УДК 517.95

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У СКЛАДЕНІЙ ОБЛАСТІ

М.І. Іванчов, С.М. Ковальчук

M.I. Ivanchov, S.M. Koval'chuk. *Inverse problems for the heat equation in composite region*, Matematychni Studii, **9**(1998) 53–69.

We consider inverse problems for finding an unknown heat conduction coefficient of the half-space body situated under the layer with known heat characteristics. Existense and uniqueness theorems are established.

У роботі розглядаються обернені задачі визначення коефіцієнта температуропровідності невідомого матеріалу, який міститься під шаром матеріалу з відомими теплофізичними характеристиками. Особливістю таких задач є відсутність доступу до невідомого матеріалу, що унеможливлює визначення потрібних характеристик матеріалу експериментальним шляхом, а також вимірювання температури і теплового потоку на поверхні чи всередині матеріалу, що дало б змогу сформулювати стандартну обернену задачу. Подібна задача вперше була розглянута у роботі Джонса [1] для рівнянь

$$v_t = a(t)v_{xx}, \qquad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < T, \tag{0.1}$$

$$u_t = b\,(t)\,u_{xx}, \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < t < T \tag{0.2}$$

з заданим коефіцієнтом $a(t)$ і невідомим коефіцієнтом $b(t)$, де припускалось, що при $x = 0$ значення $u(x,t)$ і $v(x,t)$ є відомими і теплові потоки рівні. Отриманий результат був узагальнений в [2] на випадок систем спеціального вигляду. В роботах [3,4] досліджувались питання єдиності розв'язку оберненої задачі знаходження кусково–сталих коефіцієнтів температуропровідності у випадку однієї просторової змінної. Можливість однозначного визначення коефіцієнта $b(t)$ в рівнянні (0.2) у випадку, коли рівняння (0.1) розглядається для $x \in (-h, 0)$ і задаються класичні умови спряження при $x = 0$ та умова перевизначення у вигляді додаткової крайової умови при $x = -h$, встановлено у роботі [5].

У даній роботі результати, отримані в [5], поширені на багатовимірне рівняння теплопровідності з залежним від часу невідомим коефіцієнтом температуропровідності. Розглянуто два можливих формулювання обернених задач. В першій задачі умови спряження є класичними і на зовнішній границі задано інтегральну умову перевизначення. В другій задачі одна з умов спряження є інтегральною, а умова перевизначення — додатковою граничною умовою на зовнішній границі. Встановлено умови існування та єдиності розв'язків вказаних обернених задач.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

1.

Введемо позначення:

$$\Omega_1 = \left\{(x', x_n, t) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n \in (-h, 0)\,,\ t \in (0, T)\right\},$$
$$\Omega_2 = \{(x', x_n, t) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n \in (0, \infty)\,,\ t \in (0, T)\},$$
$$\mathbb{R}^n_+ = \left\{(x', x_n) :\ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n \in (0, \infty)\right\},$$
$$D_T = \{(x', t) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ t \in (0, T)\}, \quad x = (x', x_n)\,.$$

В області $\Omega_1 \cup \Omega_2$ розглянемо рівняння

$$u_t = \triangle u + f\,(x, t)\,, \quad (x, t) \in \Omega_1, \tag{1.1}$$
$$v_t = a\,(t)\,\triangle\, v + g\,(x, t)\,, \quad (x, t) \in \Omega_2, \tag{1.2}$$

з початковими умовами

$$u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1} \times [-h, 0]\,, \tag{1.3}$$
$$v\,(x, 0) = \psi\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.4}$$

крайовою умовою

$$u_{x_n}\,(x', -h, t) = \nu\,(x', t)\,, \quad (x', t) \in \overline{D_T}, \tag{1.5}$$

та умовами спряження

$$u\,(x', 0, t) = v\,(x', 0, t)\,, \quad (x', t) \in \overline{D_T}, \tag{1.6}$$
$$u_{x_n}\,(x', 0, t) = a\,(t)\,v_{x_n}\,(x', 0, t)\,, \quad (x', t) \in \overline{D_T}. \tag{1.7}$$

Будемо розглядати такі задачі:

Задача (A). Знайти функції $(a\,(t)\,, u\,(x, t)\,, v\,(x, t)) \in C\,[0, T] \times C^{2,1}\,(\Omega_1) \cap C^{1,0}\left(\overline{\Omega_1}\right) \times C^{2,1}\,(\Omega_2) \cap C^{1,0}\left(\overline{\Omega_2}\right)$ [6], $a\,(t) > 0,\ t \in [0, T,]$, що задовольняють умови (1.1)–(1.7) та інтегральну умову перевизначення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u\,(x', -h, t)\,dx' = \mu\,(t)\,, \quad t \in [0, T]\,. \tag{1.8}$$

Задача (B). Знайти функції $(a\,(t)\,, u\,(x, t)\,, v\,(x, t)) \in C\,[0, T] \times C^{2,1}\,(\Omega_1) \cap C^{1,0}\left(\overline{\Omega_1}\right) \times C^{2,1}\,(\Omega_2) \cap C^{1,0}\left(\overline{\Omega_2}\right),\ a\,(t) > 0,\ t \in [0, T,]$, що задовольняють умови (1.1)–(1.5), умови спряження (1.7) та

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u\,(x', 0, t)\,dx' = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} v\,(x', 0, t)\,dx', \quad t \in [0, T]\,, \tag{1.9}$$

і умову перевизначення

$$u\,(x', -h, t) = \varkappa\,(x', t)\,, \quad (x't) \in D_T. \tag{1.10}$$

Впродовж всієї роботи будемо вважати, що виконуються
Умови (С):

