

УДК 517.956

РОЗВ'ЯЗКИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ІЗ СИЛЬНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Г.П. ЛОПУШАНСЬКА

H.P. Lopushanska. *Generalized elliptic boundary value problems' solutions with strong power singularities*, Matematychni Studii, **9**(1998) 29–41.

The existence and the singularities character of generalized elliptic boundary value problem solution under power singularities of data of an arbitrary order are established.

У [1–3] та інших працях вивчається поведінка узагальнених розв'язків еліптичних граничних задач, праві частини яких мають степеневі особливості. Встановлено, що для існування узагальненого розв'язку задачі в сенсі [4] допускається степеневий ріст даних задачі порядку $\lambda > -n$ всередині області та $\lambda > \max\{1 - n, -n + 2m - 1 - m'\}$ на її межі, де m' — максимальний порядок похідних у напрямі нормалі в граничних операторах задачі, а при сильнішому рості слід проводити регуляризацію заданих узагальнених функцій [1,2]. Використовуючи одержане у [5] зображення розв'язку узагальненої граничної задачі, встановлюємо характер його поведінки при довільних степеневих особливостях даних задачі, не проводячи регуляризації цих даних.

Розглядаємо задачу

$$\begin{aligned} A(x, D) &= F_0, \quad x \in \Omega, \\ B_j(x, D)u|_S &= F_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1)$$

в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, обмеженій поверхнею S класу C^∞ . Тут $A(x, D)$ — еліптичний оператор порядку $2m$, $\{B_j(x, D)\}_{j=1}^m$ — нормальна система граничних диференціальних виразів, яка накриває оператор $A(x, D)$, коефіцієнти операторів вважаємо нескінченно диференційовними.

Нехай $\hat{B}_j, T_j, \hat{T}_j$ — граничні диференціальні оператори, при яких правильна формула Гріна

$$\int_{\Omega} (Auv - uA^*v) dx = \sum_{j=1}^m \int_S (B_j u \hat{T}_j v - T_j u \hat{B}_j v) dS.$$

Нехай $D(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$, $D(S) = C^\infty(S)$, $X(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in D(S) : \hat{B}_j v|_S = 0, j = \overline{1, m}\}$, $D'(\bar{\Omega}), D'(S), X'(\bar{\Omega})$ — простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $D(\bar{\Omega}), D(S), X(\bar{\Omega})$. Через (φ, F) позначаємо дію $F \in D'(\bar{\Omega})(X'(\bar{\Omega}))$ на $\varphi \in D(\bar{\Omega})(X(\bar{\Omega}))$, а через $\langle \varphi, F \rangle$ — дію $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$.

При $F_0 \in X'(\bar{\Omega}), F_j \in D'(S), j = \overline{1, m}$, розв'язком задачі (1) називаємо таку узагальнену функцію $u \in D'(\bar{\Omega})$, що

$$(A^* \psi, u) = (\psi, F_0) + \sum_{j=1}^m \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle, \quad \psi \in X(\bar{\Omega}). \quad (2)$$

У [4,6] доведено існування вектор-функції Гріна $(G_0(x, y), G_1(x, y), \dots, G_m(x, y))$ задачі (1), єдиної у класі функцій, ортогональних до ядра N задачі (1) ($Pu = 0$), та вивчені її властивості. Якщо

$$(\psi, F_0) + \sum_{j=1}^m \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle = 0 \quad (3)$$

для довільної $\varphi \in N^*$ (N^* — ядро спряженої до (1) задачі), то існує, єдиний у $D'(\bar{\Omega})/N$, розв'язок задачі (1) в сенсі (2), визначений формулою

$$(\varphi, u) = \left(\int_{\bar{\Omega}} \varphi(x) G_0(x, y) dx, F_0 \right) + \sum_{j=1}^m \left\langle \int_{\bar{\Omega}} \varphi(x) G_j(x, y), F_j \right\rangle, \quad \varphi \in D(\bar{\Omega}). \quad (4)$$

Функція із сильними степеневими особливостями не належить простору $D'(\bar{\Omega})$ чи $X'(\bar{\Omega})$. Але формулу (4) можна поширити і на такий випадок. Розглянемо спеціальні простори функцій.

Нехай $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\varrho(x, x_0) = \varrho_0(x - x_0)$ — невід'ємна фінітна нескінченно диференційовна в $\bar{\Omega}$ функція, $\varrho(x_0, x_0) = 0$, а в околі точки x_0 має порядок $d(x, x_0) = |x - x_0|$.

Для $k \in \mathbb{R}^1$ визначимо

$$Z_k(\bar{\Omega}, x_0) = \{\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus x_0) : \varrho^{|\alpha|}(x, x_0) D^\alpha \varphi(x) = \varrho^k(x, x_0) \varphi_\alpha(x), \\ \varphi_\alpha(x) \in C(\bar{\Omega}) \text{ для довільного мультиіндекса } \alpha\}.$$

Скажемо, що послідовність $\varphi_\nu \rightarrow 0$ у просторі $Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, якщо для довільного мультиіндекса α послідовність $\varphi_{\alpha\nu}(x) = \varrho^{-k+|\alpha|}(x, x_0) D^\alpha \varphi_\nu(x)$ рівномірно збігається до нуля при $\nu \rightarrow \infty$ в $\bar{\Omega}$.

Відзначимо основні властивості функцій із простору $Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$:

- 1) $Z_0(\bar{\Omega}, x_0) \subset C(\bar{\Omega})$, $C^\infty(\bar{\Omega}) \subset Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільного $k \leq 0$;
- 2) якщо $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, то $|x - x_0|^\lambda \varphi \in Z_{k+\lambda}(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільного $\lambda \in \mathbb{R}^1$;
- 3) якщо $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, то $D^\gamma \varphi \in Z_{k-|\gamma|}(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільного мультиіндекса γ ;
- 4) якщо $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, $\psi \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$, то $\varphi\psi \in Z_{k+p}(\bar{\Omega}, x_0)$;
- 5) $Z_{k_2}(\bar{\Omega}, x_0) \subset Z_{k_1}(\bar{\Omega}, x_0)$ для $k_1 < k_2$;
- 6) $Z_k(\bar{\Omega}, x_0) \subset C^{[k]}(\bar{\Omega})$ для $k \geq 0$ (тут $[k]$ — ціла частина числа k).

