УДК 515.11

РАЗЛОЖИМОСТЬ ГРУПП

И.В. Протасов

I. Protasov. *Resolvability of groups*, Matematychni Studii, **9**(1998) 130–148.

This article contains most of the recent results on resolvability of groups with the scetches or hints to the proofs.

Топологическое пространство называется разложимым, если его можно разбить на два плотных подмножества. Начало исследованиям топологических пространств с точки зрения их разложимости или неразложимости положил Хьюитт [1] еще в 1943 г. Систематическое изучение топологических групп с этой точки зрения началось совсем недавно, но развивается довольно интенсивно. В 1994 г. Комфорт и ван Милл [2] доказали разложимость любой недискретной абелевой группы с конечным числом элементов порядка 2, а также поставили ряд нерешенных проблем. Как выяснилось впоследствии, особенно плодотворным оказалось понятие абсолютной разложимости, лишь вскользь определенное в конце статьи [2]. Подмножество D группы G называется абсолютно плотным, если D плотно в любой недискретной групповой топологии на G. Благодаря этому понятию проблематика разложимости групп, помимо тополого-алгебраической, приобрела нетривиальною комбинаторную окраску. Одна из основных задач статьи — обосновать этот тезис. Именно с этой целью большинство изложенных результатов снабжено комбинаторными фрагментами их доказательств.

Начнем с самых необходимых определений и соглашений. Все рассматриваемые топологии на группах предполагаються хаусдорфовыми и групповыми. Термин разложимость уточняют следующие определения, в которых k — фиксированный кардинал.

Топологическая группа называется *k-разложимой*, если ее можно разбить на k плотных подмножеств.

Группа называется *сильно k-разложимой*, если она k-разложима в любой недискретной топологии.

Группа называется *абсолютно k-разложимой*, если ее можно разбить на k абсолютно плотных множества.

Условимся опускать кардинал k, если $k = 2$.

Дисперсионный характер $\Delta(G)$ топологической группы G — это минимум кардиналов $\operatorname{card} U$ по всем окрестностям U единицы группы. Если топологическая группа G k-разложима, то $k \le \Delta(G)$. При этом $\Delta(G)$-разложимая группа G называется *максимально разложимой.*

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22A05.

Работа частично финансирована грантом INTAS-94-3420.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное семейство подмножеств группы G. Подмножество $D \subset G$ назовем $\mathfrak{A}$-*плотным*, если $gU \cap D \neq \varnothing$ для всех $g \in G$, $U \in \mathfrak{A}$. Плотное подмножество топологической группы и абсолютно плотное подмножество группы являются $\mathfrak{A}$-плотными при очевидном выборе семейства подмножеств $\mathfrak{A}$. Однако, понятие $\mathfrak{A}$-плотности и, соответственно, $\mathfrak{A}$-разложимости оказывается продуктивным и для нетопологических семейств подмножеств $\mathfrak{A}$. В качестве примера сошлемся на описание в [3] ассиметрично разложимых абелевых групп ($\mathfrak{A}$ — семейство всех бесконечных симметричных подмножеств группы).

§1. -

1. Теорема Комфорта-ван Милла [2] о сильной разложимости абелевой группы с конечным числом элементов порядка 2 получила дальнейшее развитие. В [4] доказана сильная $\aleph_0$-разложимость такой группы, а в [5] — абсолютная $\aleph_0$-разложимость счетной абелевой группы с конечным числом елементов порядка 2. Эти результаты обсуждаются в §4 и §8.

Перечислим с некоторыми комментариями проблемы, поставленные Комфортом и ван Миллом [2]. Далее *булевой* называется любая группа експоненты 2. Разумеется, все булевы группы абелевы.

1.1. Верно ли, что недискретная неразложимая абелева группа содержит открытую булеву подгруппу? Вопрос решен [6]: такая группа содержит счетную открытую булеву подгруппу (см. §4).

1.2. Верно ли, что произвольная недискретная неразложимая группа содержит бесконечную булеву подгруппу? Вопрос открыт. Заметим, что утверждать существование бесконечной инвариантной булевой подгруппы нельзя (см. §6).

Среди топологических просранств с экстремальными свойствами, помимо неразложимых, важное место занимают экстремально несвязные пространства. Топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если замыкание любого открытого множества открыто. Как и неразложимость, экстремальная несвязность — довольно жесткое ограничение на алгебраическое строение группы. В.И. Малыхин заметил [7], что недискретная экстремально несвязная группа содержит открытую булеву подгруппу. Первый пример недискретной экстремально несвязной топологии на счетной булевой группе построил, используя континуум-гипотезу, С. Сирота [8]. Группа Сироты разложима. В [7] В.И. Малыхин построил с помощью аксиомы Мартина топологию на счетной булевой группе, в которой сходится к единице лишь один свободный ультрафильтр. Группа Малыхина неразложима и экстремально несвязна. Как показано в [9], построить наивно (т.е. без дополнительных к системе аксиом ZFC теоретико-множественных предположений) группу, в которой сходится к единице лишь один свободный ультрафильтр, нельзя.

1.3. Построить наивно недискретную неразложимую группу. Эта проблема открыта[1], как открыта и старая проблема А.В. Архангельского о наивном примере недискретной экстремально несвязной группы.

В связи с проблемой 1.3, отметим следующую задачу В.И. Малыхина. Построить наивный пример недискретного регулярного однородного неразложи-

[1] Автор доказал, что существование недискретной неразложимой абелевой группы не зависит от ZFC. (И.В. Протасов. *Неразложимые топологии на группах* Укр. матем. ж. – 1998. – Т.50, №10).

мого пространства.[2] Наивные примеры недискретных регулярных экстремально несвязных однородных пространств (и даже правотопологических групп) известны [9].

1.4. Пусть группа G содержит бесконечную булеву подгруппу. Верно ли, то G допускает недискретную неразложимую топологию? Вопрос решен. В [6,10] доказано, что любую группу можно вложить в абсолютно k-разложимую группу для любого кардинала k (см. §2).

1.5. Пусть группа G содержит бесконечную булеву подгруппу. Верно ли, что G допускает недискретную экстремально несвязную топологию? Отрицательный ответ получен в [11] (см. §2).

1.6. Верно ли, что неразложимая группа экстремально несвязна? В предположении аксиомы Мартина отрицательный ответ получен в [11] (см. §7).

1.7. Пусть топологическая группа G содержит два непересекающихся подмножества, которые касаются единицы. Верно ли, что группа G разложима? По определению подмножество A топологического пространства касается точки x, если $x \in \mathrm{cl}\, A \setminus A$, где $\mathrm{cl}\, A$ — замыкание подмножества A. В предположении аксиомы Мартина отрицательный ответ получен в [11] (см. §7).

1.8. Охарактеризовать алгебраически абсолютно разложимые группы. Вся информация о состоянии проблемы, которой располагает автор, содержится в этом обзоре.

§2.

Изложим метод разложения групп по системам образующих, предложеный в [6] и усовершенствованный в [10].

Пусть G — группа с единицей e, S — некоторая система ее образующих. Положим $l(e) = 0$ и для каждого элемента $g \in G$, $g \neq e$, обозначим через $l(g)$ длину кратчайшей записи элемента g в виде произведения элементов из $S \cup S^{-1}$.