1) $\varphi(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^{n-1} \times [-h,0]\right)$, $\psi(x) \in C^2\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $f(x,t) \in C^{1,0}\left(\overline{\Omega_1}\right)$, $g(x,t) \in C^{1,0}\left(\overline{\Omega_2}\right)$, $\nu(x',t), \varkappa(x',t) \in C^{1,0}\left(\overline{D_T}\right)$, $\mu(t) \in C^1[0,T]$;
2) функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\nu(x',t)$, $\varkappa(x',t)$ абсолютно інтегровні за змінною x' в $\mathbb{R}^{n-1}$;
$\Phi(x_n) \in C^1[-h,0]$, $\Psi(x_n) \in C^1[0,\infty)$, $F(x_n,t) \in C^{1,0}\big([-h,0]\times[0,T]\big)$, $N(t), M(t) \in C^1[0,T]$, $G(x_n,t) \in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$, де

$$\Phi(x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x)\,dx', \quad \Psi(x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(x)\,dx', \quad F(x_n,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x,t)\,dx',$$

$$G(x_n,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x,t)\,dx', \quad N(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \nu(x',t)\,dx', \quad M(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varkappa(x',t)\,dx';$$

3) $\varphi(x',0) = \psi(x',0)$, $\varphi_{x_n}(x',0) = \psi_{x_n}(x',0)$, $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$, $\nu(x',0) = \varphi_{x_n}(x',-h)$, $\varkappa(x',0) = \varphi(x',0)$, $\mu(0) = \Phi(-h)$.

2. (A) і (B)

Вважаючи відомими значення

$$u_{x_n}(x',0,t) = r(x',t), \quad (x',t) \in \overline{D_T}, \tag{2.1}$$

та

$$a(t)\,v_{x_n}(x',0,t) = r(x',t), \quad (x',t) \in \overline{D_T}, \tag{2.2}$$

знайдемо за допомогою функції Гріна розв'язки задач (1.1), (1.3), (1.5), (2.1) та (1.2), (1.4), (2.2):

$$u(x,t) = \frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r(\xi',\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2 + (x_n+2kh)^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi' -$$
$$- \frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \nu(\xi',\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2 + (x_n+(2k+1)h)^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi' +$$
$$+ \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^0 \varphi(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2 + (x_n-\xi_n+2kh)^2}{4t}\right) +\right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2 + (x_n+\xi_n+2kh)^2}{4t}\right)\right) d\xi_n + \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^n} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^0 f(\xi,\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2 + (x_n-\xi_n+2kh)^2}{4(t-\tau)}\right) +\right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2 + (x_n+\xi_n+2kh)^2}{4(t-\tau)}\right)\right) d\xi_n, \tag{2.3}$$

$$v\left(x,t\right)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi\theta(t)}\right)^{n}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\psi\left(\xi\right)\left(\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+\left(x_{n}-\xi_{n}\right)^{2}}{4\theta(t)}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+\left(x_{n}+\xi_{n}\right)^{2}}{4\theta(t)}\right)\right)d\xi+\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{n}}\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\left(\theta(t)-\theta(\tau)\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}g\left(\xi,\tau\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+\left(x_{n}-\xi_{n}\right)^{2}}{4\left(\theta(t)-\theta(\tau)\right)}\right)+\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+\left(x_{n}+\xi_{n}\right)^{2}}{4\left(\theta(t)-\theta(\tau)\right)}\right)\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}r\left(\xi',\tau\right)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+{x_{n}}^{2}}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\xi',\tag{2.4}$$

де

$$\theta\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}a\left(\tau\right)d\tau,\quad |x'-\xi'|^{2}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i}-\xi_{i}\right)^{2}.$$

Підставимо (2.3), (2.4) в умови (1.8) і (1.6):

$$\int\limits_{0}^{t}\frac{R\left(\tau\right)}{\sqrt{t-\tau}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(2k+1\right)^{2}h^{2}}{4\left(t-\tau\right)}\right)d\tau=q_{1}\left(t\right),\tag{2.5}$$

$$-\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}r\left(\xi',\tau\right)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\xi'+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\left(\theta(t)-\theta(\tau)\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}g\left(\xi,\tau\right)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+\xi_{n}^{2}}{4\left(\theta(t)-\theta(\tau)\right)}\right)d\xi-$$

$$-\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}r\left(\xi',\tau\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+4k^{2}h^{2}}{4(t-\tau)}\right)d\xi'+$$

$$+\frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}}\left(t\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\psi\left(\xi\right)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^{2}+\xi_{n}^{2}}{4\theta(t)}\right)d\xi=q_{2}\left(x',t\right),\tag{2.6}$$

де

$$q_{1}\left(t\right)=\sqrt{\pi}\mu\left(t\right)-\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{-h}^{0}\Phi\left(\xi_{n}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(\xi_{n}+\left(2k+1\right)h\right)^{2}}{4t}\right)d\xi_{n}-$$

$$-\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-h}^{0}F\left(\xi_{n},\tau\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(\xi_{n}+\left(2k+1\right)h\right)^{2}}{4(t-\tau)}\right)d\xi_{n}+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\frac{N\left(\tau\right)}{\sqrt{t-\tau}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^{2}h^{2}}{t-\tau}\right)d\tau,$$

$$q_2\left(x',t\right)=\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}d\xi'\int\limits_{-h}^{0}\varphi\left(\xi\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Bigg(-\frac{|x'-\xi'|^2+\left(\xi_n+2kh\right)^2}{4t}\Bigg)d\xi_n-$$

$$-\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\nu\left(\xi',\tau\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Bigg(-\frac{|x'-\xi'|^2+(2k+1)^2h^2}{4\left(t-\tau\right)}\Bigg)d\xi'+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}d\xi'\int\limits_{-h}^{0}f\left(\xi,\tau\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Bigg(-\frac{|x'-\xi'|^2+\left(\xi_n+2kh\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\Bigg)d\xi_n,$$

$$R\left(t\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}r\left(x',t\right)dx'. \tag{2.7}$$

При цьому було враховано, що

$$\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4t}\right)d\xi'=1.$$

Отримали систему рівнянь (2.5), (2.6) відносно невідомих $a(t)$ та $r(x',t)$. Легко переконатись, що система (2.5), (2.6) є еквівалентною задачі (A).