Позначаємо через $Z'_k(\bar{\Omega}, x_0)$ простори лінійних неперервних функціоналів на $Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$. Тоді:

1) $Z'_{k_1}(\bar{\Omega}, x_0) \subset Z'_{k_2}(\bar{\Omega}, x_0)$ для $k_1 < k_2$; $(C^{[k]}(\bar{\Omega}))' \subset Z'_k(\bar{\Omega}, x_0)$, якщо $k \geq 0$; оскільки $C^\infty(\bar{\Omega}) = D(\bar{\Omega}) \subset Z_{-k}(\bar{\Omega}, x_0)$ при $k > 0$, то $Z'_{-k}(\bar{\Omega}, x_0) \subset D'(\bar{\Omega})$ при $k \geq 0$.

2) Якщо $F \in Z'_k(\bar{\Omega}, x_0)$, то визначено $(D^\alpha \varphi, F)$ для $D^\alpha \varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, а отже для $\varphi \in Z_{k+|\alpha|}(\bar{\Omega}, x_0)$. Тоді визначений лінійний неперервний функціонал $D^\alpha F: (\varphi, D^\alpha F) = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi, F)$, $D^{|\alpha|} F \in Z'_{k+|\alpha|}(\bar{\Omega}, x_0)$.

3) $Z_{-k}(\bar{\Omega}, x_0) \subset Z'_k(\bar{\Omega}, x_0)$ для $k > 0$.

Справдї, якщо $f \in Z_{-k}(\bar{\Omega}, x_0)$, то $f_\alpha(x) = \varrho^{k+|\alpha|} D^{|\alpha|} f \in C(\bar{\Omega}) \subset L_1(\bar{\Omega})$, а тоді визначені такі лінійні неперервні функціонали f_α на $Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$:

$$\begin{aligned} (\varphi, f_\alpha) &= \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} \varphi_\alpha f_\alpha dx = \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} \varrho^{-k+|\alpha|} D^\alpha \varphi f_\alpha dx = \\ &= \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} \varrho^{-k+|\alpha|} D^\alpha \varphi \varrho^{k+|\alpha|} D^\alpha f dx = \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \varrho^{2|\alpha|} D^\alpha f dx, \end{aligned}$$

для довільного мультиіндекса α , $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, зокрема,

$$(\varphi, f) = \int_{\Omega} \varphi_0 f_0 dx = \int_{\Omega} \varrho^{-k} \varphi \varrho^k f dx = \int_{\Omega} \varphi f dx, \varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0).$$

Отже, якщо $f \in Z_{-k}(\bar{\Omega}, x_0)$, то f — регулярна узагальнена функція із $Z'_k(\bar{\Omega}, x_0)$.

4) Нехай $g_\alpha \in L_1(\Omega)$ для довільного мультиіндекса α , тоді для довільної $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$ визначені $\int_{\Omega} \varrho^{-k+|\alpha|} D^\alpha \varphi g_\alpha dx$ і при довільному натуральному числі N маємо $g(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} D^\alpha ((-1)^{|\alpha|} g_\alpha \varrho^{-k+|\alpha|})$ (похідні розуміємо в узагальненому сенсі) є лінійним неперервним функціоналом на $Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$:

$$(\varphi, g) = \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\Omega} \varrho^{-k+|\alpha|} g_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi dx.$$

Зокрема, при $g_0(x) \in L_1(\Omega)$ функція $g(x) = g_0(x)(x - x_0)^{-\kappa} \in Z'_{|\kappa|}(\bar{\Omega}, x_0)$.

5) Для довільного мультиіндекса α , $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, обмежених в Ω функцій $g_\alpha(x)$ та довільних чисел $p_\alpha > -n$ визначено $\int_{\Omega} g_\alpha \varrho^{p_\alpha+|\alpha|-k} D^\alpha \varphi dx$. Тоді

$$g(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} D^\alpha (g_\alpha \varrho^{p_\alpha+|\alpha|-k}) \in Z'_k(\bar{\Omega}, x_0).$$

Зокрема, $g(x) = g_0(x)(x - x_0)^{p_\alpha-k} \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, $g(x) = g_0(x)(x - x_0)^{-\kappa} \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$ при $-\kappa = p_\alpha - k > -n - k$, тобто, при $k > |\kappa| - n$.

Отже, якщо $g_0(x)$ — обмежена в $\bar{\Omega}$ функція, то

$$g(x) = g_0(x)(x - x_0)^{-\kappa} \in Z'_{|\kappa|-n+\varepsilon}(\bar{\Omega}, x_0)$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що $g(x) \in D'(\bar{\Omega})$ при $|\kappa| < n$ і $g(x)$ не належить $D'(\bar{\Omega})$ при $|\kappa| > n$.

Нехай $f_0(x)$ — обмежена функція в області Ω , $F_0(x) = f_0(x)(x - x_0)^\kappa$, $|\kappa| \geq 0$, $F_1 = \dots = F_m = 0$. Покажемо, що у випадку $N^* = \{0\}$ розв'язок $u(x)$ задачі (1) такий, що $Pu = 0$, належить $Z'_{|\kappa|-2m-n+\varepsilon}(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільного $\varepsilon > 0$, а отже може мати степеневу особливість у точці x_0 порядку $|\kappa| - 2m - \varepsilon$, бути регулярною узагальненою функцією, якщо $|\kappa| < 2m + n$. Це випливає із такої теореми.

Теорема 1. Нехай $F_0 \in Z'_p(\bar{\Omega}, x_0)$, $p > 2m - n$, $F_1 = \dots = F_m = 0$, $N^* = \{0\}$, $u(x)$ — розв'язок задачі (1) такий, що $Pu(x) = 0$. Тоді $u(x) \in Z'_{p-2m}(\bar{\Omega}, x_0)$.

Це твердження точне у тому розумінні, що для розв'язку $u(x)$ із $Z'_{p-2m-\varepsilon}(\bar{\Omega}, x_0) \subset Z'_{p-2m}(\bar{\Omega}, x_0)$, $\varepsilon > 0$, задачі існує функція $F_0(x) = Au(x)$ із $Z'_p(\bar{\Omega}, x_0)$, а при $u(x) \in Z'_{p-2m+\varepsilon}(\bar{\Omega}, x_0)$ може не існувати такої $F_0 \in Z'_p(\bar{\Omega}, x_0)$, при якій $u(x)$ є розв'язком розглядуваної задачі. Справдї, для $u(x) \in Z'_{p-2m+\varepsilon}(\bar{\Omega}, x_0)$ $Au(x) \in Z'_{p+\varepsilon}(\bar{\Omega}, x_0)$, а при $\varepsilon > 0$ $Z'_p(\bar{\Omega}, x_0) \subset Z'_{p+\varepsilon}(\bar{\Omega}, x_0)$.

