УДК 512.552.12

ПРО АДЕКВАТНІ І УЗАГАЛЬНЕНО АДЕКВАТНІ ДУО-КІЛЬЦЯ І ДУО-КІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

А.І. Гаталевич

A. Gatalevych. *On adequate and generalized adequate duo-rings and elementary divisor duo-rings*, Matematychni Studii, **9**(1998) 115–119.

By introduction the notion of right adequate element the theory of adequate rings is extended to the noncommutative case. The new classes of noncommutative elementary divisors rings and Hermitian rings are described.

В даній статті досліджуються питання з теорії кілець елементарних дільників і теорії адекватних кілець. Зокрема, з допомогою поняття адекватного справа (зліва) елемента теорія адекватних і узагальнено-адекватних кілець розширюється на некомутативний випадок. Позитивно вирішено питання про ермітовість деяких класів некомутативних кілець Безу.

Під кільцем розумітимемо асоціативне кільце з одиницею ($1 \neq 0$). *Правим (лівим) дуо-кільцем* називається кільце, в якому довільний правий (лівий) ідеал є двобічним. Праве і ліве дуо-кільце називається *дуо-кільцем. Правим (лівим) квазідуо-кільцем* називається кільце, в якому довільний максимальний правий (лівий) ідеал є двобічним. Кільце, в якому кожний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним правим ідеалом, назвемо *правим (лівим) кільцем Безу.*

Нагадаємо, що матриці A і B над кільцем R називаються *еквівалентними*, якщо $B = PAQ$ для відповідних зворотних матриць P і Q над кільцем R. Якщо матриця A еквівалентна деякій діагональній матриці $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0)$, де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$ при $i = 1, \dots, r-1$, то кажуть, що *матриця A володіє діагональною редукцією.* Кільце R називається *кільцем елементарних дільників*, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією. Якщо над кільцем R довільний рядок (стовпчик) володіє діагональною редукцією, то R називається *правим (лівим) кільцем Ерміта.* Праве і ліве кільце Ерміта називається *кільцем Ерміта* [1].

Кільце R називаться *регулярним*, якщо для кожного $a \in R$ існує $x \in R$ таке, що виконується $axa = a$. Регулярне дуо-кільце називається *абельово регулярним.*

Кільце R називається *цілозамкненим справа*, якщо для довільного його скінченнопородженого правого ідеалу A і для довільного $f \in \mathrm{End}_R A$ знайдеться

1991 *Mathematics Subject Classification.* 16U30.

таке $b \in R$, що $f(a) = ba$ для будь-якого $a \in A$. Клас цілозамкнених справа кілець містить всі регулярні кільця, всі самоін'єктивні справа кільця, всі комутативні області, які є цілозамкненими (в класичному розумінні) в своїх полях дробів. [2].

Позначимо через $U(R)$ групу одиниць кільця R, через $J(R)$ і $N(R)$ — радикал Джекобсона і первинний радикал відповідно, а через $\mathrm{mspec}_r R$ — множину всіх максимальних правих ідеалів кільця R.

Означення 1. Назвемо ненульовий елемент a кільця R *адекватним справа*, якщо для кожного ненульового елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що:
1) $a = rs$;
2) $rR + bR = R$;
3) для будь-якого $s' \in R$ із включення $sR \subseteq s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ властивий.

Кільце, в якому кожний ненульовий елемент є адекватним справа, назвемо *адекватним справа.*

Означення 2. Назвемо властивий правий ідеал кільця R *адекватним справа*, якщо він містить хоча б один адекватний справа елемент. В протилежному випадку правий ідеал кільця R назвемо *неадекватним справа.* Неадекватний правий ідеал M кільця R називається *максимально неадекватним справа*, якщо будь-який правий ідеал P кільця R такий, що $M \subset P$, є адекватним справа.

Для неадекватних справа правих ідеалів в силу леми Цорна справедливий такий результат: довільний неадекватний справа правий ідеал кільця міститься хоча б в одному максимально неадекватному справа правому ідеалі.

Означення 3. Кільце R назвемо *узагальнено адекватним справа*, якщо для будь-якої пари елементів $a, b \in R$, хоча б один з елементів, скажемо a, можна зобразити у вигляді:
1) $a = rs$;
2) $rR + bR = R$;
3) для будь-якого $s' \in R$ із включення $sR \subseteq s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ властивий.

Теорема 1. *Дуо-область Безу з єдиним максимально неадекватним справа правим ідеалом є узагальнено адекватною справа.*

Доведення. Нехай N — єдиний максимально неадекватний справа правий ідеал області R. Для будь-яких ненульових $a, b \in R$ можливі два випадки:
1) хоча б один з елементів a, b не належить ідеалу N;
2) $a, b \in N$.

Перший випадок тривіальний, тому відразу розглянемо другий.

