УДК 517.54

О ГОЛОМОРФНОСТИ ФУНКЦИИ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ

М.Т. Бродович

M. Brodovitch. *On the holomorphy of function which has the derivatives with respect to some sets*, Matematychni Studii, **9**(1998) 155–164.

Let $f\colon D \to \mathbb{C}$, where D is a domain in the complex plane $\mathbb{C}$, be a one-to-one mapping which is not supposed to be continuous. Suppose that for each $z \in D$, $f(z)$ satisfies two requirements: 1) the finite derivative f' exists with respect to some measurable set $\mathcal{E}(z)$ such that $\lim\limits_{r\to 1} \frac{\mathrm{m}(\mathcal{E}(z)\cap C(z,r))}{\pi r^2} > 0$, where $C(z,r) = \{z' : |z'-z| < r\}$; 2) $\overline{\lim\limits_{z'\to z, z'\in E(z)}} \left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right| < \infty$ for some measurable set $E(z)$ such that $\lim\limits_{r\to 0} \frac{m(E(z)\cap C(z,r))}{\pi r^2} = b > \frac{1}{2}$. Then it is proved that function f is holomorphic.

Пусть $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ — отображение области $\mathcal{D}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Через $\mathrm{m}(E)$ обозначим плоскую меру Лебега измеримого на плоскости множества E.

В даной работе доказывается следующая теорема. Отметим, что непрерывность рассматриваемого отображения не предполагается.

Теорема. *Пусть взаимно однозначное отображение $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям:*

1) *для каждой точки $z \in \mathcal{D}$ найдется измеримое множество $\mathcal{E}(z)$, для которого верно неравенство $\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{m}(\mathcal{E}(z)\cap C(z,r))}{\pi r^2} > 0$, где $C(z,r) = \{z' : |z'-z| < r\}$, относительно которого функция f имеет конечную производную, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{z'\to z, z'\in\mathcal{E}(z)} \frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$,*
2) *для каждой точки $z \in \mathcal{D}$ найдется измеримое множество $E(z)$, для которого верно условие $\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{m}(E(z)\cap C(z,r))}{\pi r^2} = b > \frac{1}{2}$ и относительно которого соблюдается неравенство $\overline{\lim}_{z'\to z} \left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}\right| < \infty$.*
Тогда функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ — голоморфна.

Такого характера условие голоморфности получено Д.Е. Меньшовым в [1]: доказано голоморфность непрерывного отображения, обладающего конечной

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30A05.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

аппроксимативной (асимптотической) производной во всех точках области задания функции, за исключением разве что счетного множества точек. На случай взаимно однозначных отображений, не предполагаемых непрерывными, теорема Меньшова распространена автором [2]. Подобные теоремы получены также в работах Д.С. Теляковского [3–4].

Сформулированная теорема вытекает из ряда лемм.

Лемма 1. *Пусть β — совершенное множество области $\mathcal{D}$ и в каждой точке β функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию 2) теоремы. Тогда найдется подмножество β_0 множества β, на котором функция f удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ такое, что $b - \eta > \frac{1}{2}$. Для каждой точки $z \in \beta$ найдется натуральное k такое, что

$$\mathrm{m}\big(E(z) \cap C(z,r)\big) > (b-\eta)\pi r^2, \quad \text{если} \quad r < \frac{1}{k}, \tag{1}$$

и

$$\Big|\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\Big| < k, \quad \text{если} \quad z' \in E(z), \quad |z' - z| < \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Пусть β_k для $k = 1, 2, \dots$ множество тех точек множества β, для которых выполняются условия (1), (2). Так как $\beta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \beta_k$, то найдется такое число k_0, что множество β_{k_0} всюду плотно на некотором подмножестве β_0 множества β, $\beta_0 = \beta \cap \delta$, где δ — открытый прямоугольник со сторонами параллельными осям координат.

