УДК 517.576

ПРО АБСЦИСУ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

О.М. Мулява

O. Mulyava. *On the convergence abscissa of a Dirichlet series*, Matematychni Studii, **9**(1998) 171–176.

It is established conditions of Dirichlet series under which the Valiron formula for the abscissa of absolutely convergence holds.

1. Нехай (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а $\sigma_з$ і σ_a — абсциса збіжності і абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it. \tag{1}$$

Класична теорема Валірона [1, с.115] стверджує, що якщо $\tau_0 \overset{\text{def}}{=} \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$, то

$$\sigma_з = \sigma_a = \alpha_0 \overset{\text{def}}{=} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}. \tag{2}$$

Тут ми покажемо, що умову $\tau_0 = 0$ в теоремі Валірона можна замінити умовою

$$\ln n = o(\ln |a_n|), \quad n \to \infty, \tag{3}$$

і вияснимо, наскільки ці обидві умови є необхідними для справедливості рівностей (2).

2. Для $\gamma > 0$ і $\delta \in \mathbb{R}$ позначимо

$$h(\gamma, \delta) \overset{\text{def}}{=} \varliminf_{n\to\infty} \frac{(\gamma - 1)\ln |a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n}. \tag{4}$$

і доведемо спочатку таку теорему.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50, 30D15.

Теорема 1. *Для кожного ряду Діріхле (1)* $\sigma_{\text{а}} \le \sigma_{\text{з}}$ *і* $\sigma_a \le \alpha_0$*, а якщо* $h(\gamma,\delta) > 1$*, то* $\sigma_{\text{а}} \ge \gamma\sigma_{\text{з}} - \delta$ *і* $\sigma_a \ge \gamma\alpha_0 - \delta$*.*

Доведення. Нерівність $\sigma_{\text{а}} \le \sigma_{\text{з}}$ очевидна. Припустимо, що $\alpha_o < +\infty$. Тоді для кожного $\alpha > \alpha_0$ існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$|a_{n_k}| \ge \exp(-\alpha\lambda_{n_k}),$$

тобто

$$|a_{n_k}|\exp(\sigma\lambda_{n_k}) \ge \exp\{(-\alpha+\sigma)\lambda_{n_k}\} \ge 1.$$

для всіх $\sigma \ge \alpha$. Звідси, завдяки довільності α, випливає, що ряд (1) розбіжний в кожній точці $s = \sigma > \alpha_0$, і отже, $\sigma_a \le \alpha_0$. При $\alpha_0 = +\infty$ ця нерівність очевидна.

Якщо $\alpha_0 > -\infty$, то для кожного $\sigma < \gamma\alpha_0 - \delta$ маємо

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n} = \alpha_0 > \frac{\sigma+\delta}{\gamma},$$

тобто

$$\ln|a_n| + \frac{\sigma+\delta}{\gamma}\lambda_n = \lambda_n\Big(-\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n} + \frac{\sigma+\delta}{\gamma}\Big) < 0$$

для всіх досить великих n. Тому для таких n виконується

$$|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) = \exp\Big\{-\big((\gamma-1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n\big) + \gamma\Big(\ln|a_n| + \frac{\sigma+\delta}{\gamma}\lambda_n\Big)\Big\} \le$$
$$\le \exp\Big\{-\frac{(\gamma-1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n}\ln n\Big\} < \exp\{-(h(\gamma,\delta)-\varepsilon)\ln n\}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, h(\gamma,\delta)-1)$ і всіх $n \ge n_0(\varepsilon)$. Оскільки $h(\gamma,\delta)-\varepsilon > 1$, то звідси випливає, що ряд (1) абсолютно збіжний в точці $s = \sigma$, тобто $\sigma_a \ge \gamma\alpha_0 - \delta$. При $\alpha_0 = -\infty$ ця нерівність очевидна.