Тоді $aR + bR = dR, a = da_1, b = db_1$. З рівностей

$$a_1R + b_1R = R,\ a_1R + dR = R$$

отримуємо, що $a_1R + bR = R$. Оскільки $bR \subset dR$, то бачимо, що розклад елемента a цілком відповідає визначенню адекватного справа елемента. Теорему доведено.

Теорема 2. *Узагальнено адекватна справа права дуо-область Безу є областю елементарних дільників.*

Доведення. Враховуючи теореми 3.5, 5.1 праці [1], достатньо довести, що будь-яка матриця вигляду $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ володіє діагональною редукцією. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $aR + bR + cR = R$.

Нехай для пари елементів a, c, наприклад, елемент c можна подати у вигляді:
1) $c = rs$;
2) $rR + aR = R$;
3) з умови $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що $s'R + aR \neq R$.

Нехай $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Очевидно, що матриця P зворотна. Тоді
$$PA = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + rb & rc \\ * & * \end{pmatrix}.$$
Доведемо, що $(a + rb)R + rcR = R$. Припустимо, що $(a + rb)R + rcR = hR$, $h \notin U(R)$. Тоді отримуємо:

1) $rc = rrs$, $rR + hR = h'R$ і $(a + rb)R \subseteq h'R$. Тому $a \in h'R$ і $aR \subset h'R$, що суперечить включенню $R = rR + aR \subset h'R + aR \neq R$.

2) Оскільки $rR + hR = R$, то
$$r^2R + hR = R,\ r^2u + hv = 1,\ r^2us + hvs = s,\ r^2su' + hsv' = s, \quad u, v, u', v' \in R.$$
Звідси отримуємо, що $sR \subset hR$ і $hR + aR = h'R$, де $h' \notin U(R)$. Отже,
$$(a + rb)R \subset h'R,\ rbR \subset h'R,\ R = rR + aR = rR + h'R,$$
$$aR \subset h'R,\ bR \subset h'R,\ cR \subset h'R.$$
Таким чином $R = aR + bR + cR \subset h'R$. Отже, $h' \in U(R)$.

Нехай елемент a зображається у вигляді:
1) $a = rs$;
2) $rR + cR = R$;
3) з умови $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що $s'R + cR \neq R$.

Тоді
$$AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & * \\ br + c & * \end{pmatrix},$$
а доведення того, що $arR + (br + c)R = R$ можна провести як вище. Теорему доведено.

Лема 1. *Для кожного елемента a абельово регулярного кільця R існує таке $u \in U(R)$, що $a^2u = a$.*

Доведення. Нехай елемент x задовольняє рівність $a^2x = a$, а елемент z — рівність $x^2z = x$. Покладемо $u = 1 + x - xz$. Оскільки $axz = (a^2x)xz = a^2x = a$, то $a^2u = a$. Тепер $uR + xR = R$ і $xu = x^2$, а тому $u \in U(R)$. Лему доведено.

Теорема 3. *Абельово регулярне кільце є адекватним справа.*

Доведення. Відомо, що будь-яке регулярне кільце є кільцем Безу. Для доведення адекватності справа виберемо довільні ненульові елементи $a, b \in R$. З леми 1 буде випливати, що для елементів a, b існують такі елементи $u, v \in U(R)$, що елементи $e = au$, $f = bv$ є ідемпотентами. Покладемо $d = e + f - ef$, $e_1 = 1 - f + ef$. Тоді $eR + fR = dR$ і оскільки $ef = fe' = ef'$, то отримуємо рівності $e = de_1$ і $e_1R + fR = R$. Оскільки $fR \subset dR$, то одержуємо, що a — адекватний справа елемент. Отже, кільце R є адекватним справа. Теорему доведено.

Теорема 4. *Дуо-кільце Ерміта зі зліченним числом максимальних правих ідеалів є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Оскільки R — кільце Ерміта, то використовуючи теореми 3.5, 5.1 праці [1], можна обмежитись матрицями вигляду $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, де $aR+bR+cR = R$. Використовуючи теорему 2 праці [8], можемо вважати, що $J(R) = 0$.

Позначимо через $M(a) = \{M_1, M_2, \dots, M_n, \dots\}$ множину максимальних правих ідеалів, які містять елемент a. Оскільки $aR + bR + cR = R$, то можна обмежитись випадком, коли $b \notin M_1$. Якщо $b \in M_1$, то $b + c \notin M_1$. Тоді в силу рівності

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b+c & c \end{pmatrix} = B,$$

достатньо довести, що матриця B володіє діагональною редукцією.

Отже, нехай $b_1 \notin M_1$. Розглянемо правий ідеал $aR + bR = a_1R$. Очевидно, що $a_1 \notin M_1$. Оскільки R — кільце Ерміта, то існує така зворотня матриця P, що

$$A_1 = PA = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $a_1R + b_1R + c_1R = R$, і $a_1 \notin M_1$.