Доведення теореми. У [5] показано, що функція

$$\psi(y) = (G_0^* \varphi)(y) = \int_{\Omega} \varphi(x) G(x, y) dx \in X(\bar{\Omega}) \subset D(\bar{\Omega})$$

для довільної $\varphi \in D(\bar{\Omega})$. Вивчимо її властивості при $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$.

Нехай $h(x) \in D(\Omega)$, $0 \leq h(x) \leq 1$, $h(x) = \begin{cases} 1, & |x-x_0| < \eta, \\ 0, & |x-x_0| > 2\eta, \end{cases}$

$$\psi(y) = (G_0^* \varphi)(y) = \int_{\Omega} h(x) \varphi(x) G(x, y) dx + \int_{\Omega} (1-h(x)) \varphi(x) G(x, y) dx = \psi_1(y) + \psi_2(y).$$

Маємо $(1-h(y))\psi(y) = 0$ при $|y-x_0| < \eta$, тому $(1-h(y))\psi(y) \in Z_{k+2m}(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільного $k \in \mathbb{R}^1$ при довільній $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$.

Розглянемо функцію $h(y)\psi_1(y)$. При $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, $k > -n$ вона має порядок функції $\varrho^{2m+k}(y, x_0)$. Покажемо, що для довільного мультиіндекса α маємо р'євн'єсть

$$v_{\alpha}(y) = \varrho^{|\alpha|}(y, x_0) D^{\alpha} \int_{\Omega} h(x) \varphi(x) G_0(x, y) h(y) dx = w_{\alpha}(y) \varrho^{2m+k}(y, x_0),$$

де $w_{\alpha} \in C(\bar{\Omega})$.

Справдї, функцію $v_{\alpha}(y)$ подамо у вигляді суми $v_{1\alpha}(y) + v_{2\alpha}(y) + v_{3\alpha}(y)$ трьох доданків відповідно до розбиття області Ω на $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |x-x_0| < \frac{|y-x_0|}{2}\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |x-y| < \frac{|y-x_0|}{2}\}$, $\Omega_3 = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$.

Для $x \in \Omega_1$ маємо $|x-y| \leq |y-x_0| + |x-x_0| < \frac{3}{2}|y-x_0|$, $|x-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0| > \frac{1}{2}|y-x_0|$, тоді $\frac{1}{|x-y|^{n-2m+|\alpha|}} < (\frac{2}{|y-x_0|})^{n-2m+|\alpha|}$ при $n-2m+|\alpha| > 0$, $|x-y|^{-(n-2m+|\alpha|)} < (\frac{3}{2}|y-x_0|)^{-(n-2m+|\alpha|)}$ при $n-2m+|\alpha| < 0$, а отже $|D^{\alpha}(G_0(x, y)h(y))| < C_1 \varrho^{-(n-2m+|\alpha|)}(y, x_0)$ для довільного мультиіндекса α . Тоді при $k > -n$

$$\begin{aligned} v_{1\alpha}(y) &= \varrho^{|\alpha|}(y, x_0) \int_{\Omega_1} h(x) \varphi(x) D^{\alpha}(G_0(x, y)h(y)) dx = \\ &= w_{1\alpha}(y) \varrho^{|\alpha|-n+2m-|\alpha|+k+n}(y, x_0) = w_{1\alpha}(y) \varrho^{2m+k}(y, x_0), \end{aligned}$$

де $w_{1\alpha} \in C(\bar{\Omega})$. Для $x \in \Omega_2$ маємо $|x-x_0| \leq |y-x_0| + |x-y| < \frac{3}{2}|y-x_0|$, $|x-x_0| \geq |y-x_0| - |x-y| > \frac{1}{2}|y-x_0|$, тому $|h(y)\varphi(y)| < C_2 \varrho^k(y, x_0)$, $k \in \mathbb{R}^1$. Оскільки

$$D_y^{\alpha} = (-D_x + D_y + D_x)^{\alpha} = \sum_{|\beta| \leq \|\alpha\|} C_{\alpha\beta} (-D_x)^{\beta} (D_x + D_y)^{\alpha-\beta}, C_{\alpha\beta} —$$

певні сталі, і $(D_x + D_y)^{\alpha-\beta}(G_0(x, y)h(y)) = O(\frac{1}{|x-y|^{n-2m}})$ для довільних $|\alpha| \geq |\beta|$, то

$$\begin{aligned} v_{2\alpha}(y) &= \varrho^{|\alpha|}(y, x_0) \int_{\Omega_2} \sum_{|\beta| \leq \|\alpha\|} C_{\alpha\beta}(D_x)^\beta (h(x)\varphi(x)) (D_x + D_y)^{\alpha-\beta}(G_0(x, y)h(y)) dx = \\ &= \sum_{|\beta| \leq \|\alpha\|} w_{2\alpha\beta}(y) \varrho^{k+2m+|\alpha|-|\beta|}(y, x_0) = w_{2\alpha}(y) \varrho^{k+2m}(y, x_0), w_{2\alpha} \in C(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Для $x \in \Omega_3$ підінтегральна функція у виразі $v_{3\alpha}$ є нескінченно диференційовною і $v_{3\alpha}(y) = w_{3\alpha}(y) \varrho^{k+2m}(y, x_0)$ для довільного $k \in \mathbb{R}^1$. Отже, $h(y)\psi_1(y) \in Z_{k+2m}(\bar{\Omega}, x_0)$, якщо $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$ і $k > -n$.

Маємо $(1-h(x))\varphi(x) = 0$ при $|x-x_0| < \eta$, тому також $h(y)\psi_2(y) \in Z_{k+2m}(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільної $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$ при довільному $k \in \mathbb{R}^1$.

Таким чином, $(G_0^*\varphi)(y) \in Z_{k+2m}(\bar{\Omega}, x_0)$, якщо $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$ і $k > -n$, або $(G_0^*\varphi)(y) \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$, для $\varphi \in Z_{p-2m}(\bar{\Omega}, x_0)$ і $p > 2m - n$.

Тоді відображення $F_0 \rightarrow u$, здійснюване за формулою $(\varphi, u)(G_0^*\varphi, F_0)$, для довільної узагальненої функції $F_0 \in Z'_p(\bar{\Omega}, x_0)$ при $p > 2m - n$ визначає $u \in Z'_{p-2m}(\bar{\Omega}, x_0)$ при $p > 2m - n$.

Аналогічно вводимо простори $Z_k(S, x_0)$, $x_0 \in S$, і проводимо дослідження відображень $\psi_j(y) = (G_j^*\varphi)(y)$, $j = \overline{1, m}$. Одержуємо, що $\psi_j(y) \in Z_{k+m_j+1}(S, x_0)$ при $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, $k > -n$.