Для прямоугольника δ достаточно малого диаметра найдется такой достаточно большой угол φ, $(\varphi > \frac{\pi}{2})$, что, если z_1, z_2 — произвольные точки множества $\beta_{k_0} \cap \delta$, то для некоторого r, $r < \frac{1}{k_0}$, окружности кругов $C(z_1, r)$, $C(z_2, r)$ пересекаются в точках A и B и $\measuredangle A z_1 B = \measuredangle A z_2 B = \varphi$. Пусть $K(z_1, z_2) = C(z_1, r) \cap C(z_2, r)$. Угол φ настолько большой, что величина $\mathrm{m}\big(C(z_1, r) \setminus K(z_1, z_2)\big)$ мала и согласно (1) справедливо неравенство

$$\mathrm{m}\big(E(z_1) \cap K(z_1, z_2)\big) + \mathrm{m}\big(E(z_2) \cap K(z_1, z_2)\big) > \pi r^2.$$

Следовательно, $E(z_1) \cap E(z_2) \cap K(z_1, z_2) \neq 0$. Пусть $\bar{z} \in E(z_1) \cap E(z_2) \cap K(z_1, z_2)$. Поскольку справедливо условие (2), то имеют место неравенства $|f(\bar{z}) - f(z_1)| < k_0 |\bar{z} - z_1|$ и $|f(\bar{z}) - f(z_2)| < k_0 |\bar{z} - z_2|$. Поэтому,

$$|f(z_1) - f(z_2)| < k_0\big(|\bar{z} - z_1| + |\bar{z} - z_2|\big) \le k_0 L_1 |z_1 - z_2|,$$

где $L_1 \ge \frac{1}{|z_1 - z_2|} \max\limits_{z \in K(z_1, z_2)} \big(|z - z_1| + |z - z_2|\big)$. Обозначим $L = k_0 L_1$.

Условие Липшица для функции f на множестве $\beta_{k_0} \cap \delta$ доказано, т.е. для $z_1, z_2 \in \beta_{k_0} \cap \delta$ выполняется неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le L |z_1 - z_2|. \tag{3}$$

Пусть z_0 — произвольная точка множества β_0, $\{z_n\}$ — последовательность точек множества $\beta_{k_0} \cap \delta$, сходящаяся к точке z_0. Убедимся, что найдется подпоследовательность $\{z_{n_i}\}$ последовательности $\{z_n\}$, для которой справедливо

$$\lim_{i \to \infty} f(z_{n_i}) = f(z_0). \tag{4}$$

В каждой точке достаточно малой окрестности точки z_0 найдется точка z_i и точка z_{n_i} последовательности $\{z_n\}$, для которых согласно формулировке леммы 1 — условию 2) теоремы и условию $\{z_{n_i}\} \subset \beta_{k_0} \cap \delta$ выполняются требования: $z_i' \in E(z_0) \cap E(z_{n_i})$, $|f(z_i') - f(z_0)| < p|z_i' - z_0|$, где p — некоторое число, и $|f(z_i') - f(z_{n_i})| < k_0|z_i' - z_{n_i}|$. Поэтому, $|f(z_{n_i}) - f(z_0)| < p|z_i' - z_0| + k_0|z_i' - z_{n_i}|$. Из условий $|z_i' - z_0| \to 0$, $|z_i' - z_{n_i}| \to 0$ при $i \to \infty$ вытекает (4).

Пусть z_1, z_2 произвольные точки множества β_0, $\{z_n^1\}$, $\{z_n^2\}$ — последовательности точек множества $\beta_{k_0} \cap \delta$, сходящиеся соответственно к точкам z_1, z_2. Поскольку для $n = 1, 2, \ldots$ соблюдаются неравенства $|f(z_n^1) - f(z_n^2)| \leq L|z_n^1 - z_n^2|$ и справедливо (4), то верно неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$. Лемма 1 доказана.

В случае, когда выполняется условие теоремы, в силу леммы 1 найдется открытый прямоугольник δ, со сторонами, параллельными осям координат, в котором функция f удовлетворяет условию Липшица. Согласно теореме Степанова в прямоугольнике δ функция f почти всюду дифференцируема и, так как согласно условию 1) теоремы в каждой точке z обладает конечной производной относительно множества $\mathcal{E}(z)$, то функция f моногенна почти всюду в прямоугольнике δ.

Для любого прямоугольного контура C со сторонами параллельными осям координат, содержащегося в прямоугольнике δ, справедливо равенство

$$- \iint_R \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\, dxdy + i \iint_R \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\, dxdy = \\ = \int_C u\, dx - v\, dy + i \int_C v\, dx + u\, dy = \int_C f(z)\, dz, \quad (5)$$

где R — внутренность контура C, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$.

Так как почти всюду в прямоугольнике R функция f удовлетворяет условиям Коши-Римана, то из (5) вытекает, что $\int_C f(z)\, dz = 0$ и, следовательно, функция f голоморфна в прямоугольнике δ.

