УДК 512.552.12

НАПІВЛОКАЛЬНЕ КІЛЬЦЕ БЕЗУ Є КІЛЬЦЕМ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ

Б.В. Забавський, О.М. Романів

B. Zabavsky, O. Romaniv. *Any semilocal Bezout ring is a ring with elementary reduction of matrices*, Matematychni Studii, **9**(1998) 3–6.

In this paper it is proved that any semilocal Bezout ring is a ring with elmentary reduction of matrices. The conditions are found under which any Hermitian ring is such a ring. We give necessary and sufficient conditions under which the class of quasi-euclidean rings coincides with the class of rings with elementary reduction of matrices.

В даній роботі доведено, що напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць. Знайдено умови, при яких таким кільцем є кільце Ерміта. А також досліджуються необхідні і достатні умови, при яких клас елементарно головних кілець збігається з класом кілець з елементарною редукцією матриць.

Всі розглядувані кільця є комутативними з відмінною від нуля одиницею. Через $\mathcal{U}(R)$ позначимо групу одиниць кільця R, а через R_n — множину квадратних матриць порядку n. Позначимо також через $\operatorname{mspec}(a)$ множину максимальних ідеалів, які містять a.

Наведемо необхідні означення і факти.

Під *елементарною матрицею* з елементами кільця R розуміємо квадратну матрицю одного з трьох наступних типів [1]:

1) діагональна матриця зі зворотніми елементами на головній діагоналі;
2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;
3) матриця перестановки, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом перестановки деяких її рядків і стовпців.

Під *групою елементарних матриць* $GE_n(R)$ (див. [2]) розуміємо групу, породжену елементарними матрицями порядку n другого типу (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю). А через $SL_n(R)$ позначимо *спеціальну лінійну групу*, тобто групу матриць порядку n, детермінант яких рівний одиниці.

Кільце R називається *елементарно головним*, якщо для довільних $a, b \in R$ існують $c \in R$ і матриця $M \in GE_2(R)$ такі, що $(a,b)M = (c,0)$ [2]. Якщо в

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13F07, 13G05, 16W60.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

даному означенні вимагати, щоб матриця M була лише зворотньою, то таке кільце R називається *кільцем Ерміта* [3]. Зрозуміло, що елементарно головне кільце є кільцем Ерміта.

Скажемо, що матриці A і B з елементами кільця R є *елементарно еквівалентними* (в позначеннях $A \overset{e}{\sim} B$), якщо існують елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів такі, що $P_1 \cdot \ldots \cdot P_k \cdot A = B \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$. Зауважимо, що матриці $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_s$ необов'язково повинні належати групі елементарних матриць. Матриця A *володіє елементарною редукцією*, якщо вона елементарно еквівалентна канонічній діагональній матриці $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де ε_i є дільником ε_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі). Якщо ж над R довільна матриця володіє елементарною редукцією, то R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [4]. Від *кілець елементарних дільників* [3] кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється тим, що довільна матриця над ним не просто еквівалентна канонічній діагональній матриці, а саме елементарно еквівалентна. Очевидно, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте навпаки правильно не завжди (наприклад кільце $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$). [2, 4]

Кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним, називається *кільцем Безу*. Зрозуміло, що кільце Ерміта є кільцем Безу.

Для зручності посилань відмітимо ряд відомих результатів.

Теорема 1 (див. [5, тв. 2.3]). *Для напівлокального кільця R наступні твердження еквівалентні:*
1) R — кільце Безу;
2) R — кільце Ерміта;
3) R — кільце елементарних дільників.

Теорема 2 (див. [5, тв. 2.6]). *Нехай R — кільце Ерміта і для будь-яких $a, b \in R$ $(b \neq 0)$ існує таке $r \in R$, що*

$$\mathrm{mspec}(r) = \mathrm{mspec}(a) \setminus \mathrm{mspec}(b).$$

Тоді R — кільце елементарних дільників.

Надалі нам буде необхідна

Лема 1. *Довільна зворотня матриця над елементарно головним кільцем R є скінченним добутком елементарних матриць.*

Доведення. Спочатку доведемо, що довільну зворотню матрицю над елементарно головним кільцем за допомогою елементарних перетворень можна звести до діагонального вигляду. Доведення проведемо для матриці другого порядку.

Нехай $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ — зворотня над R матриця. Тоді $(a, b) = 1$ і оскільки кільце R є елементарно головним, то існує така матриця $Q \in GE_2(R)$, що $(a, b)Q = (1, 0)$, тобто

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $P \in GE_2(R)$. Маємо

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

що й потрібно було показати.