За аналогією можемо вважати, що $b_1 \notin M_2$ і $a_1R + b_1R = a_2R$, де $a_2 \notin M_2$. Продовжуючи ці міркування, отримуємо множину матриць вигляду:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & * \\ * & * \end{pmatrix}, \text{ де } a_k \notin M_k \text{ і } a_{k-1} \subset a_kR \text{ для будь-якого } k = 1, 2, \dots .$$

Маємо ланцюг правих ідеалів:

$$aR \subset a_1R \subset \dots \subset a_kR \subset \dots . \qquad (*)$$

Нехай $I = \bigcup a_iR$. Оскільки $aR \subset I$, то для довільного максимального правого ідеалу M з включення $I \subset M$ випливає, що $M \in M(a)$. Тоді існує номер k, для якого $M = M_k$. Але це неможливо, оскільки в ланцюгу $(*)$ існує правий ідеал a_kR, який задовольняє умову $a_k \notin M_k$. Звідси $I = R$, тобто ланцюг $(*)$ скінченний. Отже, існує номер k такий, що $a_k \in U(R)$. Таким чином, матриця A володіє діагональною редукцією. Отже, R — кільце елементарних дільників. Теорему доведено.

Тепер розглянемо дуо-кільце Безу R, в якому більш ніж зліченна кількість максимальних правих ідеалів, а довільний ненульовий елемент, який не належить радикалу Джекобсона $J(R)$, міститься в не більш ніж зліченному числі максимальних правих ідеалів. Покажемо, що R є кільцем без дільників нуля. Зауважимо, що при наведених вище умовах $J(R) = 0$. Нехай існують такі ненульові елементи $a, b \in R$, що $ab = 0$. Тоді елемент ab міститься в не більш ніж зліченній кількості максимальних правих ідеалів, що неможливо, оскільки нуль кільця лежить у всіх максимальних правих ідеалах. Звідси випливає, що R є кільцем Ерміта. Використовуючи доведення теореми 4, отримуємо наступну теорему:

Теорема 5. *Нехай R — дуо-кільце Безу, в якому більш ніж зліченна кількість максимальних правих ідеалів, а довільний ненульовий елемент, який не належить радикалу Джекобсона, міститься не більш ніж в зліченному числі максимальних правих ідеалів. Тоді R — кільце елементарних дільників.*

Теорема 6. *Цілозамкнене справа, напівспадкове справа праве квазідуо-кільце Безу є правим кільцем Ерміта.*

Доведення. З напівспадковості кільця R випливає, що R — редуковане кільце. З твердження 2.3 праці [2] випливає, що R — ліве дуо-кільце. А з твердження 5 праці [6] випливає, що R — праве кільце Ерміта. Теорему доведено.

Теорема 7. *Праве квазідуо-кільце Безу, факторкільце якого по первинному радикалу є кільцем Голді, є прямою сумою областей Безу, а отже, і кільцем Ерміта.*

Доведення. З твердження 1 праці [3] випливає, що $R/N(R)$ — скінченна пряма сума областей: $R = \bar{R}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{R}_n$. Тому існують такі попарно ортогональні ідемпотенти $\bar{e}_i \in \bar{R}_i$, що $\bar{e}_1 + \cdots + \bar{e}_n = \bar{1}$, де $\bar{1}$ — одиниця кільця $R/N(R)$.

Піднявши ідемпотенти за модулем $N(R)$, знаходимо такі ідемпотенти $e_1, \ldots, e_n \in R$, що $1 - (e_1 + \cdots + e_n) \in N(R)$. Це можливо, коли $e_1 + \cdots + e_n = 1$. Звідси $R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$. З умов, накладених на кільце R випливає, що e_i — центральні ідемпотенти і ануляторні ідеали породжуються ідемпотентами. Тому e_iR — нерозкладні кільця, так як містять лише тривіальні ідемпотенти.

Звідси отримуємо, що e_iR — області Безу. Отже, R — кільце Ерміта. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V.66. – P.467–491.
2. Туганбаев А.А. *Целозамкнутые кольца* Матем. сб. – 1981. – Т.115, Вып.4. – С.544–559.
3. Туганбаев А.А. *Дистрибутивные нетеровы кольца* Вестн. Московского универ. сер. 1. – 1980. – №2. – С.30–34.
4. Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я. *Дистрибутивные области с элементарными делителями* Укр. матем. ж. – 1990. – Т.42, №7. – С.1000–1004.
5. Забавський Б.В. *Про комутативні кільця елементарних дільників* Вісн. Львівського універ. – 1990. – Вип.34. – С.53–54.
6. Забавський Б.В. *Про PP-квазідуо-кільця елементарних дільників* Алгера і топологія: тематичний зб. наук. праць. – Київ, 1993. – С.40–49.
7. Henriksen M. *Some remarks about elementary divisors rings* Mich. Math. J. – 1955/56. – V.3. – P.159–163.
8. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisors rings* Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V.82. – P.362–365.

Львівський університет, мех.-матем. ф-т.

Надійшло 10.10.1996