Обозначим через $\mathcal{H}$ открытое, всюду плотное в области $\mathcal{D}$ множество точек голоморфности функции $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. Можем предполагать, что функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ ограничена: ибо в противном случае мы рассматривали бы функцию $\zeta = \varphi(z) = \frac{1}{f(z) - f(\bar{z})}$, заданную в области $\mathcal{D} \setminus \{z : |z - \bar{z}| \leq r\}$, где $r > 0$ и $\{z : |z - \bar{z}| \leq r\} \subset \mathcal{H}$. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы множество $\beta = \mathcal{D} \setminus \mathcal{H}$ совершенно в области $\mathcal{D}$.

Пусть β_0 множество, определенное в лемме 1, на котором функция f удовлетворяет условию Липшица.

Лемма 2. *На почти всех параллельных осям координат сечениях открытого прямоугольника δ, функция f абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим сечения, параллельные оси Ox. Поскольку отображение f взаимно однозначно и ограничено в области $\mathcal{D}$, то

$$\mathrm{m} f(\mathcal{H}) = \iint_{\mathcal{H}} |f'(z)|^2\, dxdy < \infty, \quad z = x + iy. \quad (6)$$

Пусть δ_y сечение открытого прямоугольника δ прямой параллельной оси Ox, проходящей через точку $O+iy$; $l_{ky}=(a_{ky},b_{ky})$, $k=1,2,\dots$ — смежные интервалы множества $\delta_y\setminus\beta_0$. Согласно теореме Фубини для почти всех сечений δ_y справедливо условие

$$\sum_k \text{дл.} f(l_{ky}) = \int_{\delta_y\cap\mathcal{H}} |f'(z)||dz| < \infty, \tag{7}$$

где дл.$\equiv$ длина. Из условия $\sum_k \text{дл.} f(l_{ky}) < \infty$ вытекает, что для почти всех сечений δ_y, для всех интервалов (a_{ky},b_{ky}) существуют конечные пределы

$$\lim_{\substack{z\to a_{ky}+iy\\ z\in l_{ky}}} f(z) = f(a_{ky}+iy+0), \qquad \lim_{\substack{z\to b_{ky}+iy\\ z\in l_{ky}}} f(z) = f(b_{ky}+iy-0).$$

Основную часть доказательства леммы 2 составляет

Предложение. *Для почти всех сечений δ_y, для всех интервалов l_{ky} функция f непрерывна в каждой точке $a_{ky}+iy$ $(b_{ky}+iy)$ относительно интервала l_{ky}.*

Доказательство. Предположим противное: существует множество e точек y оси Oy положительной внешней меры, для которых на сечении δ_y найдется интервал, например $L_{ky}=(a^0_{ky},b^0_{ky})$, такой, что для его конца, допустим a^0_{ky}, выполняется неравенство $|f(a^0_{ky}+iy+0)-f(a^0_{ky}+iy)|>\frac{1}{n}$, где n — некоторое натуральное число. Считаем также, что для точек z интервала (a^0_{ky},c^0_{ky}), содержащегося в (a^0_{ky},b^0_{ky}), длины не меньше чем $\frac{1}{n}$, справедливо неравенство $|f(z)-f(a^0_{ky}+iy)|>\frac{1}{n}$. Поэтому существуют натуральное число n_0 и множество e_0 $(e_0\subset e)$ положительной внешней меры такие, что для $y\in e_0$ и $z\in(a^0_{ky},c^0_{ky})$ выполняется неравенство

$$|f(z)-f(a^0_{ky}+iy)|>\frac{1}{n_0}. \tag{8}$$

Разобьем прямоугольник δ прямыми параллельными осям координат на равные прямоугольники $\{\delta_i\}$ следующим образом:

1. Для произвольных точек $z_1,z_2\in\beta_0$ таких, что $\rho(z_1,z_2)<\operatorname{diam}\delta_i$, выполняется условие
$$|f(z_1)-f(z_2)|<\frac{1}{100n_0}. \tag{9}$$
2. Существует прямоугольник δ_i (замыкание его обозначим через δ_0) такой, что внешняя мера проекции на ось Oy множества точек $a^0_{ky}+iy$, $y\in e_0$, содержащихся в прямоугольнике δ_0, положительна. Сохраним для последней обозначение e_0; $\mathrm{m}^*e_0>0$.
3. Для прямоугольника δ_0 найдется во множестве $\{\delta_i\}$ прямоугольник, например δ_1, соприкасаюшийся с прямоугольником δ_0 по вертикальной стороне, лежащий справа от прямоугольника δ_0.
4. $\operatorname{diam}(\delta_0\cup\delta_1)<\frac{1}{n_0}$.