Для элемента $g \in G$, $g \neq e$, рассмотрим двоичное разложение натурального числа $l(g)$

$$l(g) = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i, \qquad a_i \in \{0,1\},\ a_n \neq 0,$$

и положим $\varrho(g) = n$. Для каждой пары целых чисел k, n, $0 \leq k < n$, определим следующее подмножество группы G

$$D(k,n) = \big\{ g \in G : \varrho(g) \equiv k (\mathrm{mod}\, n) \big\}.$$

Заметим, что семейство подмножеств $\{D(2^n, 2^{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ дизъюнктно. Поэтому, если каждое из этих подмножеств абсолютно плотно, то группа G абсолютно $\aleph_0$-разложима.

Элемент $h \in G$, $h \neq e$, называется регулярным, если $l(h^m) = m l(h)$ для любого натурального числа m.

2.1. Лемма. *Пусть на группе G задана некоторая топология, причем, в произвольной окрестности единицы имеется регулярный елемент. Тогда подмножества $D(k,n)$ плотны в этой топологии для любых k, n.*

---

[2] Такой пример автором построен (И.В. Протасов. *Максимальные топологии на группах* Сиб. матем. ж. – 1998. – Т.39).

2.2. Теорема. *Свободная абелева группа G произвольного ранга абсолютно $\aleph_0$-разложима.*

Для доказательства теоремы достаточно взять в качестве S систему свободных образующих группы G и применить лемму 2.1.

Отметим, что увеличить показатель абсолютной разложимости в теореме 2.2 нельзя, поскольку на бесконечной абелевой группе имеются топологии счетного дисперсионного характера.

2.3. Теорема. *Группа G, изоморфная свободному произведению неединичных групп G_1, G_2, абсолютно $\operatorname{card} G$-разложима. В частности, свободная группа G произвольного ранга абсолютно $\operatorname{card} G$-разложима.*

Пусть $G = G_1 * G_2$, e_1, e_2 — единицы групп G_1, G_2, $S = (G_1 \cup G_2) \setminus \{e_1, e_2\}$. Каждый неединичный элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде $g = g_1 g_2 \dots g_n$, $g_i \in S$, причем, соседние элементы g_i, g_{i+1} принадлежат различным сомножителям свободного произведения. Положим $\varepsilon(g) = g_n$.

При доказательстве теоремы 2 из [6] установлено, что в любой окрестности единицы недискретной топологии на группе G имеется регулярный элемент. Поэтому, если группы G_1, G_2 конечны, то теорема 2.3 вытекает из леммы 2.1. Если же хотя бы одна из групп G_1, G_2 бесконечна, то считаем $\operatorname{card} G_2 \geq \operatorname{card} G_1$ и, следовательно, $\operatorname{card} G = \operatorname{card} G_2$. В этом случае теорема 2.3 следует из абсолютной плотности подмножеств $D_h = \{g \in G : \varepsilon(g) = h\}$, $h \in G_2 \setminus \{e_2\}$.

2.4. Следствие. *Произвольная группа G вложима в абсолютно k-разложимую группу для любого кардинала k.*

Отметим также, что свободное произведение $B * \mathbb{Z}$ счетной булевой группы и группы целых чисел не допускает недискретных экстремально несвязных топологий и является контрпримером к вопросу 1.5.

§3.

Дадим набросок доказательства следующей теоремы из [12].

3.1. Теорема. *Группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$ абсолютно разложима.*

Первый фрагмент доказательства комбинаторный. Пусть X — конечное множество, f — отображение множества X в себя. Рассмотрим ориентированный граф $\operatorname{Gr}(X, f)$, вершинами которого являются точки множества X, а упорядоченная пара точек (x, y) является ориентированным ребром, если $f(x) = y$. Достаточно очевидны следующие свойства графа $\operatorname{Gr}(X, f)$.

Каждый цикл графа ориентированный. Любая связная компонента графа имеет единственный ориентированный цикл (петля считается ориентированным циклом длины 1). Если из связной компоненты удалить ребра ориентированного цикла, то она распадется на деревья.

Правильным назовем раскрашивание множества вершин графа $\operatorname{Gr}(X, f)$ в два цвета со следующими свойствами.

Если ориентированный цикл имеет четную длину, то любые его соседние вершины разноцветны.

Если ориентированный цикл имеет нечетную длину > 1, то то в нем имеется лишь одна пара соседних одноцветных вершин.

Если точка x не принадлежит ориентированному циклу, то точки x и $f(x)$ разноцветны.

Существование правильного раскрашивания любого графа $\operatorname{Gr}(X, f)$ легко следует из перечисленных выше его особенностей.

Для конечной абелевой группы G и отображения $f(x) = 2x$ рассмотрим граф $\mathrm{Gr}(X, f)$. Заметим, что точка $g \in G$ принадлежит ориетированному циклу длины > 1 тогда и только тогда, когда порядок элемента g — нечетное число. Доказательством следующей леммы служит существование правильного раскрашивания графа.

3.2. Лемма. *Любую конечную абелеву группу G можно раскрасить в два цвета так, чтобы для любого элемента $g \in G$, $g \neq 0$, выполнялись следующие условия:*

1) *если порядок элемента g четен, то элементы g и $2g$ разноцветны;*
2) *если порядок элемента g нечетен, то среди элементов g, $2g$, $4g$ имеется пара разноцветных.*

Для каждого натурального n зафиксируем раскрашивание циклической группы $\mathbb{Z}(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в желтый и голубой цвета, которое удовлетворяет условиям леммы 3.2.

Второй, числовой, фрагмент доказательства основан на дигитизации группы $\mathbb{Q}$ из статьи [13]. Каждое рациональное число q однозначно представимо в виде

$$\cdots + d_{-s}\frac{(-1)^s}{(s+1)!} + d_{-s+1}\frac{(-1)^{s+1}}{s!} + \cdots + d_{-1}\frac{(-1)}{2!} + d_0 + d_1(-1)2! + \cdots + d_r(-1)^r(r+1)! + \ldots,$$

где $0 \leq d_{-s} \leq s$ для всех $s > 0$, $0 \leq d_r \leq r+1$ для всех $r \geq 0$, причем $d_r = d_{-s} = 0$ для всех r, s кроме конечного их числа.

Таким образом, каждому рациональному числу $q \neq 0$ однозначно сопоставляется код $c(q) = (d_k, d_{k+1}, \ldots, d_{m-1}, d_m)$, где $\{k, k+1, \ldots, m-1, m\}$ — отрезок множества целых чисел, $d_k \neq 0$, $d_m \neq 0$, $0 \leq d_i \leq |i|$ для всех $i < 0$, $0 \leq d_i \leq i+1$ для всех $i \geq 0$.

Используя хроматическую терминологию, предъявим такое раскрашивание группы $\mathbb{Q}$ в желтый и голубой цвета, что подмножества всех одноцветных точек абсолютно плотны.

Для определенности окрасим 0 в желтый цвет. Рациональное число с кодом $c(q) = (d_k, \ldots, d_m)$ окрасим в желтый или голубой цвет согласно следующим правилам:

1) если $|k| \leq m$, то цвет числа q определяется его знаком: желтый при $q > 0$ и голубой при $q < 0$;
2) если $|k| > 0$, то цвет числа q совпадает с цветом d_k как элемента циклической группы $\mathbb{Z}(|k|+1)$.