Нехай, нарешті, $\sigma_{\text{з}} > -\infty$ і $\eta \in (-\infty, \sigma_{\text{з}})$. Оскільки ряд (1) збіжний в точці η, то існує $M > 0$ таке, що для всіх $n \ge 0$

$$|a_n|\exp(\eta\lambda_n) \le M,$$

тобто

$$|a_n|\exp\{(\gamma\eta-\delta)\lambda_n\} = \big(|a_n|\exp\{\eta\lambda_n\}\big)^\gamma |a_n|^{1-\gamma}\exp\{-\delta\lambda_n\} \le$$
$$\le M^\gamma \exp\Big\{-\frac{(\gamma-1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n}\ln n\Big\} < \exp\big\{-(h(\gamma,\delta)-\varepsilon)\ln n\big\}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, h(\gamma,\delta)-1)$ і всіх $n \ge n_0(\varepsilon)$. Звідси, як вище, випливає, що $\sigma_a \ge \gamma\eta - \delta$, а завдяки довільності η, $\sigma_a \ge \gamma\sigma_{\text{з}} - \delta$. При $\sigma_{\text{з}} = -\infty$ ця нерівність очевидна. Теорему 1 повністю доведено.

Наслідок 1. *Для кожного ряду Діріхле (1)* $\sigma_{\text{а}} \leq \sigma_{\text{з}} \leq \sigma_{\text{а}} + \tau_0$ *і* $\sigma_{\text{а}} \leq \alpha_0 \leq \sigma_{\text{а}} + \tau_0$.

Справді, візьмемо в теоремі 1 $\gamma = 1$ і $\delta = \tau_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h(\gamma, \delta) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{(\tau_0 + \varepsilon)\lambda_n}{\ln\, n} = \frac{\tau_0 + \varepsilon}{\tau_0} > 1$$

і, отже, справедливі оцінки $\sigma_a \geq \alpha_0 - \tau_0 - \varepsilon$ і $\sigma_a \geq \sigma_{\text{з}} - \tau_0 - \varepsilon$, тобто, завдяки довільності ε, маємо $\sigma_a \geq \alpha_0 - \tau_0$ і $\sigma_a \geq \sigma_{\text{з}} - \tau_0$.

Приклад ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp{(s \ln\, n)}$, для якого $\tau_0 = 1$, $\alpha_0 = \sigma_{\text{з}} = 0$, $\sigma_a = -1$, вказує на точність наведених в наслідку 1 оцінок.

Наслідок 2. *Якщо*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln |a_n|}{\ln\, n} = h_0 > 0,$$

то $\sigma_a \geq \alpha_0(h_0 + 1)/h_0$ *і* $\sigma_a \geq \sigma_{\text{з}}(h_0 + 1)/h_0$.

Справді, якщо візьмемо в теоремі 1 $\delta = 0$ і $\gamma = 1 + \varepsilon + 1/h_0$, то

$$h(\,\delta) = \varliminf_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{h_0} + \varepsilon\Big) \frac{\ln |a_n|}{\ln\, n} \geq 1 + \varepsilon h_0 > 1,$$

і отже, $\sigma_{\text{а}} \geq (1+\varepsilon+1/h_0)\sigma_{\text{з}}$ і $\sigma_{\text{а}} \geq (1+\varepsilon+1/h_0)\alpha_0$, звідки, завдяки довільності ε, отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду $1 + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n n \exp{(s \ln\, n)}$ вказує на точність отриманих у наслідку 2 оцінок. Тут $h_0 = 1$, $\alpha_0 = \sigma_{\text{з}} = -1$, а $\sigma_a = -2$.

Наслідок 3. *Якщо*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\, n}{\ln(1/|a_n|)} = h_0 \in [0, 1),$$

то $\sigma_a \geq \sigma_{\text{з}}(1 - h_0)$ *і* $\sigma_a \geq \alpha_0(1 - h_0)$.