Пусть достаточно малое число $\varepsilon>0$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon<\frac{a}{40}\pi\alpha^2$. Число α определено ниже, в формуле (16).

Проекцию множества δ_0 на ось Oy обозначим через $[a,b]$; $e_0 \subset [a,b]$. Поскольку для почти всех точек y_0 множества e_0 справедливо неравенство

$$\lim_{r\to 0} \frac{m^*\big(e_0 \cap C(y_0,r)\big)}{2r} = 1,$$

то для каждой такой точки y_0 существует такое число r_0, что при $r < r_0$ выполняется неравенство

$$\frac{\mathrm{m}^*\big(e_0 \cap C(y_0,r)\big)}{2r} \geq 1-\varepsilon, \tag{10}$$

где $C(y_0,r) = \{y : |y-y_0| < r\}$. В силу неравенства (10) можем полагать, что $C(y_0,r_0) \subset [a,b]$.

Пусть e_1 — замыкание множества тех точек y_0, для которых (10) выполняется при $r < r_0$. Нетрудно видеть, что неравенство (10) справедливо для всех точек множества e_1. Очевидно, $\bar{e}_0 \supset \bar{\mathcal{E}}_1$. Предположим, что число r_0 настолько мало, что справедливо неравенство

$$\mathrm{m}^*(e_0 \setminus e_1) < \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{m}^* e_0. \tag{11}$$

Каждой точке y множества $e_0 \cap e_1$ соответствует точка $a^0_{ky} + iy$. Обозначим через E_1 замыкание совокупности точек $\{a^0_{ky} + iy\}$, где $y \in e_0 \cap e_1$. Проекция множества E_1 на ось Oy совпадает с множеством e_1.

Пусть η такое, что $b - \eta > \frac{1}{2}$. Согласно определению множеств $E(z)$ для каждой точки z_0 найдется число r_1 такое, что

$$|f(z') - f(z_0)| \leq \frac{1}{100n_0} \quad \text{для} \quad z' \in E(z_0) \cap C(z_0,r) \tag{12}$$

и $\frac{1}{\pi\bar{r}^2}\mathrm{m}\big(E(z_0) \cap C(z_0,r)\big) \geq b - \eta$, где $r < r_1$, $C(z_0,r) = \{z : |z-z_0| < r\}$.

Обозначим через E_2 множество тех точек z_0 множества E_1 для которых неравенства (12) верны для $r < r_1$ (предположим еще, что $r_1 < \frac{1}{2}\operatorname{diam}\delta_0$). Пусть $\bar{z}$ — предельная точка множества E_2; очевидно, $\bar{z} \in E_1$, $\bar{z} \in \beta_0$. Согласно условию (9) неравенство $|f(z') - f(\bar{z})| > \frac{1}{100n_0}$ может выполняться лишь в случае $\bar{z}' \in \mathcal{H} \cap C(\bar{z},r)$. Поэтому найдется множество $E'(\bar{z})$ такое, что для точки $\bar{z}$ и точек множества $E'(\bar{z}) \cap C(\bar{z},r)$ выполняются неравенства (12), если в них вместо множества $E(z_0)$ положить множество $E'(\bar{z})$. Действительно, в противном случае в замкнутое, меры большей чем $\pi r^2 - (b-\eta)\pi r^2$, подмножесто множества $CE'(\bar{z}) \cap C(\bar{z},r)$ $(CE'(\bar{z}) \cap C(\bar{z},r) \subset \mathcal{H})$ попадали бы точки z'_n множеств $E(z_n) \cap C(z_n,r)$, где $z_n \in E_2$, $z_n \to \bar{z}$, для которых $|f(z'_n) - f(z_n)| \leq \frac{1}{100n_0}$. Так как в силу ограниченности последовательности z'_n можем считать ее сходящейся, пусть $z_n \to \tilde{z}$, и $\tilde{z} \in CE'(\bar{z}) \cap C(\bar{z},r) \subset \mathcal{H}$, то $|f(\tilde{z}) - f(\bar{z})| \leq \frac{1}{100n_0}$. Последнее противоречит определению множества $E'(\bar{z})$. Следовательно, на множестве $\overline{E}_2$ неравенства (12) выполняются: для точек z множества E_2 для множеств $E(z)$, для точек z множества $\overline{E}_2 \setminus E_2$ для множеств $E'(z)$. В дальнейшем для точек $z \in \overline{E}_2 \setminus E_2$ вместо множества $E(z)$ используем множество $E'(z)$. Сохраним для множества $\overline{E}_2$ обозначение E_2; $E_2 \subset E_1$.