Разумеется, указанное разбиение группы $\mathbb{Q}$ индуцирует разбиение любой ее подгруппы на абсолютно плотные подмножества. Однако, для некоторых подгрупп группы $\mathbb{Q}$ можно указать существенно более простые разбиения. В качестве примера для каждого натурального числа $m > 1$ построим соответствующее разбиение группы m-ичных дробей:

$$\mathbb{Q}_m = \left\{\frac{z}{m^n} : z, n \in \mathbb{Z}, n > 0\right\}.$$

Каждое положительное число $a \in \mathbb{Q}_m$ однозначно представимо в виде

$$a = \sum\{\alpha_i m^i : i \in \mathbb{Z}\}, \qquad \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\},$$

причем множество $\varphi(a) = \{i \in \mathbb{Z} : \alpha_i \neq 0\}$ конечно и непусто. Введем следующие обозначения: $\lambda(a) = \min \varphi(a)$, $\varrho(a) = \max \varphi(a)$, $\nu(a) = \max\bigl\{|\lambda(a)|, \varrho(a)\bigr\}$,

$$S_1 = \{a : \nu(a) \text{ — четное число, } a > 0\},$$

$$S_2 = \{a : \nu(a) \text{ — нечетное число, } a > 0\}.$$

В [6] доказано, что подмножества $S_1 \cup (-S_1)$, $S_2 \cup (-S_2)$ абсолютно плотны в группе $\mathbb{Q}_m$.

§4.

В этом параграфе изложены методы разбиения прямых произведений групп на $\mathfrak{A}$ — плотные подмножества для некоторых достаточно общих семейств подмножеств $\mathfrak{A}$, предложенные в статьях [4, 6].

Пусть γ — бесконечный ординал, $\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — семейство групп, $\operatorname{card} G_\alpha > 1$, e_α — единица группы G_α. Множество ординалов $\{\alpha : \alpha < \gamma\}$ назовем множеством индексов данного семейства групп. Отличный от единицы e элемент g прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ однозначно записывается в виде $g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \dots g_{\alpha_n}$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $g_{\alpha_1} \neq e_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n} \neq e_{\alpha_n}$. Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{supp} g = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \quad l(g) = \alpha_1, \quad r(g) = \alpha_n.$$

Вполне упорядочение $<$ множества индексов порождает следующий частичный порядок $\lhd$ на множестве $G \setminus \{e\}$

$$g_1 \lhd g_2 \iff r(g_1) < l(g_2).$$

Пусть каждая группа семейства $\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ не имеет элементов порядка 2. Трансфинитной индукцией множество $G_\alpha \setminus \{e_\alpha\}$ легко разбить на два подмножества $G_\alpha^+, G_\alpha^{-1}$ так, что

$$\bigl(G_\alpha^+\bigr)^{-1} = G_\alpha^{-1}.$$

Для элемента $x \in G_\alpha \setminus \{e_\alpha\}$ положим

$$s(x) = \begin{cases} +\,, & \text{если } x \in G_\alpha^+; \\ -\,, & \text{если } x \in G_\alpha^-. \end{cases}$$

Такая градуировка сомножителей прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ позволяет каждому неединичному элементу $g = g_{\alpha_1} \dots g_{\alpha_n}$ группы G приписать последовательность знаков

$$s(g) = s(g_{\alpha_1}) s(g_{\alpha_2}) \dots s(g_{\alpha_n}).$$

Обозначим через $\nu(g)$ число перемен знаков в последовательности $s(g)$. Определим следующее свойство подмножеств группы G

$$\mathcal{D}(k, n) = \{g \in G : \nu(g) \equiv k (\operatorname{mod} n)\}, \quad 0 \leq k < n < \omega.$$

Заметим, что семейство подмножеств $\{\mathcal{D}(2^n, 2^{n+1}) : 0 < n < \omega\}$ дизъюнктно.

Пусть γ — предельный ординал. Семейство γ подмножеств группы назовем конфинальным, если для любых ординала $\alpha < \gamma$ и подмножества $U \in \mathfrak{A}$ найдется такой элемент $g \in U$, что $\alpha < l(g)$.

Семейство $\mathfrak{A}$ бесконечных подмножеств произвольной бесконечной группы G назовем мультипликативным, если для любого подмножества $U \in \mathfrak{A}$ найдется такое подмножество $V \in \mathfrak{A}$, что

$$V = V^{-1}, \quad V \subset U, \quad VV \subset U.$$

Напомним, что подмножество D группы G называется $\mathfrak{A}$-плотным, если $gU \cap D \neq \varnothing$ для всех $s \in G$, $U \in \mathfrak{A}$.

4.1. Теорема. *Пусть γ — предельный ординал, $\mathfrak{A}$ — конфинальное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ групп без элементов порядка 2. Подмножества $D(k, n)$ $\mathfrak{A}$-плотны для всех $0 \leq k < n < \omega$.*

4.2. Следствие. *Пусть γ — предельный ординал, $\mathfrak{A}$ — конфинальное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ групп без элементов порядка 2. Существует счетное дизъюнктное семейство $\mathfrak{A}$-плотных подмножеств группы G.*

Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств группы $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ назовем финитарным, если для всякого конечного подмножества F множества индексов найдется такое подмножество $U \in \mathfrak{A}$, что $G[F] \cap U \in \mathfrak{A}$, где

$$G[F] = \{g \in G : \mathrm{pr}_\alpha\, g = e_\alpha \text{ для всех } \alpha \in F\}.$$

4.3. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — финитарное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \omega\}$ групп без элементов порядка 2. Подмножества $D(k, n)$ $\mathfrak{A}$-плотны для всех $0 \leq k < n < \omega$.*

В [4] построен пример, показывающий, что в условиях теоремы 4.3 ординал ω нельзя заменить произвольным предельным ординалом.

4.4. Теорема. *Пусть γ — произвольный бесконечный ординал, $\mathfrak{A}$ — финитарное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ групп без элементов порядка 2. Предположим, что $U \cap V \in \mathfrak{A}$ для любых $U, V \in \mathfrak{A}$. Существует счетное дизъюнктное семейство $\mathfrak{A}$-плотных подмножеств группы G.*

Укажем еще один метод построения $\mathfrak{A}$-плотных подмножеств прямых произведений групп.

Пусть $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — прямое произведение произвольного семейства неединичных групп. Для каждого неединичного элемента $g \in G$ обозначим через $n(g)$ номер старшего разряда в двоичном разложении натурального числа $\mathrm{card}\,\mathrm{supp}\, g$. Определим следующее семейство подмножеств группы G:

$$S(k, n) = \{g \in G : n(g) \equiv k (\mathrm{mod}\, n)\}, \quad 0 \leq k < n < \omega.$$

Заметим, что семейство подмножеств $\{S(2^n, 2^{n+1}) : n < \omega\}$ дизъюнктно.

4.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ произвольного семейства групп. Предположим, что μ — несчетный регулярный кардинал и $\mathrm{card}\, U \geq \mu$, $\mathrm{card}\, G_\alpha < \mu$ для всех $U \in \mathfrak{A}$, $\alpha < \gamma$. Подмножества $S(k, n)$ $\mathfrak{A}$-плотны для всех $0 \leq k < n < \omega$.*

Дальнейшие результаты этого параграфа доказываются на основе изложенных выше, роль $\mathfrak{A}$ исполняет семейство всех окрестностей единицы, всех (или некоторых) недискретных топологий на группе.

4.6. Теорема. *Любая бесконечная подгруппа прямого произведения счетного числа конечных групп без элементов порядка 2 абсолютно $\aleph_0$-разложима.*

4.7. Теорема. *Пусть γ — произвольный бесконечный ординал. Любая бесконечная подгруппа прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ конечных групп без элементов порядка 2 сильно $\aleph_0$-разложима.*

4.8. Вопрос. *Пусть γ — несчетный ординал, $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — прямое произведение конечных групп без элементов порядка 2. Верно ли, что группа G абсолютно разложима?*

4.9. Теорема. *Пусть $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — прямое произведение бесконечного семейства групп без элементов порядка 2. Если фактор-группа любой группы G_α по любой ее конечной инвариантной подгруппе сильно $\aleph_0$-разложима, то группа G сильно $\aleph_0$-разложима.*

Ограничение на фактор-группы сомножителей в этой теореме, возможно, излишне.