Справді, якщо в теоремі 1 візьмемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - h_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1 - h_0$, то

$$h(\gamma, \delta) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{(h_0 + \varepsilon) \ln(1/|a_n|)}{\ln\, n} = \frac{h_0 + \varepsilon}{h_0} > 1$$

і отже, $\sigma_a \geq \sigma_{\text{з}}(1 - h_0 - \varepsilon)$ і $\sigma_a \geq \alpha_0(1 - h_0 - \varepsilon)$, звідки, завдяки довільності ε, отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \exp{(s \ln\, n)}$$

вказує на точність вказаних у наслідку 3 оцінок. Тут $h_0 = 1/2$, $\alpha_0 = \sigma_{\text{з}} = 2$, а $\sigma_a = 1$.

Використовуючи наслідки 1–3, тепер доведемо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай або $\tau_0 = 0$, або $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \to \infty$. Тоді $\sigma_з = \sigma_а = \alpha_0$.*

Доведення. Якщо $\tau_0 = 0$, то висновок теореми випливає з наслідку 1. Якщо ж $\ln n = o(\ln |a_n|), n \to \infty$, то або 1) $\ln |a_n| / \ln n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, або 2) $\ln |1/a_n| / \ln n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, або $\{a_n\} = \{a_n'\} \cup \{a_n''\}$, де $\{a_n'\}$ задовольняє вказану умову 1), а $\{a_n''\}$ задовольняє умову 2). В перших двох випадках справедливість теореми випливає з наслідків 2 і 3. У третьому випадку запишемо ряд (1) у вигляді суми

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' e^{s\lambda_n'} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'' e^{s\lambda_n''}, \tag{5}$$

де показники λ_n' і λ_n'' відповідають коефіцієнтам a_n' і a_n''. За наслідками 2 і 3

$$\sigma_з' = \sigma_a' = \alpha_0' = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n'} \ln \frac{1}{a_n'}, \quad \sigma_з'' = \sigma_a'' = \alpha_0'' = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n''} \ln \frac{1}{a_n''},$$

де $\sigma_з'$, $\sigma_а'$ і $\sigma_з''$, $\sigma_а''$ — абсциси збіжності та абсолютної збіжності відповідних рядів з (5). Зауважимо також, що, оскільки $\sigma_з' \le 0$ і $\sigma_з'' \ge 0$, то $\sigma_а = \min\{\sigma_a', \sigma_a''\}$ і $\sigma_з = \min\{\sigma_з', \sigma_з''\}$. Звідси випливає, що $\sigma_з = \sigma_a$, а $\alpha_0 \le \min\{\alpha_0', \alpha_0''\} = \min\{\sigma_a', \sigma_a''\} = \sigma_a \le \alpha_0$, і $\sigma_з \le \min\{\sigma_a', \sigma_a''\} = \sigma_a \le \sigma_з$. Теорему 2 повністю доведено.

3. Вияснимо тепер, наскільки умови $\tau_0 = 0$ і $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \to \infty$, є необхідними для справедливості рівності $\sigma_a = \alpha_0$. Почнемо з умови $\tau_0 = 0$. Для зростаючої до $+\infty$ послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ невід'ємних чисел через $D(\Lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле (1) з заданою послідовністю Λ показників.

Теорема 3. *Для того, щоб для кожного ряду Діріхле з $D(\Lambda)$ виконувалась рівність $\sigma_a = \alpha_0$, необхідно і досить, щоб $\tau_0 = 0$.*

Доведення. Достатність умови $\tau_0 = 0$ випливає з наслідку 1. Для доведення її необхідності нам буде потрібне наступне доведене в [2] твердження: *з кожної послідовності Λ, для якої*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} > \tau > 0, \tag{6}$$

можна виділити підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda_k^*)$ таку, що

$$\ln k \le \tau \lambda_k^* + 1 \tag{7}$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ і

$$\ln k_j \ge \tau \lambda_{k_j}^* \tag{8}$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Отже, припустимо, що $\tau_0 > 0$, і виберемо $0 < \tau < \tau_0$. Тоді існує підпослідовність Λ^* послідовності Λ, для якої виконуються нерівності (7) і (8). Покладемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \ne \lambda_k^*$, і $a_n = \exp\{-\alpha_0 \lambda_k^*\}$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, тобто розглянемо ряд Діріхле

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\alpha_0 \lambda_k^* + s\lambda_k^*\} \tag{9}$$