Тому відображення $F_j \rightarrow u_j$, здійснюване за формулою

$$(\varphi, u_j) = \left\langle \int_{\Omega} \varphi(x) G_j(x, y) dx, F_j \right\rangle,$$

для довільної $F_j \in Z'_p(S, x_0)$ при $p > m_j + 1 - n$ визначає $u_j \in Z'_{p-m_j-1}(\bar{\Omega}, x_0)$.

Нехай $F_0 \in Z'_p(\bar{\Omega}, x_0)$, $F_j \in Z'_{p_j}(S, x_j)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, $x_j \in S$, $j = \overline{1, m}$, $\bar{p} = (p, p_1, \dots, p_m)$,

$$Z_{\bar{p}} = Z_{\bar{p}}(\bar{\Omega}, x_0, x_1, \dots, x_m) = \left\{ \varphi(x) \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m Z_{p_j}(S, x_j) \right) : \hat{B}_j \varphi|_S = 0 \right\}$$

(при $x_i = x_j$ $Z_{p_i} \cap Z_{p_j}$ заміняємо на $Z_k(S, x_i)$, $k = \max\{p_i, p_j\}$). Покажемо, що при $N^* = \{0\}$ функція (4) задовольняє тотожності (2) для довільної $\psi \in Z_{\bar{p}}$.

За властивостями просторів $Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$ функція $\varphi(x) = A^*\psi(x) \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$ при $\psi \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільного p , $(G_0^*\varphi)(y) \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$ при $\varphi \in Z_{p-2m}(\bar{\Omega}, x_0)$, $p > 2m - n$ (за теоремою 1), і $G_0^*(A^*\psi) = \psi \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$, а отже $(G_0^*(A^*\psi), F_0) = (\psi, F_0)$, $\psi \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$. Якщо $x_0 \in \Omega$, то $\hat{B}_l \psi \in D(S)$ для довільного p . При $x_0 \in S$ $\hat{B}_l \psi \in Z_{p-2m+1+\mu_l}(S, x_0)$, $l = \overline{1, m}$. Щоб $(\hat{B}_l \psi)(x_0) = 0$, необхідно, щоб $p - 2m + 1 + \mu_l > 0$, тобто $p > 2m - 1 - \mu_l$, $l = \overline{1, m}$. Досить взяти $p > m''$, де m'' — максимальний порядок операторів $\hat{B}_l$, $l = \overline{1, m}$.

Аналогічно при $F_j \in Z_{p_j}(S, x_j)$, $\psi \in Z_{p_j+2m-1-m_j}(\bar{\Omega}, x_j)$ маємо $\hat{T}_j \psi \in Z_{p_j}(S, x_j)$, $\varphi = A^*\psi \in Z_{p_j-1-m_j}(\bar{\Omega}, x_j)$ і $G_j^*(A^*\psi) = \hat{T}_j \psi \in Z_{p_j}(S, x_j)$, $p_j > 1 - n + m_j$, а тоді $\langle G_j^*(A^*\psi), F_j \rangle = \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle$, $\psi \in Z_{p_j+2m-1-m_j}(\bar{\Omega}, x_j)$. $\hat{B}_l \psi \in Z_{p_j-m_j+\mu_l}(S, x_j)$, і

для того, щоб $(\widehat{B}_l \psi)(x_j) = 0$, необхідно, щоб $p_j > m_j - \mu_l$, $l = \overline{1, m}$, а для цього досить взяти $p_j > m_j - 2m + 1 + m''$.

Отже, функція (4) справдї є розв'язком задачі (1) при $F_0 \in Z'_p(\overline{\Omega}, x_0)$, $F_j \in Z'_{p_j}(S, x_j)$, $x_0 \in \overline{\Omega}$, $x_j \in S$, $j = \overline{1, m}$ в сенсі виконання тотожності (2) для довільної $\psi \in Z_{\overline{p}}$, якщо $p > 2m - n(x_0 \in \Omega)$, $p > \max\{2m - n, m''\}(x_0 \in S)$, $p_j > \max\{1 - n + m_j, m_j + 1 - 2m + m''\}$, $j = \overline{1, m}$.

Вияснимо, при якому максимально можливому рості $F_0, F_1, \dots, F_m$ існує розв'язок задачі (1) $u(x)$, $Pu(x) = 0$, визначений формулою (4).

Ми показали, що для $N^* = \{0\}$ при $F_0 = f_0(x)(x - x_0)^{-\kappa}$, $F_j = f_j(x)(x - x_j)^{-\kappa_j}$, $f_0(x) \in L_\infty(\Omega)$, $f_j(x) \in L_\infty(S)$ (тоді $F_0 \in Z'_{|\kappa| - n + \varepsilon}(\overline{\Omega}, x_0)$, $F_j \in Z'_{|\kappa_j| - n + 1 + \varepsilon_j}(S, x_j)$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_j > 0$), $j = \overline{1, m}$, формулою (4) визначено $u(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^m u_j(x)$, де

$$u_0(x) \in Z'_{|\kappa| - n + \varepsilon - 2m}(\overline{\Omega}, x_0), u_j(x) \in Z'_{|\kappa_j| - n - m_j + \varepsilon_j}(\overline{\Omega}, x_j), \quad \varepsilon > 0, \varepsilon_j > 0,$$

якщо $|\kappa| > 2m - \varepsilon(x_0 \in \Omega)$, $|\kappa| > \max\{2m, n + m''\} - \varepsilon(x_0 \in S)$, $|\kappa_j| > \max\{m_j, n - 2m + m_j + m''\} - \varepsilon_j$, $\varepsilon, \varepsilon_j$ — довільні додатні числа, $j = \overline{1, m}$.

Отже, при довільному степеневому рості даних задачі формулою (4) визначено її узагальнений розв'язок в сенсі виконання тотожності (2) для довільної $\psi \in X(\overline{\Omega}) \cap Z_{\kappa - n + \varepsilon}(\overline{\Omega}, x_0) \cap (\bigcap_{j=1}^m Z_{p_j}(\overline{\Omega}, x_j))$ (при $x_j = x_i$ заміняємо $Z_{p_i} \cap Z_{p_j}$ на $Z_p(\overline{\Omega}, x_j)$, $p = \max\{p_i, p_j\}$, $p_j = |\kappa| - n + 2m - m_j + \varepsilon_j$). Цей розв'язок може мати степеневі особливості порядку $|\kappa| - 2m + \varepsilon$ всередині області Ω , порядку $|\kappa_j| - m_j + 1 + \varepsilon$ на її межі S , $j = \overline{1, m}$. При $|\kappa| < n$, $|\kappa_j| < n - 1$ $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$, $F_j \in D'(S)$, $j = \overline{1, m}$, і тоді $u(x) \in D'(\overline{\Omega})$, а отже $u(x) \in Z'_{-k}(\overline{\Omega}, x_0)$ при деякому $k > 0$. У цьому випадку $|\kappa| - 2m + \varepsilon < n - 2m + \varepsilon$, $|\kappa_j| - m_j + \varepsilon + 1 < n - m_j + \varepsilon$, а отже $u(x)$ може бути регулярною узагальненою функцією в $\overline{\Omega}$.

