

УДК 515.12

## ПРО МАЙЖЕ НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Б.М. БОКАЛО, О.П. МАЛАНЮК

В.М. Bokalo, О.Р. Malanyuk. *On almost continuous maps*, Matematychni Studii, **9**(1998) 90–93.

A map  $f: X \rightarrow Y$  is called almost continuous if every nonempty subspace  $A$  in  $X$  contains a point of continuity of the map  $f|_A: A \rightarrow f(A)$ . It is proved that the hereditary Lindelöf number is preserved by almost continuous maps and that every compact almost continuous image of a space with countable net is second countable.

Позначення і термінологія в основному такі, як в [1], [5]. Всі топологічні простори, які розглядаються в статті, вважаються гаусдорфовими, якщо не уточнюються більш конкретно аксіоми віддільності.

## 1.

Нехай  $X$  і  $Y$  — топологічні простори.

**1.1. Означення.** Назвемо відображення  $f: X \rightarrow Y$  *майже неперервним*, якщо в кожному непорожньому підпросторі  $A$  простору  $X$  знайдеться точка, в якій відображення  $f|_A: A \rightarrow f(A)$  неперервне.

Відома теорема.

**1.2. Теорема [3].** *Нехай  $f: X \rightarrow Y$  — майже неперервне відображення простору  $X$  в регулярний простір  $Y$ , тоді в кожній непорожній множині  $A \subset X$  множина точок неперервності відображення  $f|_A: A \rightarrow f(A)$  має непорожню внутрішність в підпросторі  $A$ .*

Нехай  $(X, \tau)$  — простір дійсних чисел із звичайною топологією  $\tau$ , а  $Y = (X, \tau')$ , де  $\tau'$  — топологія на  $X$ , передбазою якої є всі множини звичайної топології  $\tau$  і множина раціональних чисел. Легко бачити, що тотожне відображення з  $X$  в  $Y$  майже неперервне і множина точок неперервності цього відображення є множина іраціональних чисел. Очевидно, що  $Y$  — не регулярний простір і, що множина іраціональних чисел в звичайній топології має порожню внутрішність. Тому припущення регулярності простору  $Y$  у формулюванні теореми 1.2 суттєве.

Нагадаємо [4], що відображення  $f: X \rightarrow Y$  називається *слабо-розривним*, якщо для довільної множини  $A \subset X$  звуження  $f|_A$  має ніде не щільну в топологічному просторі  $A$  множину точок розриву.

Очевидно, що кожне слабо-розривне відображення є майже неперервним.

**1.3. Наслідок.** *Кожне майже неперервне відображення в регулярний простір є слабо-розривним.*

*Доведення.* Нехай  $f: X \rightarrow Y$  — майже неперервне відображення. Достатньо показати, що множина  $M$  точок неперервності відображення  $f: X \rightarrow Y$  має непорожню всюди щільну в  $X$  внутрішність. Те, що  $\text{Int } M \neq \emptyset$ , випливає з попередньої теореми. Покажемо, що  $[\text{Int } M] = X$ . Нехай це не виконується, тоді  $U = X \setminus [\text{Int } M] \neq \emptyset$ . Через  $U_0$  позначимо множину точок неперервності відображення  $f|_U: U \rightarrow f(U)$ . Тоді згідно теореми 1.2  $V = \text{Int}_U U_0 \neq \emptyset$ . Очевидно, що множина  $V$  відкрита в  $X$ . Також, легко бачити, що всі точки з множини  $V$  є точками неперервності відображення  $f: X \rightarrow Y$ , а тому  $V \subset \text{Int } M$ . А це суперечить тому, що  $V \subset U = X \setminus [\text{Int } M]$ . Наслідок доведено.

Очевидно, що кожне майже неперервне відображення є точково розривне на довільній замкненій множині (див. [6]), тобто, в кожній замкненій підмножині існує точка неперервності. Навпаки, взагалі кажучи, не правильно. Розглянемо на дійсній прямій дві топології:  $\tau_1$  — звичайна топологія і  $\tau_2$  — топологія стрілки. Тоді тотожне відображення  $\text{id}: (R, \tau_1) \rightarrow (R, \tau_2)$  є точково розривне на довільній замкненій множині, але не є майже неперервним.

## 2.

Нехай  $f: X \rightarrow Y$  — майже неперервне відображення. Проведемо трансфінітну побудову по всіх ординалах, які менші за  $|X|^+$ .