4.10. Вопрос. *Верно ли, что фактор-группа разложимой топологической группы по конечной инвариантной подгруппе разложима?*

4.11. Вопрос. *Верно ли, что фактор-группа абсолютно разложимой топологической группы по конечной инвариантной подгруппе абсолютно разложима?*

4.12. Теорема. *Бесконечная абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 сильно $\aleph_0$-разложима.*

4.13. Теорема. *Пусть H — подгруппа прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ произвольного семейства групп, μ — несчетный регулярный кардигал и $\operatorname{card} G_\alpha < \mu$ для всех $\alpha < \gamma$. Существует счетное дизъюнктное семейство подмножеств из H, плотных в любой топологии на H дисперсионного характера $\geq \mu$.*

4.14. Следствие. *Несчетную абелеву группу можно разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой топологии несчетного дисперсионнго характера.*

4.15. Теорема. *Недискретная неразложимая абелева группа содержит счетную открытую булеву подгруппу.*

4.16. Теорема. *Абелева группа с бесконечным числом элементов порядка 2 не является абсолютно разложимой.*

Доказательство этой теоремы проводится комбинаторными рассуждениями, представляющими самостоятельный интерес. По теореме Грэхема-Либа-Росчайльда [14], для любого конечного разбиения бесконечномерного векторного пространства над конечным полем в одном из подмножеств разбиения есть афинные подпространства любой конечной размерности. Для векторных пространств над полем из двух элементов эту теорему можно усилить: в одном из подмножеств разбиения есть аффинное подпространство бесконечной размерности. Сформулируем и докажем это усиление на групповом языке.

4.17. Теорема. *Для любого конечного разбиения бесконечной булевой группы $B = A_1 \cup \dots \cup A_n$ найдутся такие подмножество разбиения A_i, элемент $y \in B$ и бесконечная подгруппа H, что $gH \subset A_i$.*

По теореме Хиндмена [14], в одном из подмножеств разбиения A_i найдется такое бесконечное подмножество A, что $\mathrm{FP}(A) \subset A_i$, где $\mathrm{FP}(A)$ — множество конечных произведений различных элементов подмножества A. Фиксируем произвольный элемент $g \in A$ и обозначим через H подгруппу, порожденную подмножеством $A \setminus \{g\}$. Очевидно, что $gH \subset \mathrm{FP}(A) \subset A_i$.

Заметим, что в предположении аксиомы Мартина, теорема 4.16 вытекает из существования недискретной неразложимой топологии на счетной булевой группе. Приведенное выше доказательство этой теоремы не зависит от дополнительных к ZFC предположений.

Завершим этот параграф теоремой О. Мазовена, формулировку которой сообщил автору В.И. Малыхин.

4.18. Теорема. *Пусть G, G_1, G_2 — недискретные топологические группы, причем G_1, G_2 абелевы. Тогда группы $G \times G$, $G_1 \times G_2$ разложимы.*

Доказательство легко извлечь из следующего простого наблюдения. Декартов квадрат $X \times X$ произвольного бесконечного множества X можно раскрасить двумя цветами так, что для любых подмножеств $X_1, X_2 \subset X$, $\operatorname{card} X_1 = \operatorname{card} X_2 = \operatorname{card} X$, произведение $X_1 \times X_2$ содержит разноцветные точки. Отсюда следует, что произведение двух однородных пространств одного дисперсионного характера разложимо.

Как заметила О. Сипачева в ответ на вопрос автора, декартов квадрат счетного множества X нельзя раскрасить в три цвета так, чтобы для любых бесконечных подмножеств $X_1, X_2 \subset X$ произведение $X_1 \times X_2$ содержало точки всех трех цветов.

4.19. Вопрос. *Верно ли, что произведение $G_1 \times G_2$ любых недискретных групп G_1, G_2 разложимо?*

4.20. Вопрос. *Верно ли, что произведение $G_1 \times G_2$ абсолютно разложимых групп G_1, G_2 абсолютно разложимо?*

4.21. Вопрос. *Верно ли, что квадрат $G \times G$ любой недискретной группы G $\aleph_0$-разложим? Если группа G счетна, то это так (см. §8).*

4.22. Вопрос. *Верно ли, что произведение $G_1 \times G_2$ недискретных абелевых групп G_1, G_2 $\aleph_0$-разложимо?*

§5.

Вспомним вопрос 1.4 о недискретной неразложимой топологизируемости группы, содержащей бесконечную булеву подгруппу, и отрицательный ответ на этот вопрос в §2. Но тогда естественно спросить, существеет ли недискретная неразложимая топология на группе, которая имеет бесконечную инвариантную булеву подгруппу. Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема из статьи [6].

5.1. Теорема. *Сплетение $G = H \wr \mathbb{Z}$ произвольной группы H и группы целых чисел $\mathbb{Z}$ является абсолютно разложимой группой.*

По определению сплетения элементами группы G являются пары (f, z), где $f \in \mathrm{Fun}$, $x \in \mathbb{Z}$, Fun — множество всех отображений $f\colon \mathbb{Z} \to H$ с конечными носителями $\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) \neq e\}$, e — единица группы H. Умножение в группе G определяется следующим правилом

$$\big(f_1(x), z_1\big)\big(f_2(x), z_2\big) = \big(f_1(x) f_2(x + z_1), z_1 + z_2\big).$$

Для отображения $f \in \mathrm{Fun}$ отличного от отображения id ($\mathrm{id}(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{Z}$) введем обозначения

$$\lambda(f) = \min \operatorname{supp} f, \qquad \varrho(f) = \max \operatorname{supp} f.$$

Положим $\nu(g) = \max\{|\lambda(f)|, \varrho(f)\}$ для элемента $g = (f, z)$, $f \neq \mathrm{id}$, и $\nu(g) = 0$ для $g = (\mathrm{id}, z)$.

Абсолютно плотными в группе G являются подмножества $S_1 = \{g \in G : \nu(g)$ — нечетное число$\}$, $S_2 = G \setminus S_1$.

Если в качестве H взять группу порядка 2, то Fun — инвариантная счетная булева подгруппа группы G.

Определенный интерес для автора представляет следующая задача. Найти критерий абсолютной разложимости сплетения произвольных групп G_1, G_2.

§6.

Этот параграф — краткое изложение статьи [15]. Рассмотрим группу $S(X)$ всех подстановок на бесконечном множестве X. Носителем подстановки $g \in S(x)$ называется множество $\operatorname{supp} g = \{x \in X : g(x) \neq x\}$, $F(X)$ — группа всех подстановок с конечным носителем.

Одной из наиболее естественных топологий на группе $S(x)$ и ее подгруппе $F(x)$ является топология поточечной сходимости. Базу окрестностей тождественной подстановки id в этой топологии образуют подгруппы $S(X,K) = \{g \in S(X) : g(x) = x$ для всех $x \in K\}$, где K пробегает все конечные подмножества из X.