Аналогічно аналізуємо розв'язок (4) у випадку степеневих особливостей функції F_0 на довільному гладкому многовиді S_1 всередині Ω : $F_0(x) = O(|x - x_0|^{-\kappa})$, $x_0 \in S_1$, $\kappa > 0$. Розглядаємо простори функцій $Z_k(\overline{\Omega}, S_1)$, які вводимо так само, як $Z_k(\overline{\Omega}, x_0)$, замінивши $\varrho(x, x_0)$ на $\varrho(x, S_1)$ — невід'ємну нескінченно диференційовну фінітну в Ω функцію, яка дорівнює нулеві в точках S_1 , а в околі S_1 має порядок відстані від точки x до S_1 .

До цього випадку зводиться гранична задача для еліптичного рівняння із сильним степеневим виродженням

$$z(x)A(x, D)u(x) = f_0(x),$$

де $z(x) = O(\frac{1}{|x - x_0|^\kappa})$, $\kappa > 0$, $x_0 \in S_1$. Одержуємо попередні результати, замінивши таке рівняння рівнянням

$$A(x, D)u(x) = \frac{1}{z(x)}f_0(x), x \in \Omega.$$

2. Розглянемо задачу на власні значення

$$Au(x) = \lambda q(x)u(x), \quad x \in \Omega, \quad B_j u|_S = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

де $q(x) = |x - x_0|^{-\kappa} q_0(x)$, $q_0(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, x_0 – довільна точка в Ω . Властивості власних значень та власних функцій такої задачі із певних нормованих просторів досліджувались у [7,8] та інших працях.

За доведеним вище функція $\psi(y) = \lambda q(y) \int_{\Omega} \varphi(x) G_0(x, y) dx \in Z_{p+2m-\kappa}(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільної $\varphi \in Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$, $k > -n$. Крім того, $Z_p(\bar{\Omega}, x_0) \subset Z_{p+2m-\kappa}(\bar{\Omega}, x_0)$ при $\kappa > 2m$, $Z_{p+2m-\kappa}(\bar{\Omega}, x_0) \subset Z_p(\bar{\Omega}, x_0)$ при $\kappa < 2m$, тому оператор

$$(K\varphi)(y) = q(y) \int_{\Omega} \varphi(x) G_0(x, y) dx$$

діє у просторі $Z_l(\bar{\Omega}, x_0)$ при $l = \min(p, p + 2m - \kappa)$, $p > -n$.

Із формули (4) $(\varphi, u) = (\lambda K\varphi, u)$, тому для існування власних функцій $u \in Z_l'(\bar{\Omega}, x_0)$ задачі (6) необхідно і досить існування власних функцій $\varphi \in Z_l(\bar{\Omega}, x_0)$ оператора K .

3. Подібними властивостями володіють розв'язки деяких граничних задач для операторів у дробових похідних [9]

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^{-n}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) \mathcal{F}u(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad (7)$$

де $\mathcal{F}u$ – перетворення Фур'є функції $u(x)$,

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq s} a_\alpha(x) (-i\xi)^\alpha,$$

(це скорочений запис від $a(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha|=s_j \leq s} a_\alpha(x) (-i\xi)^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i — невід'ємні числа, які можуть бути дробовими, $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$).

Нехай $f_\alpha(x) = f_{\alpha_1}(x_1) \times \dots \times f_{\alpha_n}(x_n)$ — прямий добуток узагальнених функцій

$$f_{\alpha_j}(x_j) = \begin{cases} \theta(x_j) x_j^{\alpha_j-1}, & \alpha_j > 0, \\ f'_{\alpha_j+1}(x_j), & \alpha_j \leq 0, \end{cases} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$f_{\alpha_j}(x_j)$ — оператори дробового диференціювання [10]. Тоді

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}u(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha e^{i(x-y, \xi)} u(y) dy d\xi \\ &= (-2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha e^{i(t, \xi)} u(x-t) dt d\xi = (-2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha (u(x) * e^{i(x, \xi)}) d\xi = \\ &= (-2\pi)^{-n} u(x) * \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha e^{i(x, \xi)} d\xi = u(x) * f_{-\alpha}(x). \end{aligned}$$

Отже, оператор (7) можемо записати у вигляді

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} a_\alpha(x) (f_{-\alpha}(x) * u(x)), \quad u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n). \quad (8)$$

Для довільних $u, v \in D(\mathbb{R}^n)$ маємо $\int Au \bar{v} dx = \int \sum_{|\alpha| \leq s} a_\alpha(x) (f_{-\alpha}(x) * u(x)) \overline{v(x)} dx = \int \sum_{|\alpha| \leq s} u(x) (\overline{f_{-\alpha}(x) * a_\alpha(x) v(x)}) dx$, де $(f * \varphi)(x) = (\varphi(x+t), f(t))$. Отже, $A^* v(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} \overline{f_{-\alpha} * (a_\alpha \bar{v})}$, $A^* v(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} f_{-\alpha} * (a_\alpha \bar{v})$, якщо a_α дійсні.

Аналогічно [11] доводиться

Теорема 2. Нехай $\omega(x, y)$ — нормальна фундаментальна функція псевдодиференціального оператора A , $(\varphi(x), \omega(x, y)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$. Узагальнена функція

$$u(x) = \omega(x, y) \circledast F(y) \quad (9)$$

(тобто $(\varphi, u) = ((\varphi(x), \omega(x, y)), F(y))$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$) є розв'язком у $D'(\mathbb{R}^n)(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$ рівняння $Au = F$, єдиним у просторі $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Фундаментальну функцію $\omega_0(x) = \omega(x, 0)$ однорідного еліптичного оператора у дробових похідних $A = \sum_{|\alpha|=s} a_\alpha f_{-\alpha}$ із сталими коефіцієнтами можна побудувати, наприклад, методом Радона [12], а саме у вигляді $\omega_0(x) = \int_{\sigma_n} \omega_{0p}(\xi) dp$, де σ_n — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$, $p \in \sigma_n$, $\xi = (p, x)$. За властивістю згортки

$$\sum_{|\alpha|=s} a_\alpha f_{-\alpha}(x) * \omega_{0p}((p, x)) = \sum_{|\alpha|=s} a_\alpha p^\alpha (f_{-s} * \omega_{0p})(\xi).$$

Оскільки $\delta(x) = c_n \int_{\sigma_n} (\xi - i0)^{-n} dp$, $c_n = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$, то для знаходження $\omega_{0p}(\xi)$ одержуємо рівняння у згортках $\sum_{|\alpha|=s} a_\alpha p^\alpha (f_{-s} * \omega_{0p})(\xi) = c_n (\xi - i0)^{-n}$, звідки $\omega_{0p}(\xi) = \frac{c_n f_s * (\xi - i0)^{-n}}{\sum_{|\alpha|=s} a_\alpha p^\alpha}$.