Пусть число r_1 настолько мало, что для множества e_2 — проекции множества E_2 на ось Oy — справедливо неравенство

$$\mathrm{m}(e_1 \setminus e_2) < \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{m}^* e_0. \tag{13}$$

Обозначим через $\tilde{e}$ объединение множеств $e_0 \setminus e_1$, $e_1 \setminus e_2$. Очевидно, $\bar{e}_0 \supset e_2 \cap \tilde{e}$. Из условий (11), (13) получаем неравенство

$$\mathrm{m}^* \tilde{e} < \varepsilon \mathrm{m}^* e_0. \tag{14}$$

Из второго неравенства (12) вытекает следующее условие

$$\frac{\mathrm{m}\big(E(z_0) \cap \tilde{C}(z_0, r)\big)}{\pi r^2} > a, \tag{15}$$

где $r < r_1$, $a = b - \eta - \frac{1}{2} > 0$, $\tilde{C}(z_0, r)$ — любой полукруг круга $C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$. Неравенство (15) получается таким образом: для $r < r_1$ верно условие $\mathrm{m}\big(E(z_0) \cap C(z_0, r)\big) > (b - \eta)\pi r^2$ и, следовательно, $\mathrm{m}\big(E(z_0) \cap C(z_0, r)\big) > a\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$. Так как для любого полукруга $\tilde{C}(z_0, r)$ справедливо неравенство $\mathrm{m}\big(E(z_0) \cap \tilde{C}(z_0, r)\big) < \frac{1}{2}\pi r^2$, а множество $E(z_0) \cap C(z_0, r)$ состоит из двух таких полукругов, то имеет место (15).

Сделаем некоторые замечания относительно радиуса r_1. Пусть окружность, ограничивающая круг $C(z_1, \bar{r}) = \{z : |z - z_1| < \bar{r}\}$, проходит через точку z_0, $r_1 < \bar{r}$. Обозначим через $K(z_0, r, \bar{r}) = C(z_0, r) \cap C(z_1, \bar{r})$, $r < r_1$. Для круга $C(z_0, r)$ выполняются условия (12), (15). Касательная к кругу $C(z_1, \bar{r})$ проходящая через точку z_0, делит круг $C(z_0, r)$ на два полукруга. Полукруг $\tilde{C}(z_0, r)$ — тот из них, который содержит множество $K(z_0, r, \bar{r})$. Предположим, что r настолько мало, что $K(z_0, r, \bar{r})$ составляет значительную часть полукруга $\tilde{C}(z_0, r)$ и в силу (15) справедливо неравенство $\mathrm{m}\big(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0)\big) > \frac{a}{2}\pi r^2$. Используя последнее равенство, получим

$$\frac{\mathrm{m}\big(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0)\big)}{\pi \bar{r}^2} = \frac{\mathrm{m}\big(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0)\big)}{\pi r^2} \frac{\pi r^2}{\pi \bar{r}^2} > \frac{a}{2}\Big(\frac{r}{\bar{r}}\Big)^2 = \frac{a}{2}\alpha^2, \tag{16}$$

где $\alpha = \frac{r}{\bar{r}}$. Выберем два радиуса: радиус $r < r_0$ и радиус $r' < r_1$ такие, что $r < \frac{1}{2}\operatorname{diam}\delta_0$ и

$$\frac{r'}{r} = \alpha. \tag{17}$$

Для каждого числа $y_0 \in e_2$ вдоль прямой $y = y_0$ перемещаем замкнутый круг $C(x + iy_0, r)$ из прямоугольника δ_1 в направлении прямоугольника δ_0 до касания с множеством E_2. Каждый круг $C(x + iy_0, r)$ проектируется на ось Oy в отрезок $[y_0 - r, y_0 + r]$. Совокупность таких отрезков при $y \in e_2$ покрывает множество e_2. Выделим следующим образом конечное число отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, где $y_k \in e_2$, $k = 1, 2, \ldots$, покрывающих множество e_2: за центр первого отрезка $[y_1 - r, y_1 + r]$ примем число $\min_{y \in e_2} y$; для каждого $k > 1$ центр y_k подобран так, чтобы пересечение $[y_k - r, y_k + r] \cap [y_{k-1} - r, y_{k-1} + r]$ было минимальным. Выбранной последовательности отрезков $[y_k - r, y_k + r]$ соответствует последовательность кругов $C(x_k + iy_k, r)$, касающихся множества