6.1. Теорема. *Группы $S(x)$ и $F(x)$ с топологиями поточечной сходимости максимально разложимы.*

Разобьем множество X на $\operatorname{card} X$ подмножеств $X = \bigcup\{X_\alpha : \operatorname{card} X_\alpha = \operatorname{card} X, \alpha < \operatorname{card} X\}$. Линейно упорядочим множество X так, чтобы каждое подмножество X_α было конфинальным в X. Для каждого непустого конечного подмножества $K \subset X$ обозначим $\max K$ максимальный элемент подмножества K в определенном на X линейном порядке. Положим

$$D_\alpha = \{g \in F(x) \setminus \mathrm{id}\} : \max \operatorname{supp} g \in X_\alpha\}.$$

Максимальная разложимость группы $F(X)$ следует из того, что все подмножества D_α, $\alpha < \operatorname{card} X$ плотны в $F(X)$.

6.2. Теорема. *Группа $F(X)$ не является абсолютно разложимой.*

6.3. Вопрос. *Верно ли, что группа $S(X)$ абсолютно разложима?*

Доказательство теоремы 6.2 основано на следующей конструкции. Фиксируем дизъюнктное семейство $\{X_n : n < \omega\}$ непустых подмножеств из X и рассмотрим прямое произведение $H = \times\{S(X_n) : n < \omega\}$. Положим $H_m = \times\{S(X_n) : m \le n < \omega\}$, $m < \omega$. Подгруппа H достаточно хорошо расположена в группе $F(X)$ в смысле возможности продолжения топологий. Точнее, пусть на группе H задана топология с базой τ окрестностей единицы, причем каждая подгруппа H_n открыта в этой топологии. Семейство подмножеств τ можно принять в качестве базы окрестностей единицы в группе $F(X)$. Возьмем в качестве $\{X_n : n < \omega\}$ дизъюнктное семейство двухэлементных подмножеств из X. Тогда H — счетная булева группа и теорема легко следует из теоремы 4.17.

Продолжая топологию Малыхина [7] с булевой подгруппы H на $F(X)$, получаем пример недискретной, экстремально несвязной, неразложимой группы, которая не имеет инвариантных булевых подгрупп.

6.4. Теорема. *Для несчетного множества X группу $F(X)$ можно разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой топологии несчетного дисперсионного характера с базой окрестностей единицы, состоящей из подгрупп.*

Возьмем возрастающую последовательность $\langle a_n \rangle$ натуральных чисел, такую, что последовательность $\langle a_{n+1} - a_n \rangle$ также возрастающая. Положим

$$L_n = \{a \in \mathbb{N} : 2^{a_n} \leq a < 2^{a_{n+1}}\}.$$

Разобьем множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ на счетное число подмножеств $\bigcup\{A_k : k < \omega\}$ так, чтобы каждое подмножество A_k содержало бесконечное число отрезков L_n. Определим разбиение множества $F(X) \setminus \{\mathrm{id}\}$ на подмножества

$$D_k = \{g \in F(X) \setminus \mathrm{id} : \operatorname{card} \operatorname{supp} g \in A_k\}, \quad k < \omega.$$

Каждое из подмножеств D_k плотно в любой топологии, описанной в теореме 6.4. Отметим, что для любого несчетного множества X на группе $F(X)$ имеется $2^{2^{\operatorname{card} X}}$ топологий, удовлетворяющих условию теоремы.

6.5. Вопрос. *Можно ли для любого несчетного множесва X разбить группу $F(X)$ на счетное число подмножеств, плотных в любой топологии несчетного дисперсионного характера?*

§7.

Пусть топологическое пространство X содержит разложимое подпространство, $R(X)$ — объединение всех его разложимых подпространств. Как известно, подпространство $R(X)$ замкнуто и разложимо, а подпространство $X \setminus R(X)$ неразложимо. Если разложимых подпространств в пространстве X нет, то полагаем $R(X) = \varnothing$. Пользуясь алгебраической терминологией, подпространство $R(X)$ естественно назвать разложимым радикалом пространства X. Для однородного пространства X $R(X) = X$ либо $R(X) = \varnothing$, что соответствует разложимости и неразложимости пространства X.

Приведем несколько полезных характеризующих неразложимых и экстремально несвязных пространств в терминах ультрафильтров.

Фильтр на топологическом пространстве, который обладает базой из открытых подмножеств, называется 0-фильтром. Фильтр, максимальный в классе 0-фильтров, называется 0-ультрафильтром.

7.1. Теорема. *Если φ — 0-фильтр на топологическом пространстве X и $X \setminus R(X) \in \varphi$, то φ — ультрафильтр, т.е. максимальный фильтр в классе всех фильтров. Если на топологическом пространстве X существует ультрафильтр с базой из открытых множеств, то пространство X неразложимо.*

7.2. Следствие [16]. *Топологическое пространство X разложимо тогда и только тогда, когда на X существует ультрафильтр с базой из открытых подмножеств.*

Фильтр φ на топологическом пространстве X называется поглощающим [17], если внутренность $\int F$ любого замкнутого подмножества $F \in \varphi$ непуста. Очевидно, что всякий 0-фильтр поглощающий.

7.3. Теорема. *Фильтр на топологическом пространстве, максимальный в классе поглощающих фильтров, является ультрафильтром.*

7.4. Следствие. *Для любой точки топологического пространства существует поглощающий ультрафильтр, сходящийся к этой точке.*

7.5. Теорема. *Если φ — поглощающий ультрафильтр на топологическом пространстве X и $X \setminus R(X) \in \varphi$, то φ имеет базу, состоящую из открытых подмножеств.*

7.6. Следствие. *Если однородное пространство неразложимо, то всякий поглощающий ультрафильтр имеет базу, состоящую из открытых подмножеств.*

Топологическое простанство X называется экстремально несвязным в точке x, если не существуют непересекающиеся открытые подмножества, касающиеся точки x. Топологическое пространство экстремально несвязно тогда и только тогда, когда X экстремально несвязно в каждой точке.

7.7. Теорема. *Если топологическое пространство X экстремально несвязно в точке x и φ — поглощающий ультрафильтр на X, сходящийся к точке x, то любое замкнутое пространство $F \in \varphi$ является окрестностью точки x. Если на топологическом пространстве X существует такой ультрафильтр φ, сходящийся к точке x, что любое замкнутое подмножество $F \in \varphi$ является окрестностью точки x, то пространство X экстремально несвязно в точке x.*

Пусть G — произвольная группа, βG — чех-стоунова компактификация группы G как дискретного пространства. Элементами множества βG являются всевозможные ультрафильтры на группе G, а базу топологии образуют подмножества $\bar{A} = \{p \in \beta G : A \in p\}$, где A пробегает все подмножества группы G. Группа G отождествляется с подмножеством всех главных ультрафильтров на βG, подмножество всех свободных ультрафильтров $\beta G \setminus G$ обозначается G^*.

Продолжим операцию умножения элементов группы G на множество βG. Произведение pq ультрафильтров $p, q \in \beta G$ определяется указанием всех подмножеств $A \subset G$, которые являютя элементами ультрафильтра pq: $A \in pq \iff \{g \in G : Ag^{-1} \in p\} \in q$.

Операция умножения в βG асоциативна, а G^* — подполугруппа полугруппы βG. Такая конструкция возникла и интенсивно исполузуется в комбинаторике чисел [18].

Далее в этом параграфе топологическую группу будем записывать как пару (G, τ), где G — группа, τ — фильтр окрестностей единицы. Множество $\bar{\tau}$ всех ультрафильтров на топологической группе (G, τ), сходящихся к единице, является замкнутой подполугруппой полугруппы βG. Полугруппа $\bar{\tau}$ введена в [17] и назывется полугруппой ультрафильтров топологической группы (G, τ). Подполугруппу свободных ультрафильтров из $\bar{\tau}$ обозначим τ^*. Известно [17], что совокупность всех поглощающих ультрафильтров из $\bar{\tau}$ является замкнутым идеалом полугруппы $\bar{\tau}$.