Нехай n — непарне. Маємо

$$(f_s * \delta^{(n-1)})(\xi) = f_s^{(n-1)}(\xi) = f_{s-n+1}(\xi) = \Delta_x^{\frac{n-1}{2}} f_s((p, x)),$$

а тоді

$$\omega_0(x) = a_n \Delta_x^{\frac{n-1}{2}} \int_{\sigma_n} \frac{(p, x)_+^{s-1} dp}{\sum_{|\alpha|=s} a_\alpha p^\alpha},$$

де $a_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}$.

Оскільки, за еліптичністю оператора A , $|\sum_{|\alpha|=s} a_\alpha p^\alpha| \geq C_1(1 + |p|)^s = 2^s C_1$, то, виконуючи перетворення повороту та переходячи до сферичної системи координат, одержуємо $\omega_0(x) = O(|x|^{s-n})$. Подібно у випадку парного n .

Надалі вважатимемо оператор A еліптичним, припускати́мемо існування нормальної фундаментальної функції $\omega(x, y)$ і розглядати́мемо такі оператори A , для яких $\omega(x, y) \in C^\infty(x \neq y)$ і

$$|\omega(x, y)| \leq \begin{cases} C|x - y|^{s-n}, & n \text{ — непарне} \\ C|x - y|^{s-n}(\ln|x| + 1), & n \text{ — парне.} \end{cases} \quad (10)$$

Нехай $2m - 2 < s \leq 2m$, запишемо оператор (8) у вигляді

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{|\beta| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\beta (f_{\beta-\alpha}(x) * u(x)),$$

вважаємо хоч один із таких мультиіндексів β , що $|\beta| = 2m$, відмінним від нуля. У розпрямляючих локальних координатах

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{|\beta| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\beta = \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{k=1}^{2m} \sum_{\beta, \gamma: |\gamma|+k=|\beta| \leq 2m} a_{\alpha\gamma}(\xi) D_\xi^\gamma D_\nu^k,$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$. Інтегруючи частинами, для $u, v \in D(\bar{\Omega})$ одержуємо

$$\int_{\Omega} (Au\bar{v} - u\overline{A^*v}) dx = \sum_{t=1}^{2m} \int_S D_{\nu}^{t-1} u \overline{C_t v} dS, \quad (11)$$

де $\overline{C_t v} = \sum_{k=t}^{2m} \sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{\beta, \gamma: |\gamma|+k=|\beta| \leq 2m} D_{\nu}^{k-t} (f_{\beta-\alpha} \widehat{*} D^{\gamma} (a_{\alpha\gamma} \bar{v}))$.

Розглянемо задачу

$$Au(x) = F_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad D_{\nu}^{j-1}|_S = F_j, \quad j = \overline{1, 2m}. \quad (12)$$

Нехай $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$. Як у [11], розв'язком задачі (12) при $F_0 \in D'(\bar{\Omega})$, $F_1, \dots, F_m \in D'(S)$ називаємо таку узагальнену функцію $\tilde{u}(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, яка у $D'(\mathbb{R}^n)$ задовольняє рівняння

$$A\tilde{u} = F_0 + \sum_{j=1}^{2m} C_j^* F_j, \quad (13)$$

де $F_{m+1}, \dots, F_{2m}$ — невідомі узагальнені функції з носіями на S , C_j^* — спряжені на S оператори до операторів C_j , $j = \overline{1, 2m}$.

За теоремою 2 узагальнена функція

$$\tilde{u}(x) = \omega(x, y) \otimes (F_0 + \sum_{j=1}^{2m} C_j^* F_j) \quad (14)$$

є єдиним у $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ розв'язком рівняння (13) при відомих $F_{m+1}, \dots, F_{2m}$. Для знаходження $F_{m+1}, \dots, F_{2m}$ використовуємо умову: $\tilde{u}(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \Omega_e$, яка набуває вигляду

$$\left(\int_{\Omega_e} \varphi(x) \omega(x, y) dx, F_0 \right) + \sum_{j=1}^{2m} \left\langle \int_{\Omega_e} \varphi(x) C_{jy} \omega(x, y) dx, F_j \right\rangle = 0, \quad \varphi \in D(\Omega_e), \quad (15)$$

або

$$(\omega(x, y), F_0) + \sum_{j=1}^{2m} \langle C_{jy} \omega(x, y), F_j \rangle = 0, \quad x \in \Omega_e. \quad (15')$$

Із (14) та (15) одержуємо, що розв'язок $u(x)$ задачі (12), такий що $Pu = 0$, визначається формулою

$$(\varphi, u) = \left(\int_{\Omega} \varphi(x) \omega(x, y) dx, F_0 \right) + \sum_{j=1}^{2m} \left\langle \int_{\Omega} \varphi(x) C_{jy} \omega(x, y) dx, F_j \right\rangle, \quad \varphi \in D(\bar{\Omega}). \quad (16)$$

Покажемо, що формулою (16) також визначається розв'язок задачі (12) при наявності степеневих особливостей заданих узагальнених функцій.