Покладемо  $X_0 = \{x \in X \mid f: X \rightarrow Y \text{ неперервне в точці } x\}$  і нехай  $X^0 = X \setminus X_0$ . Далі покладемо  $X_1 = \{x \in X_0 \mid f|_{X_0}: X^0 \rightarrow Y \text{ неперервне в точці } x\}$ , а  $X^1 = X^0 \setminus X_1$  і т.д. Нехай для всіх  $\alpha < \beta$  побудовані  $X_\alpha$  і  $X^\alpha$ . Якщо  $\beta = \alpha + 1$ , тоді  $X_\beta = \{x \in X^\alpha \mid f|_{X^\alpha}: X^\alpha \rightarrow Y \text{ неперервне в точці } x\}$  і  $X^\beta = X^\alpha \setminus X_\beta$ . Якщо  $\beta$  — граничний ординал, то покладемо  $P^\beta = \bigcap \{X^\alpha \mid \alpha < \beta\}$ . Тоді  $X_\beta = \{x \in P^\beta \mid f|_{P^\beta}: P^\beta \rightarrow Y \text{ неперервне в точці } x\}$  і  $X^\beta = P^\beta \setminus X_\beta$ . Так як  $f$  — майже неперервне відображення, то існує такий ординал  $\beta_0$ , що  $X^{\beta_0} = \emptyset$ . Цей ординал  $\beta_0$  назвемо індексом майже неперервного відображення  $f: X \rightarrow Y$  і позначимо  $i(f, X, Y)$ ; або  $i(f)$ , якщо відомо з якого простору і в який діє відображення. Очевидно, що  $X = \bigcup \{X_\alpha \mid \alpha < i(f)\}$ . Таке зображення простору  $X$  у вигляді об'єднання підпросторів  $X_\alpha$  назвемо розкладом простору  $X$  по неперервності відображення  $f$ .

Нагадаємо, що число Ліндельофа  $l(X)$  простору  $X$ , це найменший кардинал  $\tau$  такий, що з довільного відкритого покриття простору  $X$  можна вибрати підпокриття потужності не більшої ніж  $\tau$ , а наслідкове число Ліндельофа  $hl(X) = \sup \{l(Y) \mid Y \subset X\}$ .

Відомо, що неперервний образ компакта є компакт, і що  $l(Y) \leq l(X)$ , якщо  $Y$  є неперервний образ простору  $X$ . Для майже неперервних відображень, це, взагалі кажучи, не так.

**2.1. Приклад.** Нехай  $X_\tau = X \cup *$  — одноточкова компактифікація Александрова дискретного простору  $X$  потужності  $\tau$ . Тоді тотожнє відображення  $X_\tau$  на  $X_\tau$  з дискретною топологією буде майже неперервним.

Проте має місце теорема.

**2.2. Теорема.** Нехай  $f: X \rightarrow Y$  — майже неперервне відображення простору  $X$  на простір  $Y$ , тоді  $hl(Y^n) \leq hl(X^n)$ , для довільного  $n \in \mathbb{N}$ .

Для доведення теореми 2.2 нам потрібні будуть.

**2.3. Теорема** [1]. Для довільного простору  $X$   $hl(X) = \sup\{|Y| \mid Y \subset X \text{ і } Y \text{ розріджений}\}$ .

Нагадаємо, що простір  $X$  називається *розрідженим*, якщо в будь-якому його підпросторі існує ізольована точка.

**2.4. Лема.** Нехай  $f: X \rightarrow Y$  — майже неперервне і взаємнооднозначне відображення простору  $X$  на розріджений простір  $Y$ , тоді  $X$  розріджений.

*Доведення.* Оскільки звуження майже неперервного відображення на підпростір є майже неперервним, то достатньо показати, що в просторі  $X$  існує ізольована точка. Через  $M$  позначимо множину точок неперервності в  $X$ , тоді  $f|_M: M \rightarrow f(M)$  є неперервним і взаємнооднозначним. Візьмемо ізольовану точку  $y_0$  в  $f(M)$ , тоді  $f^{-1}(y_0)$  є ізольована в  $M$ . Оскільки  $M$  всюди щільна в  $X$ , то точка  $f^{-1}(y_0)$  є ізольована в  $X$ , що і потрібно було довести. Лему доведено.

Якщо дано два відображення  $f: X \rightarrow Z$  і  $g: Y \rightarrow T$ , то декартовий добуток відображень  $f \times g$  є відображення множини  $X \times Y$  в множину  $Z \times T$ , яке визначається наступним правилом  $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ . Очевидно, що декартовий добуток неперервних відображень є неперервне відображення.

Має місце аналогічна лема.

**2.5. Лема.** Нехай  $f: X \rightarrow Z$  і  $g: Y \rightarrow T$  — майже неперервні відображення, тоді відображення  $f \times g: X \times Y \rightarrow Z \times T$  є майже неперервним.