E_2. Для всех точек y из множества $e_0 \setminus \tilde{e} = e_2 \cap e_0$ точки $a^0_{ky} + iy$ лежат левее множества $\bigcup_k C(x_k + iy_k, r)$ и в силу свойства 4 прямоугольников $\{\delta_i\}$ отрезки $[a^0_{ky}, c^0_{ky}]$ пересекают множество $\bigcup_k C(x_k + iy_k, r)$. Разобьем выбранную систему отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, где $k = 1, 2, \dots$, на две системы непересекаюшихся отрезков: систему отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, где k — четное число, и систему отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, где k – нечетное число. Одна из этих систем покрывает, допустим, часть e_2' множества e_2, вторая — часть e_2'' множества e_2. Множества e_2', e_2'' замкнутые. Так как $e_0 \supset e_2 \cup \tilde{e}$, то $\mathrm{m}^* e_0 \le \mathrm{m}^*(e_2 \cup \tilde{e}) \le \mathrm{m} e_2' + \mathrm{m} e_2'' + \mathrm{m}^* \tilde{e}$, и в силу условия (14) выполняется неравенство $(1 - \varepsilon)\mathrm{m}^* e_0 < \mathrm{m} e_2' + \mathrm{m} e_2''$. Полагая, что $\varepsilon < \frac{1}{2}$, получим $\frac{1}{2}\mathrm{m}^* e_0 < \mathrm{m} e_2' + \mathrm{m} e_2''$. Пусть e_2' — та часть множества e_2, для которой справедливо неравенство

$$\mathrm{m} e_2' > \frac{1}{4} m^* e_0 \tag{18}$$

и пусть заново перенумерованная система непересекающихся отрезков $[y_k - r, y_k + r]$ — та из двух выше определенных систем отрезков, которая покрывает множество e_2'. Убедимся, что среди отрезков $[y_k - r, y_k + r]$ найдется отрезок $[y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]$, для которого выполняется неравенство

$$\mathrm{m}^*\bigl(\tilde{e} \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\bigr) < 4\varepsilon \mathrm{m}(e_2 \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]). \tag{19}$$

Действительно, предположим противное: для каждого k справедливо неравенство

$$\mathrm{m}^*\bigl(\tilde{e} \cap [y_k - r, y_k + r]\bigr) \ge 4\varepsilon \mathrm{m}\bigl(e_2 \cap [y_k - r, y_k + r]\bigr)$$

и, следовательно, неравенство

$$\mathrm{m}^* \bigcup_k \bigl(\tilde{e} \cap [y_k - r, y_k + r]\bigr) \ge 4\varepsilon \mathrm{m} \bigcup_k \bigl(e_2 \cap [y_k - r, y_k + r]\bigr) = 4\varepsilon \mathrm{m} e_2'.$$

Поэтому, учитывая (18), приходим к неравенству $\mathrm{m}^* \tilde{e} \varepsilon > \mathrm{m}^* e_0$, противоречащему (14).

Преобразуем неравенство (19) таким образом

$$\mathrm{m}^*\bigl(\tilde{e} \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\bigr) < 4\varepsilon \mathrm{m}[y_{k_0} - r, y_{k_0} + r] = 8\varepsilon r. \tag{20}$$

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ точки касания круга $C(x_{k_0} + iy_{k_0}, r)$ с множеством E_2. Рассмотрим круг $C(z_0, r')$. Радиусы r', r выбраны выше, и их отношение удовлетворяет равенству (17).

Для множества $K(z_0, r', r) = C(x_{k_0} + iy_{k_0}, r) \cap C(z_0, r')$ справедливо неравенство (16), т.е. $\mathrm{m}\bigl(K(z_0, r', r) \cap E(z_0)\bigr) > \frac{a}{2}\alpha^2 \pi r^2$. Из последнего неравенства вытекает, что найдется такое замкнутое множество $\mathcal{P}(z_0, r', r)$, содержащееся в $K(z_0, r', r) \cap E(z_0)$, что справедливо неравенство

$$\mathrm{m}\mathcal{P}(z_0, r', r) > \frac{a}{2}\alpha^2 \pi r^2. \tag{21}$$

Проекцию множества $\mathcal{P}(z_0, r', r)$ на ось Oy обозначим через $\hat{e}$. Множество $\hat{e}$ замкнутое. На каждом сечении множества $K(z_0, r', r) \cap E(z_0)$ прямой $y = y'$,