Підставимо (2.3), (2.4) в умови (1.9), (1.10):

$$\int\limits_0^t R(\tau)\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)}}+\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2h^2}{t-\tau}\right)\Bigg)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)}}\int\limits_0^{\infty}G\left(\xi_n,\tau\right)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)\right)}\right)d\xi_n-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\theta\left(t\right)}}\int\limits_0^{\infty}\Psi\left(\xi_n\right)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\theta\left(t\right)}\right)d\xi_n=q_3\left(t\right), \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}r\left(\xi',\tau\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Bigg(-\frac{|x'-\xi'|^2+\left(2k+1\right)^2h^2}{4\left(t-\tau\right)}\Bigg)d\xi'=$$

$$=q_4\left(x',t\right), \tag{2.9}$$

де

$$q_3\left(t\right)=-\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{-h}^{0}\Phi\left(\xi_n\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Bigg(-\frac{\left(\xi_n+2kh\right)^2}{4t}\Bigg)d\xi_n-\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-h}^{0}F\left(\xi_n,\tau\right)\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Bigg(-\frac{\left(\xi_n+2kh\right)^2}{4(t-\tau)}\Bigg)d\xi_n+\int\limits_0^t\frac{N\left(\tau\right)}{\sqrt{t-\tau}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2k+1)^2h^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$q_4\left(x',t\right) = \varkappa\left(x',t\right) - \frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^0 f\left(\xi,\tau\right)\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{|x'-\xi'|^2+(\xi_n+(2k+1)h)^2}{4(t-\tau)}\Big)d\xi_n -$$

$$-\frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^0 \varphi\left(\xi\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{|x'-\xi'|^2+(\xi_n+(2k+1)h)^2}{4t}\Big)d\xi_n +$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\nu\left(\xi',\tau\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{|x'-\xi'|^2+4k^2h^2}{4\left(t-\tau\right)}\Big)d\xi'. \qquad (2.10)$$

Система рівнянь (2.8), (2.9) є еквівалентною задачі (B).

3. ’ ()

Застосуємо перетворення Лапласа до обидвох частин рівняння (2.5). Позначаючи перетворення Лапласа через

$$\tilde{p}\left(s\right) = \int\limits_0^\infty p\left(x\right)\exp\left(-xs\right)dx$$

і використовуючи його властивості, отримуємо

$$2\tilde{R}\left(s\right)\sqrt{\frac{\pi}{s}}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left(-\left(2k+1\right)h\sqrt{s}\right) = \tilde{q}_1\left(s\right). \qquad (3.1)$$

Звідси

$$\tilde{R}\left(s\right) = \tilde{q}_1\left(s\right)\sqrt{\frac{s}{\pi}}\ \mathrm{sh}\ h\sqrt{s}. \qquad (3.2)$$

Встановимо умови, при яких з (3.2) можна визначити неперервну функцію $R(t)$. Для цього знаходимо з (2.7)

$$\tilde{q}_1(s) = \sqrt{\pi}\tilde{\mu}\left(s\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{s}\int\limits_{-h}^0\Big(\Phi\left(\xi_n\right)+\tilde{F}\left(\xi_n,s\right)\Big)\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\exp\left(-\sqrt{s}\left(\xi_n+\left(2k-1\right)h\right)\right)+$$

$$+\exp\left(-\sqrt{s}\left(\left(2k-1\right)h-\xi_n\right)\right)\Big)d\xi_n + \tilde{N}\left(s\right)\sqrt{\frac{\pi}{s}}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-2kh\sqrt{s}\right)\Big).$$

Тоді

$$\tilde{R}\left(s\right) = \frac{\sqrt{s}}{2}\left(\exp\left(h\sqrt{s}\right)-\exp\left(-h\sqrt{s}\right)\right)\tilde{\mu}\left(s\right) + \frac{1}{2}\left(\exp\left(h\sqrt{s}\right)+\exp\left(-h\sqrt{s}\right)\right)\tilde{N}\left(s\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-h}^0\Big(\Phi\left(\xi_n\right)+\tilde{F}\left(\xi_n,s\right)\Big)\left(\exp\left(-\xi_n\sqrt{s}\right)+\exp\left(\xi_n\sqrt{s}\right)\right)d\xi_n. \qquad (3.3)$$

Інтегруючи частинами, перетворимо інтеграл

$$\int\limits_{-h}^{0}\Big(\Phi(\xi_n)+\tilde{F}\,(\xi_n,s)\Big)\left(\exp\left(-\xi_n\sqrt{s}\right)+\exp\left(\xi_n\sqrt{s}\right)\right)d\xi_n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\exp\left(h\sqrt{s}\right)-\exp\left(-h\sqrt{s}\right)\right)\Big(\Phi\left(-h\right)+\tilde{F}\left(-h,s\right)\Big)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{s}}\int\limits_{-h}^{0}\Big(\Phi'\left(\xi_n\right)+\tilde{F}_{\xi_n}\left(\xi_n,s\right)\Big)\left(\exp\left(-\xi_n\sqrt{s}\right)-\exp\left(\xi_n\sqrt{s}\right)\right)d\xi_n.$$

З властивостей перетворення Лапласа маємо

$$\tilde{\mu}\left(s\right)=\frac{1}{s}\left(\tilde{\mu'}\left(s\right)+\mu\left(0\right)\right).$$