7.8. Теорема. *Если топологическая группа (G, τ) неразложима, то минимальный идеал полугруппы $\bar{\tau}$ совпадает с идеалом τ-поглощающих ультрафильтров, а каждый ультрафильтр из этого идеала является правым нулем полугруппы $\bar{\tau}$.*

7.9. Теорема. *Топологическая группа (G, τ) с конечной полугруппой $\bar{\tau}$ неразложима тогда и толко тогда, когда полугруппа $\bar{\tau}$ содержит правый нуль.*

7.10. Теорема. *Топологическая группа (G, τ) с конечной полугруппой $\bar{\tau}$ экстремально несвязна тогда и только тогда, когда полугруппа $\bar{\tau}$ имеет единственный минимальный левый идеал.*

В предположении аксиомы Мартина в [19,20] для каждого натурального числа n построены топологические группы $(B, \varkappa_n)$, (B, λ_n), (B, ϱ_n), B — счетная булева группа, такие, что $\varkappa_n^*$ — цепь идемпотентов, λ_n^* — полугруппа левых нулей, ϱ_n^* — полугруппа правых нулей и $\operatorname{card} \varkappa_n^* = \operatorname{card} \lambda_n^* = \operatorname{card} \varrho_n^* = n$.

По теореме 7.9 группы $(B, \varkappa_n)$, (B, ϱ_n) неразложимы для любого натурального числа n, а группа (B, λ_n) разложима при $n > 1$.

По теореме 7.10 группы $(B, \varkappa_n)$, (B, ϱ_n) экстремально несвязны для любого натурального числа n, а группа (B, λ_n) не является экстремально несвязной при $n > 1$.

Таким образом, серия групп (B, ϱ_n), $n > 1$, дает отрицательный ответ на вопрос 1.6. Эта же серия дает отрицательный ответ на вопрос 1.7.

Серия групп (B, λ_n), $n > 1$, показывает, что существуют разложимые группы, которые не являются $\aleph_0$-разложимы. Действительно, полугруппа ультрафильтров $\aleph_0$-разложимой группы бесконечна.

7.11. Вопрос (В.И. Малыхин). *Существуют ли неразложимые группы с бесконечной полугруппой ультрафильтров?*

Пример Сироты показывает, что экстремально несвязные группы с бесконечной полугруппой ультрафильтров существуют в предположении континнум-гипотезы.

§8.

Развивая теорию локальных правотопологических групп, Е.Г. Зеленюк открыл новый мощный метод разложения групп. В этом параграфе излагается схема доказательства следующего результата из [5].

8.1. Теорема. *Счетная абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 абсолютно $\aleph_0$-разложима.*

Начнем с определений. Правотопологической называется группа, снабженная топологией, в которой непрерывны правые сдвиги. Локальные характеризации правотопологических групп получены в [9,21].

Локальная правотопологическая группа — это открытая окрестность единицы некоторой правотопологической группы. Точнее, топологическое порстранство X с выделенным элементом e (единицей) и частичной бинарной операцией (умножением) называется локальной правотопологической группой, если существует такая правотопологическая группа G, что

1) e — единица группы G;
2) X — открытая окрестность единицы $e \in G$;
3) частичное умножение на X — это в точности частичная операция, индуцированная на X умножением на G.

Отображение $f\colon X \to S$ локальной правотопологической группы X в некоторую частичную полугруппу S называется локальным гомоморфизмом, если для любого элемента $y \in X$ найдется такая окрестность U единицы e, что для всех $x \in U$ произведения xy, $f(x)f(y)$ определены и $f(xy) = f(x)f(y)$.

Пусть X_1, X_2 — локальные правотопологические группы с единицами e_1, e_2. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется изоморфизмом, если

1) f — гомеоморфизм, $f(e_1) = e_2$;
2) f — локальный гомоморфизм.

Такое определение локального гомоморфизма мотивировано следующими наблюдениями.

Частичное умножение в локальной правотопологической горуппе X индуцирует частичное умножение в чех-стоуновой компактификации βX_d множества X как дискретного пространства (см. §7). Топология на X однозначно определяется фильтром φ окрестностей единицы. Множество $\overline{\varphi}$ всех ультрафильтров на X, сходящихся к единице, является замкнутой подполугруппой в βX_d. Назовем $\overline{\varphi}$ полугруппой ультрафильтров локальной правотопологической группы X. Сужение чех-стоунова продолжения $\overline{\varphi}\colon \beta X_d \to \beta S$ локального гомоморфизма $f\colon X \to S$ на полугруппу $\overline{\varphi}$ является полугрупповым гомоморфизмом. В частности, полугруппы ультрафильтров изоморфных локальных правотопологических групп топологически изоморфны.

Локальная правотопологическая группа X называется регулярной, если топологическое пространство X регулярно.

8.2. Теорема. *Любые две счетные недискретные регулярные локальные правотопологические группы со счетной базой топологии изоморфны.*

Из теоремы 8.2 вытекает, что полугруппы ультрафильтров счетных недискретных метризуемых топологических групп топологически изоморфны. Таким образом, счетные недискретные метризуемые группы не только гомеоморфны, но и с локальной точки зрения устроены одинаково алгебраически.

Первым ростком теоремы 8.2 было решение [22] известной проблемы о конечных подгруппах в полугруппе $\beta\mathbb{N}$.

8.3. Теорема. *Для любой группы G без кручения все конечные полугруппы в полугруппе βG одноэлементны.*

В [22] теорема формулируется лишь для абелевых групп, однако, как заметили Н. Хиндман и Д. Штраусс, это ограничение легко устранимо.

Второй росток теоремы 8.2 связан с автоморфизмами. Порядком автоморфизма локальной правотопологической группы X называется $\inf\sup\{\operatorname{card} O(x) : x \in U\}$, где $O(x)$ — орбита элемента x, $\inf$ берется по всем окрестностям U единицы из X. Автоморфизм порядка > 1 называется нетривиальным. Автоморфизм конечного порядка n называется однородным, если орбиты всех неединичных элементов из X n-элементны.

Рассмотрим следующий важный пример. Пусть $\mathbb{Z}(m+1) = \{0, 1, \ldots, m\}$ — циклическая группа порядка $m+1$, $H(m) = \oplus_\omega \mathbb{Z}_{(m+1)}$ — прямая сумма ω экземпляров группы $\mathbb{Z}(m+1)$, снабженная топологией прямой суммы. Подстановка g на $\mathbb{Z}(m+1)$, разложимая в два цикла $(0)(1, 2, \ldots, m)$ индуцирует подстановку на группе $H(m)$, которую будем также обозначать через g. Легко убедится в том, что g — однородный автоморфизм порядка m локальной правотопологической группы $H(m)$.

Пусть λ, ϱ — отображения, сопоставляющие каждому ненулевому элементу из $H(m)$ номер первой и последней ненулевой координаты.

8.4. Теорема. *Пусть f — однородный автоморфизм порядка m счетной недискретной регулярной локальной правотопологической группы X. Существуют непрерывная биекция $h\colon X \to H(m)$ такая, что*
1) $f(e) = 0$;
2) если $x, y \in X$ и $\varrho(h(x)) + 1 < \lambda(h(y))$, то произведение xy определено и $h(xy) = h(x) + h(y)$;
3) $h \circ f = g \circ h$.