$y' \in \hat{e}$, очевидно, найдется точка z', для которой справедливо первое неравенство (12). Так как имеет место включение

$$e_0 \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r] \subset \big((e_0 \cap e_2) \cup (\tilde{e} \cap e_0)\big) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r],$$

то согласно (10) и (20) приходим к неравенству

$$(1-\varepsilon)2r \leq \mathrm{m}^*(e_0 \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]) \leq \mathrm{m}^*((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]) + \\ + m^*(\tilde{e} \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]) < m^*((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]) + 8\varepsilon r.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$\mathrm{m}^*\big((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\big) > 2r - 10\varepsilon r. \tag{22}$$

Напомним, что на прямых $y = y'$, $y' \in (e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]$, левее круга $C(x_{k_0} + iy_{k_0}, r)$ найдется точка $a^0_{ky'} + iy'$; $a^0_{ky'} + iy' \in \beta_0$. Для всех точек z каждого сечения круга $C(x_{k_0} + iy_{k_0}, r)$ прямой $y = y'$ согласно (8), так как для точек $a^0_{ky'} + iy'$, z_0 выполняется (9), получаем неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| > \frac{99}{100n_0}. \tag{23}$$

Множества $\hat{e}$ и $(e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]$ не имеют общих точек, следовательно, верно условие $\mathrm{m}^*\big((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\big) + \mathrm{m}_*\hat{e} < 2r$. Так как справедливо неравенство (22), то получаем

$$\mathrm{m}_*\hat{e} = \mathrm{m}\hat{e} < 10\varepsilon r. \tag{25}$$

Согласно (21), (25) выполняются неравенства

$$\frac{a}{2}\alpha^2\pi r^2 < \mathrm{m}\mathcal{P}(z_0, r', r) \leq \mathrm{m}\big(\hat{e} \times [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\big) < 10\varepsilon \cdot r \cdot 2r = 20\varepsilon r^2.$$

Следовательно, $\varepsilon > \frac{a}{40}\pi\alpha^2$. Последнее неравенство противоречит выбору ε. Предложение 1 доказано.

Завершим доказательство леммы 2. Из непрерывности функции f на множестве β_0, предложения, условия (7) вытекает непрерывность функции f на почти всех сечениях δ_y. Так как непрерывная на сечении δ_y функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве β_0 и условию (7), то она абсолютно непрерывна на интервале δ_y (см., например [5], теорема V, стр. 206). Лемма 2 доказана.

Через $u(x,y)$, $v(x,y)$ обозначено действительную и мнимую часть функции f ($f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$), $z = x + iy$. Поскольку функция f голоморфна на множестве $\mathcal{H}$ и удовлетворяет условию Липшица на множестве β_0, то функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ измеримы в прямоугольнике δ. Нетрудно убедиться также, что функции $\underline{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\overline{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ измеримы в прямоугольнике δ. Поэтому множество $\{(x,y) : \big(\overline{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \underline{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\big) > 0\}$ измеримо и в силу леммы 2 имеет меру нуль. Следовательно, конечная частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ существует почти всюду в прямоугольнике δ. Аналогичное утверждение справедливо относительно производных $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Убедимся, что для частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ почти всюду в прямоугольнике δ выполняются условия Коши-Римана. Достаточно доказать, что условия Коши-Римана имеют место почти всюду на множестве β_0, если мера множества β_0 положительна.

Предположим, что $\mathrm{m}\beta_0 > 0$. Так как почти все точки множества β_0 — точки плотности, и функция f на множестве β_0 удовлетворяет условию Липшица, то почти во всех точках множества β_0 существуют дифференциалы функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ относительно множества β_0 и совпадают с аппроксимативными дифференциалами функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в этих точках.

Пусть $z = x + iy$ точка плотности множества β_0, $z + \Delta z \in \beta_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Справедливо равенство

$$\Delta f = (A + iC)\Delta x + (B + iD)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad (\Delta z \to 0). \tag{26}$$

Почти во всех точках множества β_0 (см. [6]) числа A, B, C, D совпадают с аппроксимативными частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Так как функция f в прямоугольнике δ почти всюду имеет частные производные, то числа A, B, C, D почти всюду на множестве β_0 совпадают с обыкновенными частными производными. Полагаем, что в точке $z = x + iy$ частные производные существуют.