Враховуючи отримані рівності, зводимо (3.3) до вигляду

$$\tilde{R}\left(s\right)=\frac{1}{2}\exp\left(h\sqrt{s}\right)\Bigg(\tilde{N}\left(s\right)+\frac{\tilde{\mu'}\left(s\right)-\tilde{F}\left(-h,s\right)}{\sqrt{s}}-\frac{1}{\sqrt{s}}\int\limits_{-h}^{0}\Big(\Phi'\left(\xi_n\right)+\tilde{F}_{\xi_n}\left(\xi_n,s\right)\Big)\times$$

$$\times\exp\left(-(h+\xi_n)\sqrt{s}\right)d\xi_n\Bigg)+\frac{1}{2}\exp\left(-h\sqrt{s}\right)\Bigg(\tilde{N}\left(s\right)+\frac{\tilde{F}\left(-h,s\right)-\tilde{\mu'}\left(s\right)}{\sqrt{s}}\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{s}}\int\limits_{-h}^{0}\Big(\Phi'\left(\xi_n\right)+\tilde{F}_{\xi_n}\left(\xi_n,s\right)\Big)\exp\left(\xi_n\sqrt{s}\right)d\xi_n. \tag{3.4}$$

Зважаючи на необхідну ознаку зображення, з (3.4) випливає, що рівняння (2.5) має неперервний розв'язок тоді і тільки тоді, коли існує неперервна функція $\gamma(t)$ така, що

$$\tilde{\gamma}(s)=\frac{1}{2}\exp\left(h\sqrt{s}\right)\Bigg(\tilde{N}\left(s\right)+\frac{\tilde{\mu'}\left(s\right)-\tilde{F}\left(-h,s\right)}{\sqrt{s}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{s}}\int\limits_{-h}^{0}\Big(\Phi'\left(\xi_n\right)+\tilde{F}_{\xi_n}\left(\xi_n,s\right)\Big)\exp\left(-\left(h+\xi_n\right)\sqrt{s}\right)d\xi_n\Bigg),$$

або, перейшовши до оригіналів,

$$\int\limits_{0}^{t}\frac{\mu'\left(\tau\right)-F\left(-h,\tau\right)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau-\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{-h}^{0}\Phi'\left(\xi_n\right)\exp\Bigg(-\frac{\left(h+\xi_n\right)^2}{4t}\Bigg)d\xi_n-$$

$$-\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-h}^{0}F_{\xi_n}\left(\xi_n,\tau\right)\exp\Bigg(-\frac{\left(h+\xi_n\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\Bigg)d\xi_n+\sqrt{\pi}N\left(t\right)=$$

$$=h\int\limits_{0}^{t}\frac{\gamma\left(\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{h^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)d\tau. \tag{3.6}$$

Умова (3.6) або еквівалентна їй умова в зображеннях (3.5) є необхідною і достатньою умовою існування розв'язку рівняння (2.5).

Підставляючи (3.5) в (3.4) і повертаючись до оригіналів, знаходимо розв'язок рівняння (2.5):

$$R(t)=\gamma(t)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{F(-h,\tau)-\mu'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{h^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau+$$
$$+\frac{h}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{N(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{h^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-h}^0\Phi'(\xi_n)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4t}\right)d\xi_n+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-h}^0F_{\xi_n}(\xi_n,\tau)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi_n. \qquad (3.7)$$

Перейдемо до розв'язування рівняння (2.6). Перетворимо його, інтегруючи по x' по $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\int\limits_0^\infty G(\xi_n,\tau)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\xi_n+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)}}\int\limits_0^\infty\Psi(\xi_n)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\theta(t)}\right)d\xi_n-\int\limits_0^t\frac{R(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}=Q(t)\,, \qquad (3.8)$$

де

$$Q(t)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}q_2(x',t)\,dx'+\int\limits_0^t\frac{R(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2h^2}{t-\tau}\right)d\tau.$$

Використовуючи формули (2.7), (3.6), (3.7) і припущення $\Phi(0)=0$, знаходимо $Q(t)$:

$$Q(t)=\int\limits_0^t\frac{\gamma(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\frac{N(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{h^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau+$$
$$+\frac{h}{4}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{h^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau+\frac{1}{2\sqrt{t}}\int\limits_{-h}^0\Phi(\xi_n)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4t}\right)d\xi_n+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-h}^0F(\xi_n,\tau)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi_n+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^tF(0,\tau)\,d\tau. \qquad (3.9)$$

Зведемо рівняння (3.8) до рівняння другого роду. Для цього покладемо в (3.8)

$t=\sigma$, домножимо на $\frac{a(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ і проінтегруємо по σ від 0 до t:

$$\int_0^t \frac{a\left(\sigma\right) d\sigma}{\sqrt{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)\right)\theta\left(\sigma\right)}} \int_0^\infty \Psi\left(\xi_n\right) \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\theta\left(\sigma\right)}\right) d\xi_n - \int_0^t \frac{a\left(\sigma\right) d\sigma}{\sqrt{\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)}} \times$$
$$\times \int_0^\sigma \frac{R\left(\tau\right) d\tau}{\sqrt{\theta\left(\sigma\right)-\theta\left(\tau\right)}} + \int_0^t \frac{a\left(\sigma\right) d\sigma}{\sqrt{\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)}} \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta\left(\sigma\right)-\theta\left(\tau\right)}} \int_0^\infty G\left(\xi_n,\tau\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\left(\theta\left(\sigma\right)-\theta\left(\tau\right)\right)}\right) d\xi_n = \int_0^t \frac{Q\left(\sigma\right) a\left(\sigma\right) d\sigma}{\sqrt{\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)}}. \quad (3.10)$$