Знову міркуючи, як при доведенні теореми 1, показуємо, що

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \omega(x, y) dx \in Z_{k+s}(\bar{\Omega}, x_0), \quad \int_{\Omega} \varphi(x) C_{jy} \omega(x, y) dx \in Z_{k+j}(S, x_0)$$

при $\varphi \in Z_k(\bar{\Omega}, x_0)$, $k > -n$. Тоді формулою (16) для довільних

$$F_0 \in Z'_{k+s}(\bar{\Omega}, x_0), \quad x_0 \in \bar{\Omega}, \quad F_j \in Z'_{k+j}(S, x_j), \quad x_j \in S, \quad j = \overline{1, 2m}, \quad k > -n,$$

визначено узагальнену функцію

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^{2m} u_j(x), \quad (17)$$

$$u_0(x) \in Z'_k(\bar{\Omega}, x_0), \quad u_j \in Z'_k(\bar{\Omega}, x_j), \quad j = \overline{1, 2m}, \quad k > -n.$$

Із властивостей фундаментальної функції випливає, що для довільної $\varphi \in D(\Omega_e)$ $\int_{\Omega_e} \varphi(x) \omega(x, y) dx \in Z_p(\bar{\Omega}, y)$, y — довільна точка $\bar{\Omega}$, $p \leq s$, $\int_{\Omega_e} \varphi(x) C_{jy} \omega(x, y) dx \in Z_{p_j}(S, y)$, $p_j \leq j$, $j = \overline{1, 2m}$, y — довільна точка S . Тому співвідношенням (15) чи (15') можуть задовольняти $F_0 \in Z'_p(\bar{\Omega}, x_0)$, $F_j \in Z'_{p_j}(S, x_j)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, $x_j \in S$, при $p \leq s$, $p_j \leq j$, $j = \overline{1, 2m}$. При $x_0, x_j \in S$ можна позбутись обмежень зверху з таких міркувань.

Нехай S_ε — паралельна до S поверхня, розміщена на відстані ε від S , $S_\varepsilon = \{x_\varepsilon = x + \varepsilon \nu(x), x \in S\}$, $\nu(x)$ — орт зовнішньої нормалі до S у точці x . На S_ε визначимо $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, $x_\varepsilon = x + \nu(x)\varepsilon$, $x \in S$ для довільної $\varphi \in D(S)$. Із (15') випливає

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^{i-1} \left[(\omega(x, y), F_0) + \sum_{j=1}^{2m} \langle C_{jy} \omega(x, y), F_j \rangle \right] dS = 0, \quad (15'')$$

$i = \overline{1, m}$, $\varphi \in D(S)$.

Якщо узагальнена задача Коші для оператора A в області Ω_e однозначно розв'язна, то умови (15'') і (15') є рівносильними. У випадку диференціального оператора A існування нормальної фундаментальної функції в деякій області є еквівалентним однозначній розв'язності задачі Коші в цій області [13].

Оскільки $C_j(y, D) \int_S \varphi(x) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^{i-1} \omega(x, y) dS \in Z_{k+j-i}(S, x_0)$ при $\varphi \in Z_k(S, x_0)$, $x_0 \in S$, $k > 1 - n$, то умові (15'') можуть задовольняти узагальнені функції $F_0 \in Z'_{k-m+1}(\bar{\Omega}, x_0)$, $F_j \in Z'_{k+j-i} \subset Z'_{k+j}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{0, m-1}$. Таким чином правильна

Теорема 3. *Нехай A — оператор у дробових похідних порядку s , $2m - 2 < s \leq 2m$, для якого існує нормальна фундаментальна функція $\omega(x, y)$ із властивістю (10) і однозначно розв'язна узагальнена задача Коші, $F_0 \in Z'_{p+s}(\bar{\Omega}, x_0)$, $F_j \in Z'_{p+j}(S, x_j)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, $x_j \in S$, $-n \leq p \leq 0$ при $x_0 \in \Omega$, $p > -n$ при $x_0 \in S$, $j = \overline{1, m}$, $F_{m+l} \in Z'_{p+m+l}(S, x_j)$, $j, l = \overline{1, m}$, і задовольняють умову (15''). Існує розв'язок $u(x)$ вигляду (17) задачі (12), визначений формулою (16), $Pu = 0$, $u_0(x) \in Z'_p(\bar{\Omega}, x_0)$, $u_j(x) \in Z'_p(S, x_j)$, $j = \overline{1, 2m}$.*

Аналогічно можна проводити дослідження задачі з такими накриваючими оператором A граничними диференціальними або псевдодиференціальними умовами $P_j u|_S = F_j$, $j = 1, m$, що

$$\int_{\Omega} (Au\bar{v} - u\overline{A^*v}) dx = \sum_{t=1}^{2m} \int_S P_j u \hat{P}_j v dS, \quad u, v \in D(\bar{\Omega}).$$

Приклад. Нехай $Au = \sum_{i=1}^3 f_{-2\alpha h_i} * u$, де $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, $h_1 = (1, 0, 0)$, $h_2 = (0, 1, 0)$, $h_3 = (0, 0, 1)$. Записуючи цей оператор у вигляді $Au = \sum_{i=1}^3 (f_{(2-2\alpha)h_i} * u)_{x_i x_i}$, виводимо формулу Гріна

$$\int_{\Omega} (Au\bar{v} - u\overline{A^*v}) dx = \int_S (B_{\alpha} uv - u\hat{B}_{\alpha} v) dS,$$

де $B_{\alpha} u(x) = \sum_{i=1}^3 (f_{(2-2\alpha)h_i} * u)_{x_i} \nu_i(x)$, $\hat{B}_{\alpha} u(x) = \sum_{i=1}^3 (f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} u)_{x_i} \nu_i(x)$. У цьому випадку

$$\omega_0(x) = -\frac{1}{8\pi^2 \Gamma(2\alpha)} \Delta_x \int_{\sigma_3} \frac{(p, x)_+^{2\alpha-1} dp}{p_1^{2\alpha} + p_2^{2\alpha} + p_3^{2\alpha}} = O(|x|^{2\alpha-3})$$

і є нескінченно диференційовною при $x \neq y$. Можна вивести, що $\int_S B_{\alpha}(y) \omega_0(x-y) dS =$

$$= \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ \frac{1}{2}, & x \in S, \\ 0, & x \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Узагальнена функція $\tilde{u}(x)$ задовольняє рівняння

$$A\tilde{u} = F_0 + B_{\alpha}^* F_1 - F_2,$$

де $F_1 = u|_S$, $F_2 = B_{\alpha} u|_S$, $\langle \varphi, B_{\alpha}^* F_1 \rangle = \langle B_{\alpha} \varphi, F_1 \rangle$, $\varphi \in D(S)$, узагальнені функції F_0, F_1, F_2 зв'язані умовою

$$(\omega_0(x-y), F_0) = \langle \hat{B}_{\alpha}(y) \omega_0(x-y), F_1(y) \rangle - \langle \omega_0(x-y), F_2 \rangle, \quad x \in \Omega_e. \quad (18)$$

Розглянемо узагальнену задачу типу Неймана

$$Au(x) = F_0, \quad x \in \Omega, \quad B_{\alpha} u|_S = F_2. \quad (19)$$

Використовуючи аналог першої формули Гріна

$$\int_{\Omega} Au v dx = \int_S B_{\alpha} u v dS - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_{x_i} (f_{(2-2\alpha)h_i} * v)_{x_i} dx$$

та перетворення Фур'є, доводимо єдиність її розв'язку з точністю до адитивної сталої. Дійсно, якщо u_1, u_2 — два регулярні розв'язки задачі, $u = u_1 - u_2$, то $\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (u_{x_i} \hat{*} u_{x_i}) f_{(2-2\alpha)h_i} dx = 0$, а після перетворення Фур'є $\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{2\alpha} |\mathcal{F}u|^2 d\sigma = 0$. Отже, $\text{supp } \mathcal{F}u = \{0\}$. Тому $u(x)$ — поліном, а оскільки $u(x)$ — фінітна

функція, то $u(x) = C = \text{const}$. Єдиність розв'язку задачі у $D'(\bar{\Omega})$ доводиться аналогічно [5].

