho\cos(\theta+(2m+1)\pi\rho)+O\Big(\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}\Big)\Big\}+$$
$$+\exp\Big\{|\lambda_k|^\rho\cos(2m+1)\pi\rho-q\rho\cos(\theta+(2m+1)\pi\rho)+O\Big(\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}\Big)\Big\}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant 3\rho|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}\exp\{|\lambda_k|^\rho\cos(2m+1)\pi\rho+q\rho\}\tag{13}$$

для всіх досить великих k. Подібно маємо

$$|\psi'_m(\xi)|\leqslant 3\rho^2|\lambda_k|^{2\rho-\rho\mu-1}\exp\{|\lambda_k|^\rho\cos(2m+1)\pi\rho+q\rho\}.\tag{14}$$

Нарешті,

$$|\psi_0(\xi)|=\rho(1+o(1))|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}\Big|\exp\Big\{|\lambda_k|^\rho e^{i\pi\rho}-q\rho e^{i(\theta+\pi\rho)}+O\Big(\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}\Big)\Big\}+$$
$$+\exp\Big\{|\lambda_k|^\rho e^{-i\pi\rho}-q\rho e^{i(\theta-\pi\rho)}+O\Big(\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}\Big)\Big\}e^{-2\pi\rho i(1-\mu)}\Big|=$$
$$=\rho(1+o(1))|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}e^{|\lambda_k|^\rho\cos\pi\rho}\,|\exp\{i|\lambda_k|^\rho\sin\pi\rho-$$
$$-q\rho\cos(\theta+\pi\rho)-iq\rho\sin(\theta+\pi\rho)\}(1+o(1))+$$
$$+\exp\{-i|\lambda_k|^\rho\sin\pi\rho-q\rho\cos(\theta-\pi\rho)-iq\rho\sin(\theta-\pi\rho)-2\pi i\rho(1-\mu)\}(1+o(1))|=$$
$$=\rho(1+o(1))|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}\exp\{|\lambda_k|^\rho\cos\pi\rho-q\rho\cos\theta\cos\pi\rho\}\times$$
$$\times|\exp\{i|\lambda_k|^\rho\sin\pi\rho+q\rho\sin\theta\sin\pi\rho-iq\rho\cos\theta\sin\pi\rho\}(1+o(1))+$$
$$+\exp\{-i|\lambda_k|^\rho\sin\pi\rho-q\rho\sin\theta\sin\pi\rho+iq\rho\cos\theta\sin\pi\rho-2\pi i\rho(1-\mu)\}(1+o(1))|\geqslant$$
$$\geqslant(1+o(1))\rho|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}\exp\{|\lambda_k|^\rho\cos\pi\rho-q\rho\cos\pi\rho\}\times$$
$$\times|(1+o(1))\exp\{q\rho\sin\pi\rho(\sin\theta-i\cos\theta)\}-$$
$$-(1+o(1))\exp\{-q\rho\sin\pi\rho(\sin\theta-i\cos\theta)\}|=$$
$$=(1+o(1))\rho|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}\exp\{|\lambda_k|^\rho\cos\pi\rho-q\rho\cos\pi\rho\}\times$$
$$\times\big|\exp\{-iq\rho\sin\pi\rho e^{i\theta}\}-\exp\{iq\rho\sin\pi\rho e^{i\theta}\}+o(1)\big|=$$
$$=(1+o(1))\rho|\lambda_k|^{\rho(1-\mu)}e^{(|\lambda_k|^\rho-q\rho)\cos\pi\rho}|2i\sin(q\rho e^{i\theta})+o(1)|\tag{15}$$

при $k \to \infty$. Оскільки $\cos \pi\rho > \cos 3\pi\rho > \cdots > \cos(2m_0+1)\pi\rho$, то з (13) і (15) випливає, що $\psi_m(\xi) = o(\psi_0(\xi))$, $k \to \infty$, для всіх $m > 0$ і, отже, $|E_\rho(\xi;\mu)| = \big(1+o(1)\big)|\psi_0(\xi)|$ $(k \to \infty)$.

А з (14) маємо $|E'_\rho(\xi;\mu)| \leqslant 3\rho^2|\lambda_k|^{2\rho-\rho\mu-1}\exp\{|\lambda_k|^\rho \cos\pi\rho + q\rho\}\big(1+o(1)\big)$ $(k \to \infty)$, тому

$$\left|\frac{E'_\rho(\xi;\mu)}{E_\rho(\xi;\mu)}\right| \leqslant \frac{3\rho|\lambda_k|^{\rho-1}\exp\{q\rho(1+\cos\pi\rho)\}}{2|\sin(q\rho e^{i\theta})|}\big(1+o(1)\big) = O(|\xi|^{\rho-1}) \quad (k \to \infty).$$

Звідси випливає, що на $\partial\big(W \setminus G_q(f)\big)$ з нерівність (1) виконується з $f(z) = E_\rho(z;\mu)$.

Доведення того, що на дугах $\big\{z \in W : |z| = r_n = \frac{1}{2}(|\lambda_n|+|\lambda_{n+1}|)\big\}$ виконується оцінка $|E'_\rho(r_n e^{i\varphi};\mu)/E_\rho(r_n e^{i\varphi};\mu)| = O(r_n^{\rho-1}\ln r_n)$ $(n \to \infty)$ точно таке ж, як і для $\rho > 1/2$, і навіть простіше, бо у випадку $0 < \rho < 1/2$ за теоремою Адамара функцію $E_\rho(z;\mu)$ можна зобразити у вигляді $E_\rho(z;\mu) = \prod_{k=1}^\infty\big(1-\frac{z}{\lambda_k}\big)$, тобто у всіх випадках, що наведені для $\rho > 1/2$, треба брати $p = 0$.

Застосовуючи, нарешті, лему 3, ми завершуємо доведення теореми 2, а з цим і теореми 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кузык А.Д., Шеремета М.Н. *Целые функции ограниченного l-распределения значений* Матем. заметки. – 1986. – Т.39, 1. – С.3–13.
2. Shah S.M. *Entire functions of bounded index* Lecture Notes in Math. – 1977. – V.589. – P.117–145.
3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука. – 1966. – 672с.
4. Shah S.M. *Entire functions satisfying a linear differential equation* J. Math. Mech. – 1968. – V.18, 2. – P.131–136.
5. Шеремета М.М. *До гіпотези Шаха про обмеженість індексу функції Міттаг-Леффлера* в друці.
6. Гольдберг А.А. *Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Леффлера та її застосування* Матем. студії. – 1996. – Вип.5. – С.21–30.
7. Шеремета М.Н. *Об l-индексе и l-распределении значений целых функций* Изв. вузов. Мат. – 1990. – Вып.2. – С.94–96.
8. Шеремета М.Н., Кузык А.Д. *О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-индекса* Сиб. матем. журн. – 1992. – Т.33, 2. – С.142–150.
9. Кузык А.Д., Шеремета М.Н. *О целых функциях, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям* Диф. уравнения. – 1990. – Т.26, 10. – С.1716–1722.
10. Седлецкий А.М. *Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера* Analysis Mathematica. – 1994. – V.20. – P.117–132.

Львівський унверситет, механіко-математичний факультет

290602 Львів, вул. Університетська, 1

Надійшло 21.05.1997