Можемо вважати, що послідовність (k_j) зростає настільки швидко, що $\lambda^*_{m_j} > \lambda^*_{k_{j-1}}$, де $m_j = \left[\frac{1}{2}k_j\right]$. Нехай $\sigma^* = \alpha_0 - \tau$. Тоді, завдяки (8), маємо

$$\sum_{\lambda^*_{m_j} \le \lambda^*_k \le \lambda^*_{k_j}} \exp\{-\alpha_0 \lambda^*_k + \sigma^* \lambda^*_k\} = \sum_{\lambda^*_{m_j} \le \lambda^*_k \le \lambda^*_{k_j}} \exp\{-\tau \lambda^*_k\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} k_j \exp\{-\tau \lambda^*_{k_j}\} = \frac{1}{2} \exp\{\ln k_j - \tau \lambda^*_{k_j}\} \ge \frac{1}{2}.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\alpha_0 \lambda^*_k + \sigma^* \lambda^*_k\} \ge \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\lambda^*_{m_j} \le \lambda^*_k \le \lambda^*_{k_j}} \exp\{-\alpha_0 \lambda^*_k + \sigma^* \lambda^*_k\} = +\infty.$$

Звідси випливає, що для ряду (9) $\sigma_a \le \sigma^* = \alpha_0 - \tau$, тобто існує ряд Діріхле з класу $D(\Lambda)$, для якого рівність $\sigma_a = \alpha_0$ не виконується. Теорему 3 доведено.

З умовою $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \to \infty$, ситуація дещо складніша. Ми розглядатимемо тільки випадки $\ln |a_n| / \ln n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ і $\ln |1/a_n| / \ln n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Оскільки абсциса абсолютної збіжності ряду (1) співпадає з абсцисою збіжності додатного ряду

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma \lambda_n),$$

то можемо вважати, що коефіцієнти ряду (1) додатні і, якщо $\sigma < \sigma_a$, можемо впорядкувати члени ряду за неспаданням чи незростанням коефіцієнтів. Будемо додатково вимагати, щоб коефіцієнти були або зростаючими до $+\infty$, або спадними до 0. Тоді послідовність (λ_n) не обов'язково повинна бути зростаючою.

Іншими словами, нехай $A_1 = (a_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $a_1 > 1$, а $D^*(A_1)$ — клас рядів Діріхле (1) з заданими коефіцієнтами. Аналогічно, нехай $A_2 = (a_n)$ — спадна до 0 послідовність додатних чисел, $a_1 < 1$, а $D^*(A_2)$ — клас рядів Діріхле (1) з такими коефіцієнтами.

Теорема 4. *Для того, щоб для кожного ряду Діріхле з $D^*(A_1)$ виконувалась рівність $\sigma_a = \alpha_0$, необхідно і досить, щоб $\ln n = o(\ln a_n)$, $n \to \infty$.*

Доведення. Достатність умови $\ln n = o(\ln a_n)$, $n \to \infty$, випливає з наслідку 2. Припустимо тепер, що ця умова не виконується, тобто

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\ln a_n} > \tau > 0.$$

Тоді існує підпослідовність $A^*_1 = (a^*_k)$, для якої справджуються нерівності (7) і (8) з $\ln a^*_k$ замість λ^*_k. Зауважимо, що оскільки $a_n > 1$, то $\alpha_0 \le 0$. Виберемо $\alpha < 0$, і покладемо $\lambda_n = \ln^2 a_n$, якщо $a_n \ne a^*_k$, і $\lambda_n = \frac{1}{|\alpha|} \ln a^*_k$, якщо $a_n = a^*_k$. Для ряду Діріхле з такими показниками маємо

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{-\ln a_n}{\ln^2 a_n} = 0,$$

якщо $a_n \ne a^*_k$, і

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = \underline{\lim_{k \to \infty}} \frac{-|\alpha| \ln a^*_k}{\ln a^*_k} = \alpha < 0,$$

якщо $a_n = a^*_k$. Звідси випливає, що $\alpha_0 = \alpha$.