*Доведення.* Нехай  $X = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha < i(f)\}$  — розклад простору  $X$  по неперервності відображення  $f$ .  $Y = \bigcup\{Y_\beta \mid \beta < i(g)\}$  — розклад простору  $Y$  по неперервності відображення  $g$ . Нехай  $A \subset X \times Y$  — довільна підмножина. Потрібно показати, що в просторі  $A$  існує точка неперервності відображення  $f \times g|_A: A \rightarrow f \times g(A)$ . Без втрати загальності можна вважати, що проекція множини  $A$  на простір  $X$  в перетині з множиною точок неперервності  $X_0$  відображення  $f$  є непорожньою множиною, тобто  $\prod_x(A) \cap X_0 \neq \emptyset$ . Для кожного  $x \in \prod_x(A) \cap X_0$  виберемо  $\beta_x = \min\{\beta < i(g) \mid (x \times Y_\beta) \cap A \neq \emptyset\}$ . Нехай  $\beta_0 = \min\{\beta_x \mid x \in \prod_x(A) \cap X_0\}$ . Покажемо, що кожна точка множини  $(X_0 \times Y_{\beta_0}) \cap A$  є точкою неперервності відображення  $f \times g|_A: A \rightarrow f \times g(A)$ . Візьмемо довільну точку  $(x_0, y_0) \in A \cap (X_0 \times Y_{\beta_0})$  і довільний окіл  $O f(x_0) \times O g(y_0)$  точки  $f \times g(x_0, y_0)$ . Оскільки  $x_0 \in X_0$ , то існує такий окіл точки  $O x_0$  в просторі  $X$ , що  $f(O x_0) \subset O f(x_0)$ . Оскільки  $y_0 \in Y_{\beta_0}$ , то існує такий окіл  $O y_0$  точки  $y_0$  в  $Y$ , що  $(y_0 \in g(O y_0 \cap (\bigcup\{Y_\beta \mid \beta_0 \leq \beta < i(g)\}))) \subset O g(y_0)$ . Отримаємо, що  $f \times g(O y_0 \times O x_0 \cap A) \subset f(O x_0) \times f(O y_0 \cap A) \subset f(x_0) \times g(O y_0 \cap (\bigcup\{Y_\beta \mid \beta_0 \leq \beta < i(g)\}))) \subset O f(x) \times O g(y_0)$ , що і потрібно було довести.

*Доведення теореми 2.2..* Враховуючи лему 2.5, нам достатньо показати, що  $hl(Y) \subset hl(X)$ , якщо  $Y$  є майже неперервним образом простору  $X$ . Доводимо від супротивного. Нехай  $hl(Y) > hl(X)$ . Тоді згідно теореми 2.3 в  $Y$  існує розріджений простір  $Z$  такий, що  $hl(Y) = |Z|$ . Для кожної точки  $z \in Z$  зафіксуємо довільну точку  $x_z \in f^{-1}(z)$  і покладемо  $A = \{x_z \mid z \in Z\}$ . Відображення  $f|_A: A \rightarrow Z$  є майже неперервним і взаємнооднозначним. Оскільки  $Z$  розріджений, то згідно леми 2.4 підпростір  $A$  є розріджений і  $|A| = |Z| > hl(X)$ , а це суперечить теоремі 2.3. Теорему доведено.

Нагадаємо, що простір  $X$  називається *ліндельфовим  $P$ -простором*, якщо його можна досконало відобразити на простір із зліченною базою. Непорожні образи ліндельфових  $P$ -просторів називаються *ліндельфовими  $\Sigma$ -просторами*.

**2.6. Теорема.** *Нехай  $f: X \rightarrow Y$  — майже неперервне відображення простору  $X$  на ліндельфовий  $\Sigma$ -простір  $Y$ , тоді  $pw(Y) \leq hl(X^2)$ . Зокрема, якщо  $Y$  — компакт, то  $w(Y) \leq hl(X^2)$ .*

*Доведення.* Згідно теореми 2.2  $hl(Y^2) \leq hl(X^2)$ . Значить (див. [1, теорема 2.1.8]), простір  $Y$  ущільнюється на тихоновський простір, вага якого менша або рівна  $hl(X^2)$ . А так як  $Y$  є ліндельфовий  $\Sigma$ -простір, то  $pw(Y) \leq hl(X^2)$ , (див. [2, теорема 2.6.2]).

**2.7. Наслідок.** *Якщо компакт  $X$  є майже неперервним образом простору із зліченною сіткою, то  $X$  — метризований компакт.*

## ЛІТЕРАТУРА

1. Архангельский А.В. *Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты* УМН. — 1978. — Т.33, вып.6. — С.29–84.
2. Архангельский А.В. *Топологические пространства функций*. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
3. Архангельский А.В., Бокало Б.М. *Касание топологий и тангенциальные свойства топологических пространств* ТММО. — 1992. — Т.54. — С.160–165.
4. Винокур В.А. *Строгая регуляризованость разрывных функций* ДАН СССР. — 1985. — Т.281, №2.
5. Энгелькинг Р. *Общая топология*. — М.: Мир, 1986.
6. Куратовский К. *Топология*. — М.: Мир. Т.1, 1966; М.: Мир. Т.2, 1969.
7. Nagami K.  *$\Sigma$ -spaces* Fund. Math. — 1969. — V.65, №2. — P.169–192.

Львівський університет, мех.-матем. ф-т.

Надійшло 20.04.1997  
Після переробки 12.11.1997