Диференціюючи (3.10) по t і виконуючи нескладні перетворення, отримуємо рівняння відносно $a(t)$:

$$a\left(t\right) = \sqrt{\pi} R\left(t\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\theta\left(t\right)}} \int_0^\infty \Psi'\left(\xi_n\right) \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\theta\left(t\right)}\right) d\xi_n - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{Q'\left(\tau\right) d\tau}{\sqrt{\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty G_{\xi_n}\left(\xi_n,\tau\right) \xi_n \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)\right)}\right) d\xi_n \right)^{-1}, \quad (3.11)$$

де

$$Q'\left(t\right) = -\frac{h}{4} \int_0^t \frac{F\left(-h,\tau\right)-\mu'\left(\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{h^2}{4\left(t-\tau\right)}\right) d\tau + \int_0^t \frac{\gamma'\left(\tau\right) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} +$$
$$+ \frac{1}{4t^{\frac{3}{2}}} \int_{-h}^0 \Phi'\left(\xi_n\right) \xi_n \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4t}\right) d\xi_n - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{N'\left(\tau\right)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{h^2}{4\left(t-\tau\right)}\right) d\tau +$$
$$+ \sqrt{\pi} F\left(0,t\right) + \frac{1}{4} \int_0^t \frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\frac{3}{2}}} \int_{-h}^0 F_{\xi_n}\left(\xi_n,\tau\right) \xi_n \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4\left(t-\tau\right)}\right) d\xi_n,$$

а $R(t)$ визначено формулою (3.7).

Припустимо, що виконуються

Умови (D):

1) $\gamma(t) \in C[0,T] \cap C^1(0,T]$, $|\gamma'(t)| = O(t^{-\frac{1}{2}})$ при $t \to 0$;
2) $\gamma\left(t\right) \ge 0$, $\gamma'\left(t\right) \le 0$, $F\left(-h,t\right) - \mu'\left(t\right) \ge 0$, $N\left(t\right) \ge 0$, $N'\left(t\right) \ge 0$, $F\left(0,t\right) \le 0$, $t \in [0,T]$;
3) $\Phi'\left(\xi_n\right) > 0$, $\xi_n \in [-h,0]$, $\Psi'\left(\xi_n\right) > 0$, $\xi_n \in [0,\infty)$;
4) $F_{\xi_n}\left(\xi_n,t\right) \ge 0$, $(\xi_n,t) \in (-h,0) \times (0,T)$, $G_{\xi_n}\left(\xi_n,t\right) \ge 0$, $(\xi_n,t) \in (0,\infty) \times (0,T)$.

Застосуємо до рівняння (3.11) принцип Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Перш за все, з умов (D) випливає, що розв'язки рівняння (3.11) є додатними. Крім того, має місце оцінка

$$\min_{[0,T]} a(t) \geq \sqrt{\pi} \min_{[-h,0]} \Phi'(\xi_n) \left(2\sqrt{\pi} \sup_{[0,\infty]} \Psi'(\xi_n) + \right.$$
$$\left. + \left(\min_{[0,T]} a(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \max_{[0,T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left(\sup_{[0,\infty)} G_{\xi_n}(\xi_n,\tau) - Q'(\tau)\right) d\tau \right)^{-1}.$$

Звідси маємо

$$a(t) \geq a_{\min} > 0, \tag{3.12}$$

де число a_{min} визначається вихідними даними задачі і не залежить від $a(t)$. Маючи оцінку $a(t)$ знизу, з рівняння (3.11) знаходимо

$$\max_{[0,T]} a(t) \leq \sqrt{\pi} \max_{[0,T]} R(t) \left(\max_{[0,T]} a(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\min_{[0,T]} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \Psi'(\xi_n) \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4ta_{\min}}\right) d\xi_n \right)^{-1},$$

що дає оцінку $a(t)$ зверху

$$a(t) \leq a_{\max} < \infty \tag{3.13}$$

з числом a_{max}, незалежним від $a(t)$.

Запишемо рівняння (3.11) у вигляді

$$a(t) = Pa(t).$$

З оцінок (3.12), (3.13) випливає, що оператор P переводить опуклу замкнену в $C[0,T]$ множину $\mathcal{N} = \{\ a(t) \in C[0,T] :\ 0 < a_{min} \leq a(t) \leq a_{max} < \infty\}$ в себе. Переконуючись у тому, що оператор P є цілком неперервним на множині $\mathcal{N}$ аналогічно до того, як це зроблено в [5], встановлюємо існування неперервного розв'язку $a(t)$ рівняння (3.11). Підставляючи його в (2.6), отримуємо таке рівняння щодо $r(x',t)$:

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} r(\xi',\tau) \left(\frac{1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+4k^2h^2}{4(t-\tau)}\right)\right) d\xi' = q_5(x',t), \tag{3.14}$$

де

$$q_5(x',t) = q_2(x',t) - \frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}}(t)} \int_{\mathbb{R}^n_+} \psi(\xi) \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+\xi_n^2}{4\theta(t)}\right) d\xi -$$
$$- \int_0^t \frac{d\tau}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n_+} g(\xi,\tau) \exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+\xi_n^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) d\xi.$$

Зведемо рівняння (3.14) до лінійного інтегрального рівняння Вольтерра другого роду з інтегровним ядром. Для цього покладемо в (3.14) $t=\sigma$, $x'=\eta'$, домножимо на вираз

$$\frac{a(\sigma)}{(\theta(t)-\theta(\sigma))^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|x'-\eta'|^2}{4(\theta(t)-\theta(\sigma))}\right)$$