Отже, якщо A — довільна зворотня матриця над елементарно головним кільцем R, то існують такі матриці P, Q (які є скінченними добутками елементарних матриць), що $P \cdot A \cdot Q = F$, де F — діагональна і зворотня матриця. Оскільки визначник матриці F рівний добутку діагональних елементів, то всі ці діагональні елементи є зворотніми. Отже, матриця F є елементарною (першого типу). Оскільки $A = P^{-1} \cdot F \cdot Q^{-1}$, то звідси й випливає, що довільна зворотня матриця над елементарно головним кільцем є скінченним добутком елементарних матриць. □

Теорема 3. *Напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай R — напівлокальне кільце Безу і елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Тоді

$$\operatorname{mspec}(a) \cap \operatorname{mspec}(b) = \varnothing. \tag{1}$$

Припустимо, що елемент $r \in R$ належить всім максимальним ідеалам кільця R, крім максимальних ідеалів множини $\operatorname{mspec}(a)$ (такий елемент існує, оскільки кільце R — напівлокальне). Зрозуміло, що

$$\operatorname{mspec}(r) \cap \operatorname{mspec}(a) = \varnothing. \tag{2}$$

Розглянемо елемент $(a+br) \in R$. Припустимо, що $(a+br) \in M$ ($M \in \operatorname{mspec} R$).

Можливі наступні випадки:

1) $a \in M$ і $b \in M$ — це суперечить умові (1).
2) $a \in M$ і $r \in M$ — суперечність з умовою (2).

Отже, наше припущення неправильне. Тому існує таке $u \in \mathcal{U}(R)$, що $a+br = u$. Тоді

$$(a, b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \overset{e}{\sim} (u, 0),$$

тобто кільце R є елементарно головним. Оскільки напівлокальне кільце Безу є кільцем елементарних дільників (теорема 1) і довільна зворотня матриця над елементарно головним кільцем є добутком елементарних матриць (лема 1), то напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць. □

Теорема 4. *Нехай R — кільце Ерміта і для будь-яких $a, b \in R$ ($b \neq 0$) існує таке $r \in R$, що*

$$\operatorname{mspec}(r) = \operatorname{mspec}(a) \setminus \operatorname{mspec}(b).$$

Тоді R — кільце з елементарною редукцією матриць.

Доведення. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Зрозуміло, що $\operatorname{mspec}(a) \cap \operatorname{mspec}(b) = \varnothing$. За умовою теореми, існує деякий елемент $r \in R$, який належить всім максимальним ідеалам кільця R, крім максимальних ідеалів множини $\operatorname{mspec}(a)$. Тоді $\operatorname{mspec}(r) = \operatorname{mspec}(0) \setminus \operatorname{mspec}(\mathrm{a})$. Очевидно, що

$\mathrm{mspec}(r) \cap \mathrm{mspec}(a) = \varnothing$. Розглянемо елемент $(a+br) \in R$. Міркуючи аналогічно як в теоремі 3, легко довести, що дане кільце є елементарно головним. Тоді на основі теореми 2 і леми 1 бачимо, що дане кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць. □

Зауваження 1. Кільце, в якому множина максимальних ідеалів є незліченною, а довільний ненульовий елемент міститься в не більше, ніж зліченній множині максимальних ідеалів, є кільцем без дільників нуля. Тому доведення наступної теореми майже повністю повторює доведення, яке наведене праці [6] (див. теорема 3), і таким чином опускається.

Теорема 5. *Нехай R — елементарно головне кільце, в якому множина максимальних ідеалів є незліченною, а довільний ненульовий елемент міститься в не більше, ніж зліченній множині максимальних ідеалів. Тоді R — кільце з елементарною редукцією матриць.*

Зауваження 2. В [2] доведено (див. [2, теорема 8]), що клас елементарно головних кілець збігається з класом квазіевклідових кілець. Тому всі вище розглянені результати для елементарно головних кілець справедливі і в класі квазіевклідових кілець.

ЛІТЕРАТУРА

1. Cohn P. *On the structure of the GL_2 of a ring* I. H. E. S. Publ. Math. – 1996. – V.30. – P.365–413.
2. Bougaut B. *Anneaux Quasi-Euclidiens*, Thése de docteur troisieme cycle. 1976. – 67p.
3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – V.166. – P.464–491.
4. Zabavsky B. *Rings with elementary reduction of matrices.* – Ring Theory Confer. Miskolc, Hungary, July 15–20, 1996.
5. Larsen M., Lewis W., Schores T. *Elementary divisor rings and finitely presented modules* Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V.187. – P.231–248.
6. Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я. *Дистрибутивные области с элементарниыми делителями* Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, №7. – С.1000–1004.
7. Naude C., Naude G., Brewer S.W. *On Bezout domains elementary divisor rings and pole assignability* Communs Algebra. – 1984. – V.12. – P.2987–3003.

Львівський ун-т, мех.-мат. ф-т.

Надійшло 25.03.1997
Після переробки 6.11.1997