Если пространство X имеет счетную базу, то биекцию можно выбрать гомеоморфизмом.

8.5. Теорема. *Пусть (X, τ) — счетная недискретная регулярная локальная правотополгическая группа, f — нетривиальный однородный автоморфизм (X, τ) конечного порядка. Существует разбиение множества X на счетное число подмножеств, плотных в любой недискретной топологии τ' на X такой, что*
1) (X, τ') — локальная правотопологическая группа;
2) f — непрерывное отображение в топологии τ';
3) каждая окрестность единицы в топологии τ' нетривиально пересекает каждую окрестность единицы в топологии τ.

При доказательстве этой теоремы фиксируется некоторое разбиение топологической группы $H(m)$, m — порядок автоморфизма f, на счетное число плотных подмножеств, а затем с помощью биекции h из теоремы 8.4 это разбиение поднимается на X.

Чтобы доказать теорему 8.1, следует счетную абелеву группу G с конечным числом элементов порядка 2 снабдить произвольной предкомпактой топологией, взять автоморфизм $f(x) = -x$ и применить теорему 8.5.

Отметим еще два следствия теоремы 8.5.

8.6. Теорема. *Пусть недискретная топологическая группа G не является $\aleph_0$-разложимой. Если G абелева либо счетная периодическая, то*
1) централизатор каждого элемента из G — открытая подгруппа;
2) G содержит счетную открытую булеву подгруппу.

8.7. Теорема. *Для любой счетной недискретной группы G группа $G \times G$ $\aleph_0$-разложима.*

Решая принципиально вопрос об абсолютной $\aleph_0$-разожимости счетных абелевых групп с конечным числом элементов порядка 2, теорема 8.1 оставляет достаточно простора для поиска конструктивных разбиений для конкретных групп. В том, что такие задачи могут быть достаточно увлекательными убеждает, например, §3.

§9.

В.И. Малыхин доказал следующую красивую теорему.

9.1. Теорема. *Если регулярное однородное пространство X содержит счетное незамкнутое дискретное подмножество, то X $\aleph_0$-разложимо.*

9.2. Вопрос (В.И. Малыхин). *Существенны ли в условиях теоремы требования регулярности или счетности?*

Подмножество A топологической группы G называется вполне ограниченным, если для любой окрестности единицы U найдется такое конечное подмножество K, что $A \subset UK \cap KU$. В [23] доказана следующая теорема.

9.1. Теорема. *Если A — бесконечное вполне ограниченное подмножество топологической группы G, то подмножество $A^{-1}A$ содержит счетное незамкнутое дискретное подмножество.*

9.2. Следствие. *Бесконечная вполне ограниченная группа содержит счетное незамкнутое дискретное подмножество.*

Видимо, утверждать наличие незамкнутого дискретного подмножества в любом бесконечном вполне ограниченном подмножестве группы, нельзя, но соответствующими примерами автор не располагает.

Кратко о происхождении теоремы 9.3. Для абелевой группы G обозначим $G^{\#}$ группу G, снабженную максимальной вполне ограниченной топологией. Поскольку группа $G^{\#}$ не содержит нетривиальных сходящихся последовательностей, Э. ван Дауэн поставил вопрос о наличии в $G^{\#}$ счетного незамкнутого дискретного подмножества. Эту проблему решил М.И. Урсул, опираясь на структурную теорию компактных абелевых групп. Все же прямой путь короче и результативнее.

Разумеется, из теорем 9.1, 9.2 вытекает $\aleph_0$-разложимость любой бесконечной вполне ограниченной группы. Более общие результаты о разложимости групп приведены в следующем параграфе.

В отличие от неразложимости или экстремальной несвязности, замкнутость всех дискретных подмножеств не является жестким ограничением на алгебраическое
строение недискретной группы. Недавно Е.Г. Зеленюк построил, в предположении аксиомы Мартина, на любой бесконечной абелевой группе недискретную топологию, в котрой замкнуты все нигде не плотные подмножества. При этом существенно использовалась техника T-последовательностей из [24]. Тем не менее, задача [23] построения наивного примера счетной недискретной группы, в которой замкнуты все дискретные подмножества, видимо, остается нерешенной.

§10.

В этом параграфе излагаются результаты, полученны автором в [25] и усовершенствованные В.И. Малыхиным в [26].

10.1. Теорема. *Для любой бесконечной группы G найдутся такие подмножества A_1, A_2, что $G = A_1 \cup A_2$, $A_1K \neq G$, $A_2K \neq G$ для любого конечного подмножества $K \subset G$.*

10.1. Теорема. *Любую бесконечную группу можно разбить на два подмножества, плотные в любой вполне ограниченной топологии.*

Отметим, что теорема 10.1 доказана в связи со следующей теоремой из [17]. Если произвольную группу G разбить на конечное число подмножеств $G = A_1 \cup \dots \cup A_n$, то найдутся такие подмножество A_i и конечное подмножество K, что $G = A_i^{-1}A_iK$.

10.3. Вопрос. *Пусть группа G разбита на конечное число подмножеств $G = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Верно ли, что $G = A_i^{-1}A_iK$ для некоторых подмножества A_i разбиения и подмножества K, $\operatorname{card} K = n$? Для аменабельных групп это так [25].*

10.4. Теорема. *Пусть G — бесконечная группа, $\operatorname{card} G$ — регулярный кардинал. Существуют такие подмножества A_1, A_2, что $G = A_1 \cup A_2$, $A_1K \neq G$, $A_2 \neq G$ для любого подмножества K, $\operatorname{card} K < \operatorname{card} G$.*

10.5. Вопрос. *Верна ли теорема 10.4, если $\operatorname{card} G$ — сингулярный кардинал?*

Для конечных групп G теорема 10.4 неверна. В статье [27] доказана следующая теорема.

Пусть G — конечная группа, $\operatorname{card} G = n$, A — подмножество группы G, $\operatorname{card} A = k$. Существует такое подмножество $B \subset G$, что $G = AB$ и $\operatorname{card} B < \frac{n}{k}(\log k + 2)$. Из этой теоремы вытекает, что для любого конечного разбиения конечной группы G, $\operatorname{card} G > 8$, на две части $G = A_1 \cup A_2$ найдутся такие подмножество разбиения A_i и подмножество K, что $G = A_iK$, $\operatorname{card} K < \operatorname{card} G$.

Слегка подправляя определение И.И. Гурана [28], назовем топологическую группу G m-ограниченной (m — кардинал), если для любой окрестности единицы U найдется такое подмножество $K \subset G$, $\operatorname{card} K < m$, что $G = UK$.

10.6. Теорема. *Пусть G — бесконечная топологическая группа, m — регулярный кардинал и $m \leq \operatorname{card} G$. Группу G можно разбить на два подмножества, плотные в любой m-ограниченной топологии.*

Усовершенствование В.И. Малыхина состояло в том, что группу следует разбивать на более чем два подмножества.

10.7. Теорема. *Для любой бесконечной группы G существует дизъюнктное семейство подмножеств $\mathfrak{A}$, такое, что $\operatorname{card} \mathfrak{A} = \operatorname{card} G$ и $(G \setminus A)K \neq G$ для любого подмножества $A \in \mathfrak{A}$ и любого конечного подмножества K.*

10.8. Теорема. *Любую бесконечную группу G можно разбить на $\operatorname{card} G$ подмножеств, плотных в любой вполне ограниченной топологии.*

10.9. Теорема. *Пусть G — бесконечная группа, $\operatorname{card} G$ — регулярный кардинал. Существует такое дизъюнктное семество $\mathfrak{A}$ подмножеств из G, что $\operatorname{card} \mathfrak{A} = \operatorname{card} G$ и $(G \setminus A)K \neq G$ для любого подмножества $K \subset G$, $\operatorname{card} K < \operatorname{card} G$.*

10.10. Теорема. *Пусть G — бесконечная группа, m — регулярный кардинал и $m \leq \operatorname{card} G$. Группу G можно разбить на $\operatorname{card} G$ подмножеств, плотных в любой m-ограниченной топологии.*

Некоторые частные случаи теорем 10.8, 10.10 содержатся в [31, 32].