Покажемо, що (18) однозначно визначає невідому узагальнену функцію F_1 , якщо $\langle 1, F_2 \rangle = 0$. Нехай S_ε — паралельна до S поверхня, розміщена на відстані ε від S , $S_\varepsilon = \{x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x), x \in S\}$, $\nu(x)$ — орт зовнішньої нормалі до S у точці x . Із (18)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x) [(\omega_0(x-y), F_0) + \langle \hat{B}_\alpha(y) \omega_0(x-y), F_1(y) \rangle - \langle \omega_0(x-y), F_2 \rangle] dS = 0,$$

$\varphi \in D(S)$, $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, $x \in S$. Тоді

$$\begin{aligned} \left\langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x) \hat{B}_\alpha(y) \omega_0(x-y) dS, F_1(y) \right\rangle &= \left\langle \int_S \varphi(x) \omega_0(x-y) dS, F_2 \right\rangle - \\ &- \left(\int_S \varphi(x) \omega_0(x-y) dS, F_0 \right), \quad \varphi \in D(S), \end{aligned}$$

або

$$\left\langle -\frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x) \hat{B}_\alpha(y) \omega_0(x-y) dS, F_1(y) \right\rangle = \langle \varphi, T \rangle, \quad \varphi \in D(S),$$

де $\langle \varphi, T \rangle = \langle \int_S \varphi(x) \omega_0(x-y) dS, F_2 \rangle - \langle \int_S \varphi(x) \omega_0(x-y) dS, F_0 \rangle$, $\varphi \in D(S)$.

Інтегральне рівняння

$$-\frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x) \hat{B}_\alpha(y) \omega_0(x-y) dS = g(y) - C_g, \quad (20)$$

де $C_g = \frac{1}{|S|} \int_S g dS$, $|S|$ — площа поверхні S , має для довільної $g \in D(S)$ розв'язок $\varphi \in D(S)$, $\varphi_g^1 - \varphi_g^2 = \varphi_0$, де φ_0 — розв'язок відповідного однорідного рівняння. Тоді відображення

$$\langle g, F_1 \rangle = \langle \varphi_g, T \rangle, \quad g \in D(S), \quad (21)$$

φ_g — розв'язок рівняння (20), є ізоморфізмом підпростору $D'_1(S) = \{F \in D'(S) : \langle 1, F \rangle = 0\}$ на $D'_0(S) = \{F \in D'(S) : \langle \varphi_0, F \rangle = 0\}$. Оберненим до (21) є відображення

$$\langle \varphi, T \rangle = \left\langle -\frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x) \hat{B}_\alpha(y) \omega_0(x-y) dS, F_1 \right\rangle, \quad \varphi \in D(S).$$

Із властивостей φ_0 випливає, що $T \in D'_0(S)$. Тому (21) однозначно визначає $F_1 \in D'_1(S)$, а розв'язок задачі (19) має вигляд

$$\begin{aligned} (\varphi, u) &= \left(\int_\Omega \varphi(x) \omega_0(x-y) dx, F_0 \right) + \left\langle \int_\Omega \varphi(x) \hat{B}_\alpha(y) \omega_0(x-y) dx, F_1(y) \right\rangle - \\ &- \left\langle \int_\Omega \varphi(x) \omega_0(x-y) dx, F_2 \right\rangle, \quad \varphi \in D(\Omega). \end{aligned} \quad (22)$$

Відображення (21) діє у просторі $Z'_k(S, \hat{x})$, $\hat{x} \in S$, $k \leq 0$. Тепер за теоремою 3 при $F_0 \in Z'_{p+2\alpha}(\bar{\Omega}, x_0)$, $F_2 \in Z'_p(S, \hat{x}) \subset Z'_{p+2\alpha}(S, \hat{x})$, $x_0 \in \Omega$, $\hat{x} \in S$, $-2 < p \leq 0$, знаходимо $F_1 \in Z'_p(S, \hat{x}) \subset Z'_{p+2\alpha}(S, \hat{x})$. Записуючи розв'язок (22) у вигляді $u = u_0 + u_1 + u_2$, одержуємо, що

$$u_0(x) \in Z'_p(\bar{\Omega}, x_0), \quad u_1(x), u_2(x) \in Z'_p(\bar{\Omega}, \hat{x}).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ройтберг Я.А. *О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях* Укр. мат. журн. – 1968. – Т.20, №3. – С.412–417.
2. Ройтберг Я.А. *Эллиптические задачи в обобщенных функциях. I–IV.* – Чернигов: Пединститут, 1990, 1991 (Англ. переклад: Yakov Roitberg. *Elliptic Boundary Value Problems in the Spaces of Distributions.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London. – 1996.)
3. Красовский Ю.П. *Дифференциальные свойства решений эллиптических граничных задач со степенными особенностями в правых частях* Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т.35, №1. – С.202–209.
4. Красовский Ю.П. *Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач* Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – Т.33, №1. – С.109–137.
5. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. *Об одном представлении решения обобщенной эллиптической граничной задачи* Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, №3. – С.518–521.
6. Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А. *Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач* Укр. мат. журн. – 1967. – Т.19, №5. – С.3–32.
7. Олейник О.А. *О собственных колебаниях тел с концентрированными массами* В сб. *Современные проблемы прикладной математики и математической физики.* – М.: Наука, 1988. – С.101–128.
8. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальных колебаний* Труды Моск. мат. общ-ва. – 1992. – Т.54. – С.28–72.
9. Агранович М.С. *Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы* Успехи мат. наук. – 1965. – Т.20, №5. – С.3–120.
10. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1981.
11. Лопушанська Г.П. *Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння* Укр. мат. журн. – 1991. – Т.43, №5. – С.632–639.
12. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* – М.: Наука, 1965.
13. Мех И.Я. *О фундаментальных решениях эллиптических операторов* Докл. АН УССР. – 1991. – №5. – С.14–18.

Львівський університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 1.02.1997