Преобразуем равенство (26)

$$\Delta f = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\frac{\Delta z + \Delta \bar z}{2} + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\frac{\Delta z - \Delta \bar z}{2i} + o(|\Delta z|),$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + i\Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]\Delta z + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + i\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]\Delta \bar z + o(|\Delta z|),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z + f_{\bar z}e^{-2i\alpha} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}, \tag{27}$$

где через f_z, $f_{\bar z}$ обозначены коэффициенты при Δz, $\Delta \bar z$ соответственно, $\alpha = \arg \Delta z$. В рассматриваемой точке z, согласно условию 1) теоремы, функция f обладает конечной производной относительно множества $\mathcal{E}(z)$. В силу определения множества $\mathcal{E}(z)$ найдутся две последовательности точек $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$, $\{z_n\} \cup \{z'_n\} \subset \beta_0 \cap \mathcal{E}(z)$, сходящиеся к точке z, такие, что $\Delta z_n = z_n - z = |z_n - z|e^{i\alpha_n}$, $\alpha_n \to \alpha_1$, $\Delta z'_n = z'_n - z = |z'_n - z|e^{i\alpha'_n}$, $\alpha'_n \to \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_2 \neq \pi$. Поскольку $\lim_{z_n \to z} \frac{\Delta f}{\Delta z_n} = \lim_{z'_n \to z} \frac{\Delta f}{\Delta z'_n}$, то справедливо равенство $f_z + f_{\bar z}e^{-2i\alpha_1} = f_z + f_{\bar z}e^{-2i\alpha_2}$. Полученное равенство возможно лишь при $f_{\bar z} = 0$, т.е. в точке z выполняются условия Коши-Римана.

Доказательство теоремы. Измеримые функции u, v, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, так как функция f ограничена в прямоугольнике δ, на β_0 удовлетворяет условию Липшица и справедливо (6), суммируемы в прямоугольнике δ. Пусть R прямоугольник, $R \subset \delta$, ограниченный контуром C, стороны которого лежат на тех сечения δ_x, δ_y прямоугольника δ, параллельных осям координат, на которых функция f абсолютно непрерывна. Для прямоугольника R, контура C справедливо равенство (5). Поскольку почти всюду в прямоугольнике δ функция f удовлетворяет условиям Коши-Римана, то $\int_C f(z)\,dz = 0$.

Пусть P — множество, состоящее из точек $z = x + iy$ прямоугольника δ, лежащих на сечениях δ_x, δ_y, на которых функция f абсолютно непрерывна; очевидно, $\mathrm{m}P = \mathrm{m}\delta$. Пусть $z_0 \in P$. Для точек $z \in P$ можно определить функцию $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$, где интеграл берется вдоль ломаной, звенья которой принадлежат тем сечениям δ_x, δ_y прямоугольника δ, на которых функция f абсолютно непрерывна. Так как функция f ограничена, то функция F удовлетворяет условию Липшица на множестве P. Нетрудно видеть, что функция $F\colon P \to C$ непрерывно продолжается на прямоугольник δ, и полученная функция, например F^*, удовлетворяет на множестве δ условию Липшица. Поскольку легко убедиться, что в каждой точке z множества P функция F^* имеет вдоль осей Ox и Oy производные равные $f(z)$, то, как и выше получим $\int_C F^*(z)\,dz = 0$, где C — произвольный прямоугольный контур со сторонами, параллельными осям координат. Следовательно, функция F^* голоморфна в прямоугольнике δ. Пусть $(F^*)'(z) = f^*(z)$; для $z \in P$ выполняется равенство $f^*(z) = f(z)$. Так как функция f^* голоморфна в прямоугольнике δ, функция f обладает в каждой точке z прямоугольника δ производной относительно множества $\mathcal{E}(z)$ (требование 1) формулировки теоремы), то функция f^* совпадает с функцией f в прямоугольнике δ. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меньшов Д.Е. *Об асимптотической моногенности* Матем. сб. – 1936. – Т.1, 2. – С.189–210.
2. Бродович М.Т. *Голоморфность произвольного аппроксимативно голоморфного отображения плоской области в плоскость* Сиб. матем. ж. – 1993. – Т.34, 3. – С.19–26.
3. Теляковский Д.С. *Об асимптотически моногенных ограниченных функциях* Матем. сб. – 1986. – Т.129, 3. – С.434–439.
4. Теляковский Д.С. *Обобщенные теоремы Д.Е.Меньшова об асимптотически моногенных функциях* Вестн. МГУ, Сер.1. – 1992. – 4. – С.68-71.
5. Трохимчук Ю.Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963.
6. Сакс С. Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.

Державний університет "Львівська політехніка"

Получено 21.04.97