§11.

Подмножество A абелевой группы G будем называть асимметричным, если $g + S \not\subset A$ для любого элемента $g \in G$ и любого бесконечного симметричного подмножества $S \subset G$, $S = -S$. Другими словами, A не содержит бесконечного подмножества, симметричного относительно некоторой точки.

Для каждой абелевой группы G определим $\nu(G)$ как минимальную кардинальность разбиения группы асимметричными подмножествами. В хроматической терминологии, $\nu(G)$ — это минимальное число цветов, необходимых для асиметрической раскраски группы G. Очевидно, $\nu(G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа G конечна. Число $\nu(G)$ было введено автором в [3]. Там же охарактеризованы группы G с $\nu(G) = 2$, и поставлен вопрос вычисления кардинала $\nu(G)$ для конкретных групп.

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство всех бесконечных симметричных подмножеств группы G. Ясно, что группу G можно разбить на два $\mathfrak{A}$-плотных подмножества тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 2$. Однако, никакую группу нельзя разбить на три $\mathfrak{A}$-плотных подмножества.

В [29] вычислены инварианты $\nu(G)$ для всех абелевых групп G через следующие кардинальные инварианты: $\operatorname{card} G$, свободный ранг $r_0(G)$, 2-ранг $r_2(G)$. Определение рангов $r_0(G), r_2(G)$ см. в [30, с.103].

11.1. Теорема. *Если G — конечнопорожденная группа, то $\nu(G) = r_0(G) + r_2(G)$.*

11.2. Теорема. *Если G — счетная бесконечно порожденная группа и числа $r_0(G)$, $r_2(G)$ конечны, то $\nu(G) = r_0(G) + 2$.*

11.3. Теорема. *Если G — счетная группа и по крайней мере одно из чисел $r_0(G)$, $r_2(G)$ бесконечно, то $\nu(G) = \aleph_0$.*

11.4. Теорема. *Если G — несчетная группа, то $\nu(G) = \max\{r_2(G), \log \operatorname{card} G\}$, где $\log \operatorname{card} G = \min\{\gamma : 2^\gamma \geq \operatorname{card} G\}$.*

Для доказательства теорем 11.1, 11.2 привлекаются некоторые нетривиальные результаты алгебраической топологии, теорема 11.3 — простое следствие теоремы 11.1, а теорема 11.4 доказывается техникой комбинаторной теории множеств.

Из теоремы 11.1, 11.2 следует, что $\nu(\mathbb{Z}^n) = n + 1$, $\nu(\mathbb{Q}^n) = n + 2$ для любого натурального числа n, а по теореме 11.4 $\nu(\mathbb{R}) = \aleph_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hewitt E. *A problem of set-theoretic topology* Duke Math. J. – 1943. – V.10. – P.309–333.
2. Comfort W.W., van Mill J. *Groups with only resolvable group topologies* Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – V.120, №3. – 687–696.
3. Протасов И.В. *Ассиметрично разложимые абелевы группы* Матем. заметки. – 1996. – Т.59, №3. – С.468–471.
4. Протасов И.В. *Разбиения прямых произведений групп* Укр. матем. ж. – 1997. – Т.49, №10. – 1389–1395.
5. Зеленюк Е.Г. *Разложимость топологических групп* Укр. матем. ж. – 1998. – Т.50.
6. Протасов И.В. *Абсолютно разложимые группы* Укр. матем. ж. – 1996. – Т.48, №3. – С.383–392.
7. Малыхин В.И. *Экстремально несвязные и близкие к ним группы* ДАН СССР. – 1975. – Т.220, №1. – С.27–30.
8. Сирота С. *Произведение топологических групп и экстремальная несвязность* Матем. сб. – 1969. – Т.79, №2. – С.179–192.
9. Протасов И.В. *Фильтры и топологии на полугруппах* Матем. Студії. – 1994. – Т.3. – С.15-28.
10. Протасов И.В., Юрчук Т.Л. *Разожимость свободных групп* Докл. НАН Украины. – 1997. – №8. – С.38–40.
11. Зеленюк Е.Г., Протасов И.В. *Неразложимые и экстремально несвязные топологии на группах* Докл. НАН Украины. – 1997. – №3. – С.7–11.
12. Протасов И.В. *Абсолютная разложимость группы рациональных чисел* Укр. матем. ж. – 1996. – Т.48, №12. – С.1953–1956.
13. Budak T., Isik N., Pym J. *Subsemigroups of Stone-Čech compactifications* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1979. – V.751. – P.49–184.
14. Грэхем Р. Начала теории Рамсея. – М.: Мир, 1984.
15. Протасов И.В. *Разожимость групп подстановок* Матем. Студії. – 1996. – Т.6. – С.131-134.
16. Елькин Е.Г. *Ультрафильтры и неразложимые пространства* Вестник МГУ. – 1969. – №5. С.51–56.
17. Протасов И.В. *Ультрафильтры и топологии на группах* Сиб. матем. ж. – 1993. Т.34, №5. – С.163–180.
18. Hindman N. *Ultrafilters and combinatorial number theory* Lecture Notes Math. – 1979. – V.751. P.49–184.
19. Зеленюк Е.Г. *Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров* Докл. НАН Украины. – 1995, №5. – С.37–38.
20. Зеленюк Е.Г. *Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров* Ма-

тем. Студії. – 1996. – Т.6. – С.41-52.

21. Parazyan T. *Extremal topologies on semigroup* Topology and Appl. – 1991. V.39. – P.229–243.
22. Зеленюк Е.Г. *Конечные группы в $\beta\mathbb{N}$ тривиальны* Киев, 1996. – Препр. НАН Украины. Ин-т математики 96.3.
23. Протасов И.В. *Дискретные подмножества топологических групп* Матем. заметки. – 1994. – Т.55, №1. – С.150–151.
24. Зеленюк Е.Г., Протасов И.В. *Топологии на абелевых группах* Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – Т.54, №5. – С.1090–1107.
25. Протасов И.В. *Разложимость τ-ограниченнх групп* Матем. Студії. – 1995. – Т.5. – С.17-20.
26. Malykhin V.I., Protasov I.V. *Maximal resolvability of bounded groups* Topology Appl. – 1997. – V.20. – P.1–6.
27. Weinstein G. *Minimal complementary sets* Trans. AMS. – 1975. – V.212. – P.131–137.
28. Гуран И.И. *О топологических группах, близких к финально компактным* ДАН СССР. – 1981. – Т.256, №6. – С.1305–1307.
29. Банах Т., Протасов И.В. *Ассиметрические разбиения абелевых групп* Матем. заметки. – 1998.
30. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1970.
31. Villegas-Silvu L.M. *On resolvable space and groups* Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1995. – V.36, №3. – P.579–584.
32. Villegas-Silvu L.M. *Maximal resolvabiity of come topological spaces and groups* Eight Prague topological symposium. August 19–23, 1996. – Praha. Abstracts.

Киевский университет, факультет кибернетики

Получено 17.02.1997