і проінтегруємо по σ і η' по області D_t. Змінюючи порядок інтегрування, отримаємо

$$\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} r(\xi',\tau)\,d\xi'\int_\tau^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{(\theta(t)-\theta(\sigma))^{\frac{n}{2}}(\theta(\sigma)-\theta(\tau))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp\left(-\frac{|x'-\eta'|^2}{4(\theta(t)-\theta(\sigma))}-\right.$$

$$\left.-\frac{|\eta'-\xi'|^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\right)d\eta'+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}} r(\xi',\tau)\,d\xi'\int_\tau^t\frac{a(\sigma)\,d\sigma}{(\theta(t)-\theta(\sigma))^{\frac{n}{2}}(\sigma-\tau)^{\frac{n}{2}}}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp\left(-\frac{|x'-\eta'|^2}{4(\theta(t)-\theta(\sigma))}-\frac{|\eta'-\xi'|^2}{4(\sigma-\tau)}\right)=q_6(x',t), \quad (3.15)$$

де

$$q_6(x',t)=\int_0^t\frac{a(\sigma)\,d\sigma}{(\theta(t)-\theta(\sigma))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} q_5(\eta',\sigma)\exp\left(-\frac{|x'-\eta'|^2}{4(\theta(t)-\theta(\sigma))}\right)d\eta'.$$

У першому інтегралі рівняння (3.15) зробимо заміну змінних, аналогічну до заміни в лемі 3 [7,с.28]:

$$z_i=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta(t)-\theta(\tau)}{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}(\eta_i-\xi_i)+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(t)-\theta(\tau))}}(\xi_i-x_i). \quad (3.16)$$

Звідси

$$\frac{|x'-\eta'|^2}{4(\theta(t)-\theta(\sigma))}+\frac{|\xi'-\eta'|^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}=|z'|^2+\frac{|x'-\xi'|^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}. \quad (3.17)$$

У другому інтегралі рівняння (3.15) зробимо таку заміну змінних:

$$\zeta_i=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta(t)-\theta(\sigma)+\sigma-\tau}{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\sigma-\tau)}}(\eta_i-x_i)+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta(t)-\theta(\sigma)}{(\theta(t)-\theta(\sigma)+\sigma-\tau)(\sigma-\tau)}}(x_i-\xi_i), \quad (3.18)$$

що дає

$$\frac{|x'-\eta'|^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)\right)}+\frac{|\xi'-\eta'|^2}{4\left(\sigma-\tau\right)}=|\zeta'|^2+\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)+\sigma-\tau\right)}. \tag{3.19}$$

Враховуючи (3.16)–(3.19), зведемо рівняння (3.15) до вигляду

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)\right)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r\left(\xi',\tau\right)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\tau\right)\right)}\right)d\xi'+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varkappa\left(\xi',\tau\right)d\xi'\int\limits_\tau^t\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)+\sigma-\tau\right)}-\frac{k^2h^2}{\sigma-\tau}\right)\times$$
$$\times\frac{a\left(\sigma\right)d\sigma}{\sqrt{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)\right)\left(\sigma-\tau\right)\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)+\sigma-\tau\right)^{n-1}}}=\frac{q_6\left(x',t\right)}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{n-1}}. \tag{3.20}$$

Подіємо на рівняння (3.20) оператором $\frac{\partial}{\partial t}-a\left(t\right)\Delta_{n-1}$ і використаємо властивості об'ємних теплових потенціалів [7]. Припускаючи тимчасово, що $a\left(t\right)\in C^1\left[0,T\right]$, отримаємо

$$r\left(x',t\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\left(t\right)\Delta_{n-1}\right)\left(\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r\left(\xi',\tau\right)d\xi'\times\right.$$
$$\times\int\limits_\tau^t\frac{a\left(\sigma\right)}{\sqrt{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)\right)\left(\sigma-\tau\right)\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)+\sigma-\tau\right)^{n-1}}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2h^2}{\sigma-\tau}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)+\sigma-\tau\right)}\right)d\sigma\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\left(t\right)\Delta_{n-1}\right)q_6\left(x',t\right). \tag{3.21}$$

Позначимо інтеграл у лівій частині (3.21) через I і подамо його у вигляді

$$I=\sqrt{a\left(t\right)}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r\left(\xi',\tau\right)d\xi'\int\limits_\tau^t\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\times$$
$$\times\frac{d\sigma}{\sqrt{\left(t-\sigma\right)\left(\sigma-\tau\right)}}+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r\left(\xi',\tau\right)d\xi'\int\limits_\tau^t\left(-\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\times\right.$$
$$\times\frac{\sqrt{a\left(t\right)}}{\sqrt{\left(t-\sigma\right)\left(\sigma-\tau\right)\left(t-\tau\right)^{n-1}}}+\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)+\sigma-\tau\right)}\right)\times$$
$$\left.\times\frac{a\left(\sigma\right)}{\sqrt{\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)\right)\left(\sigma-\tau\right)\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)+\sigma-\tau\right)^{n-1}}}\right)d\sigma+$$
$$+2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r\left(\xi',\tau\right)d\xi'\int\limits_\tau^t\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4\left(\theta\left(t\right)-\theta\left(\sigma\right)+\sigma-\tau\right)}-\frac{k^2h^2}{\sigma-\tau}\right)\times$$

$$\times \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\sigma-\tau)(\theta(t)-\theta(\sigma)+\sigma-\tau)^{n-1}}} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{3.22}$$

Знайдемо

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a(t)\,\Delta_{n-1}\right) I_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{n-1}\right) I_1 + (1-a(t))\Delta_{n-1} I_1 =$$
$$= \pi\sqrt{a(t)}\,r(x',t) + (1-a(t))\Delta_{n-1} I_1 + \frac{\pi}{2} a'(t)\, I_1. \tag{3.23}$$

Ядра інтегралів I_2 та I_3 мають меншу особливість, ніж I_1, і при застосуванні до них оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - a(t)\,\Delta_{n-1}$ не дають позаінтегральних членів. Тому підставляючи (3.22) та (3.23) в (3.21) і проводячи необхідні оцінки, отримуємо рівняння

$$\left(1+\sqrt{a(t)}\right) r(x',t) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x',t,\xi',\tau)\, r(\xi',\tau)\, d\xi' = q(x',t), \tag{3.24}$$