Оцінимо тепер знизу цю частину ряду, яка відповідає рівностям $a_n = a_k^*$, тобто розглянемо ряд Діріхле

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \exp\Big\{\frac{\sigma}{|\alpha|}\ln a_k^*\Big\}. \tag{10}$$

Можемо вважати, що послідовність (k_j) зростає настільки швидко, що $a_{m_j}^* > a_{k_{j-1}}^*$, де m_j визначене, як при доведенні теореми 3. Нехай $\sigma^* = \alpha(1+\tau)$. Тоді, завдяки (8), маємо

$$\sum_{a_{m_j}^*\le a_k^*\le a_{k_j}^*} a_k^* \exp\Big\{\frac{\sigma^*}{|\alpha|}\ln a_k^*\Big\} = \sum_{a_{m_j}^*\le a_k^*\le a_{k_j}^*} \exp\{-\tau\ln a_k^*\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}k_j \exp\{-\tau\ln a_{k_j}^*\} = \frac{1}{2}\exp\{\ln k_j - \tau\ln a_{k_j}^*\} \ge \frac{1}{2}.$$

Звідси, як при доведенні теореми 3, отримуємо, що для ряду (10) $\sigma_{\mathrm{a}} \le \alpha_0(1+\tau)$, тобто існує ряд Діріхле з класу $D^*(A_1)$, для якого рівність $\sigma_a = \alpha_0$ не виконується. Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Для того, щоб для кожного ряду Діріхле з $D^*(A_2)$ виконувалась рівність $\sigma_a = \alpha_0$, необхідно і досить, щоб $\ln n = o(\ln\frac{1}{a_n})$, $n\to\infty$.*

Доведення. Достатність умови $\ln n = o(\ln\frac{1}{a_n})$, $n\to\infty$, випливає з наслідку 3. Припустимо тепер, що ця умова не виконується, тобто

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1/a_n)} > \tau\in(0,1).$$

Тоді існує підпослідовність $A_2^* = (a_k^*)$, для якої справджуються нерівності (7) і (8) з $\ln\frac{1}{a_k^*}$ замість λ_k^*. Оскільки $a_n < 1$, то $\alpha_0 \ge 0$. Виберемо $\alpha > 0$, і покладемо $\lambda_n = \sqrt{\ln\frac{1}{a_n}}$, якщо $a_n \ne a_k^*$, і $\lambda_n = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{a_k^*}$, якщо $a_n = a_k^*$. Для ряду з такими показниками, як при доведенні теореми 4, неважко показати, що $\alpha_0 = \alpha$, а для тієї частини ряду, яка відповідає рівностям $a_n = a_k^*$, тобто для ряду Діріхле

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \exp\{\frac{\sigma}{|\alpha|}\ln a_k^*\}. \tag{11}$$

при $\sigma^* = \alpha(1-\tau)$, як вище, тепер маємо

$$\sum_{a_{m_j}^*\ge a_k^*\ge a_{k_j}^*} a_k^* \exp\Big\{\frac{\sigma^*}{\alpha}\ln\frac{1}{a_k^*}\Big\} = \sum_{a_{m_j}^*\le a_k^*\le a_{k_j}^*} \exp\Big\{-\tau\ln\frac{1}{a_k^*}\Big\} \ge \frac{1}{2}k_j\exp\Big\{-\tau\ln\frac{1}{a_{k_j}^*}\Big\} \ge \frac{1}{2}.$$

Звідси, як вище, отримуємо, що для ряду (11) $\sigma_{\mathrm{a}} \le \alpha_0(1-\tau)$, тобто існує ряд Діріхле з класу $D^*(A_2)$, для якого рівність $\sigma_a = \alpha_0$ не виконується. Теорему 5 доведено.

Автор щиро дякує проф. О.Б. Скасківу за цінні зауваження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536с.
2. Шеремета М.Н. *О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества* Матем. заметки. – 1995. – Т.56, №2. – С.283–296.

Дрогобицький державний педінститут

Надійшло 1.09.97