ядро якого має інтегровну особливість. Легко переконатись, що умови (C) забезпечують належність $q(x',t)$ до $C^{1,0}(\overline{D_T})$. Отже, існує розв'язок $r(x',t) \in C\left(\overline{D_T}\right)$ рівняння (3.24), який є одночасно і розв'язком рівняння (3.14). Що стосується припущення $a(t) \in C^1[0,T]$, то наближаючи $a(t) \in C[0,T]$ послідовністю функцій $\{a_n(t)\} \in C^1[0,T]$, підставляючи їх в (3.14) і переходячи до границі при $n \to \infty$, переконуємось у тому, що знайдена функція $r(x',t)$ є розв'язком рівняння (3.14) і при $a(t) \in C[0,T]$. Отже, встановлено існування розв'язку задачі (A).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови (C), (D) і (3.6). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (A).*

Встановимо єдиність розв'язку задачі (A). Припускаючи, що існують два розв'язки задачі (A) $(a_i(t), u_i(x,t), v_i(x,t)), i = 1,2$, для різниць $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$,
$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), v(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$ отримуємо такі співвідношення:

$$u_t = \Delta u, \quad (x,t) \in \Omega_1, \tag{3.25}$$

$$v_t = a_1(t)\,\Delta v + a(t)\,\Delta v_2, \quad (x,t) \in \Omega_2, \tag{3.26}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1} \times [-h,0], \tag{3.27}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{3.28}$$

$$u_{x_n}(x',-h,t) = 0, \quad (x',t) \in \overline{D_T}, \tag{3.29}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x',-h,t)\,dx' = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.30}$$

$$u(x',0,t) = v(x',0,t), \quad (x',t) \in \overline{D_T}, \tag{3.31}$$

$$u_{x_n}(x',0,t) = a_1(t) v_{x_n}(x',0,t) + a(t) v_{2x_n}(x',0,t), \ (x',t) \in \overline{D_T}. \tag{3.32}$$

Позначимо
$$u_{x_n}(x',0,t)=p(x',t), \quad (x',t)\in D_T. \tag{3.33}$$
Тоді
$$v_{x_n}(x',0,t)=p(x',t)-a(t)\,v_{2_{x_n}}(x',0,t), \quad (x',t)\in \overline{D_T}. \tag{3.34}$$
Підставляючи розв'язок задачі (3.25), (3.27), (3.29), (3.33) в умову (3.30), отримаємо
$$\int_0^t \frac{P(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2k-1)^2h^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau=0, \tag{3.35}$$
де
$$P(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} p(x',t)\,dx'.$$
З (3.35) за теоремою Тітчмарша [8, с.233] маємо $P(t)\equiv 0$ і $u(x,t)\equiv 0$.

Знайдемо розв'язок задачі (3.26), (3.28), (3.34) і підставимо його в умову
$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x',0,t)\,dx'=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x',0,t)\,dx'=0.$$
Отримаємо рівняння щодо $a(t)$:
$$\int_0^t \frac{a(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)d\xi_n\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Delta v_2(\xi,\tau)\,d\xi'+$$
$$+\int_0^t \frac{a(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} v_{2_{x_n}}(\xi',0,\tau)\,d\xi'=0, \tag{3.36}$$
де $\theta_1(t)=\int\limits_0^t a_1(\tau)\,d\tau$. Позначимо
$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} v_2(x',\xi_n,t)\,dx'=w(\xi_n,t). \tag{3.37}$$
Тоді рівність (3.36) набуде вигляду
$$\int_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\Bigg(w_{\xi_n}(0,\tau)+$$
$$+\int_0^{\infty} w_{\xi_n\xi_n}(\xi_n,\tau)\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)d\xi_n\Bigg)\,d\tau=0. \tag{3.38}$$
Інтегруючи по частинах, зведемо (3.38) до вигляду
$$\int_0^t \frac{a(\tau)\,d\tau}{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\infty} w_{\xi_n}(\xi_n,\tau)\,\xi_n\exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)d\xi_n=0. \tag{3.39}$$

Отже, $a(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра першого роду (3.39). Для того, щоб звести його до інтегрального рівняння другого роду, розглянемо допоміжну задачу

$$U_t = a_1(t)U_{x_nx_n} + a(t)w_{x_n}(x_n, t),\ (x_n, t) \in (0, \infty) \times (0, T), \tag{3.40}$$

$$U(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty), \tag{3.41}$$

$$U(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{3.42}$$

$$U_{x_n}(0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.43}$$

Якщо розв'язок задачі (3.40)– (3.42) підставити в умову (3.43), то отримаємо рівняння (3.39). Очевидно, що рівняння (3.39) еквівалентне рівнянню

$$\int_0^t \frac{a(\tau)\, d\tau}{\sqrt{(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}} \int_0^\infty w_{\xi_n}(\xi_n, \tau) \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) d\xi_n = 0, \tag{3.44}$$

яке отримується, якщо розв'язок задачі (3.40), (3.41), (3.43) підставити в умову (3.42). Здійснюючи заміну змінних

$$z = \frac{\xi_n}{2\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}},$$

зведемо рівняння (3.44) до вигляду

$$\int_0^t a(\tau) d\tau \int_0^\infty w_{\xi_n}\left(2z\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}, \tau\right) \exp\left(-z^2\right) dz = 0.$$

Диференціюючи по t, звідси отримуємо

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} a(t) w_{x_n}(0, t) + a_1(t) \int_0^t \frac{a(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \int_0^\infty w_{\xi_n\xi_n}(2z\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}, \tau) z \exp(-z^2) dz = 0.$$

або

$$a(t)w_{x_n}(0, t) + \frac{a_1(t)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty w_{\xi_n\xi_n}(\xi_n, \tau) \times$$
$$\times\, \xi_n \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) d\xi_n = 0. \tag{3.45}$$

Покажемо, що $w_{x_n}(0, t) > 0,\ t \in [0, T]$. Враховуючи позначення (3.37) і умову

$$a_2(t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_{2x_n}(x', 0, t) dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_{2x_n}(x', 0, t) dx',$$

маємо

$$a_2(t)w_{x_n}(0,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u_{2x_n}(x',0,t)dx'. \tag{3.46}$$

З іншого боку, використовуючи для функції $R_2(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_{2x_n}(x',0,t)dx'$ формулу (3.7) і враховуючи умови (D), встановлюємо, що $R_2(t) > 0$ на $[0,T]$, а, отже, і $w_{x_n}(0,t) > 0$ на $[0,T]$. Це означає, що (3.45) є інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду щодо $a(t)$, а тому $a(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Звідси випливає, що задача (3.25)–(3.32) переходить в однорідну задачу спряження, яка зводиться до однорідного інтегрального рівняння (3.24), і тому має тільки тривіальний розв'язок. Єдиність розв'язку задачі (A) встановлено.

4. ’ (B)

Інтегруючи рівняння (2.9) за змінною x' по $\mathbb{R}^{n-1}$, отримуємо досліджену в задачі (A) систему рівнянь (2.5), (3.8), де в $q_1(t)$ слід замість $\mu(t)$ брати $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varkappa(x',t)dx'$. З системи (2.5), (3.8) знаходимо невідомий коефіцієнт $a(t)$, припускаючи при цьому, що виконуються умови (C), (D) і умова (3.6) з деякою функцією $\gamma(t)$.

Для визначення невідомих $u(x,t)$ та $v(x,t)$ потрібно знайти розв'язок рівняння (2.9). Припустимо, що існує така функція $\gamma(x',t) \in C(\overline{D_T})$, що виконується умова:

$$h\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma(\xi',\tau)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+h^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi' =$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}\nu(x',t) + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\varkappa_\tau(\xi',\tau) - F(\xi',-h,\tau)\right)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi' -$$

$$-\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^0 f_{\xi_n}(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+(\xi_n+h)^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi_n -$$

$$-t^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^0 \varphi(\xi)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+(\xi_n+h)^2}{4t}\right)d\xi_n. \tag{4.1}$$

Тоді безпосередньою перевіркою можна переконатись, що рівняння (2.9) має розв'язок

$$r(x',t) = \gamma(x',t) + \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^0 \varphi(\xi)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+\xi_n^2}{4t}\right)d\xi_n +$$

$$+\frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(f(\xi',-h,\tau) - \varkappa_\tau(\xi',\tau)\right)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+h^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi' +$$

$$+\frac{h}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \nu(\xi',\tau)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+h^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi' +$$

$$+\frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int\limits_{-h}^{0} f_{\xi_n}(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{|x'-\xi'|^2+\xi_n^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi_n. \qquad (4.2)$$

Легко бачити, що інтегруванням (4.1) за x' по $\mathbb{R}^{n-1}$ умова (4.1) зводиться до умови (3.6), в якій

$$\mu(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varkappa(x',t)\,dx', \quad \gamma(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma(x',t)\,dx'. \qquad (4.3)$$

Це означає, що умова (3.6) задовольняється і з системи (2.5), (3.8) визначається коефіцієнт $a(t)$. Підставляючи його та (4.2) в (2.3), (2.4), знаходимо невідомі $u(x,t)$,
$v(x,t)$. Отже, має місце

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови (4.1), (C) та умова (D) з позначеннями (4.3). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (B).*

Для доведення єдиності розв'язку задачі (B) припустимо, що існують два розв'язки $(a_i(t), u_i(x,t), v_i(x,t)), i=1,2$. Покладаючи $a(t)=a_1(t)-a_2(t), u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t), v(x,t)=v_1(x,t)-v_2(x,t)$, знаходимо, що функції $a(t), u(x,t), v(x,t)$ задовольняють умови (3.25)–(3.29), (3.32) та

$$u(x',-h,t)=0, \quad (x',t)\in\overline{D_T}, \qquad (4.4)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x',0,t)\,dx'=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x',0,t)\,dx', \quad t\in[0,T]. \qquad (4.5)$$

Звідси встановлюємо, як і в задачі (A), однозначність визначення коефіцієнта $a(t)$. Тоді задача (3.25)–(3.29), (3.32) стає однорідною. Використовуючи позначення (3.33), отримуємо однорідне інтегральне рівняння вигляду (2.9) щодо функції $p(x',t)$. З властивостей перетворення Фур'є та теореми Тітчмарша [8] випливає, що $p(x',t)\equiv 0$, а, отже, $u(x,t)\equiv 0,\ v(x,t)\equiv 0$. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Jones B.F. *Various Methods for Finding Unknown Coefficients in Parabolic Differential Equation* Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – V.16. – P.33–44.
2. Chrzanowski E.M. *An Inverse Problem for a Combined System of a Diffusion Equation* Demonstr. Math. – 1981. – V.14, №2. – P.427–436.
3. Денисов А.М. *Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно–постоянными коэффициентами* Журн. выч. мат. и мат. физики. – 1982. – Т.22, №4. – С.858–863.
4. Кущ Д.В. *О единственности определения кусочно–постоянных коэффициентов уравнения теплопроводности* Вестник МГУ. Сер.1. Математ., мех. – 1988. – №6. – С.73–76.
5. Иванчов Н.И. *Обратная задача теплопроводности в двухкомпонентной среде* Дифференц. уравн. – 1992. – Т.28, №4. – С.666–672.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736с.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 428с.
8. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624с.

Львівський ун-т, мех.-матем. ф-т.

Надійшло 20.02.1996