УДК 517.947

ІСНУВАННЯ ГРАНИЦІ ЗА ЧЕЗАРО ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМ ОПЕРАТОРОМ

Л.С. Баб'як, О.Л. Горбачук

L. Babyak, O. Gorbachuk. *Existing of Chezaro limit of bounded solutions of evolution equation with varying operator*, Matematychni Studii, **10**(1998) 199–202.

We establish necessary and sufficient conditions of behaviour at infinity of the solution of the inhomogeneous evolution equation with varying operator on Banakh space under some conditions on this operators.

Л.С. Бабьяк, О.Л. Горбачук. *Существование предела по Чезаро ограниченных решений эволюционного уравнения с переменным оператором* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 2. – С.199–202.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия поведения на бесконечности ограниченных решений неоднородного эволюционного уравнения с переменным оператором в банаховом пространстве при некоторых условиях на этот оператор.

Розглядається неоднорідне еволюційне рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + f(t), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

де $A(t)$ — лінійний оператор, що залежить від змінної t.

Встановлюються необхідні і достатні умови поведінки на нескінченності обмеженних розв'язків еволюційного рівняння (1) у банаховому просторі $\mathcal{B}$ за певних умов на оператор $A(t)$, а саме: нехай існує лінійний оператор A такий, що $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dotplus R(A)$ (пряма сума ядра $\operatorname{Ker} A$ та образу $R(A)$ оператора A) і

$$\int_0^\infty \|A(t) - A\| \, dt < \infty. \tag{2}$$

Всі оператори, які розглядаються у даній роботі, є замкненими лінійними операторами зі щільними областями визначення.

Через P позначимо проектор на підпростір $\operatorname{Ker} A$, тобто $P\colon \operatorname{Ker} A \dotplus R(A) \to \operatorname{Ker} A$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47N20.

Нагадаємо, що для функції $f(t)$ у банаховому просторі $\mathcal{B}$ границя за Чезаро визначається (див. [1]):

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\xi)\,d\xi.$$

Лема. *Нехай $y(t)$ — деякий обмежений розв'язок еволюційного рівняння (1) і виконуються умови (2). Границя за Чезаро функції $Py(t)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує границя за Чезаро функції $\int_0^t Pf(\xi)\,d\xi$, де P — проектор на підпростір* $\operatorname{Ker} A$.

Доведення. Нехай $y(t)$ — деякий обмежений розв'язок еволюційного рівняння (1). Тоді $\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + f(t)$ є правильною рівністю при $t \geq 0$. Запишемо її у наступному вигляді:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \big(A(t) - A\big)y(t) + (A+P)y(t) - Py(t) + f(t). \tag{3}$$

До рівності (3) застосуємо проектор P, отримаємо: $P\big(\frac{dy(t)}{dt}\big) = P\big(A(t)-A\big)y(t) + P(A+P)y(t) - P^2y(t) + Pf(t)$. Враховуючи те, що $PA = 0$ і P є замкненим оператором, матимемо:

$$\frac{dPy(t)}{dt} = P\big(A(t) - A\big)y(t) + Pf(t). \tag{4}$$

Проінтегруємо рівність (4):

$$\int_0^t \frac{dPy(\xi)}{d\xi}\,d\xi = \int_0^t P\big(A(\xi) - A\big)y(\xi)\,d\xi + \int_0^t Pf(\xi)\,d\xi$$

або

$$Py(t) = Py(0) + \int_0^t P\big(A(\xi) - A\big)y(\xi)\,d\xi + \int_0^t Pf(\xi)\,d\xi.$$

Тепер знайдемо границю за Чезаро функції $Py(t)$:

$$\begin{aligned}(C,1)\lim_{t\to\infty} Py(t) &= (C,1)\lim_{t\to\infty} Py(0) + \\ &+ (C,1)\lim_{t\to\infty}\int_0^t P\big(A(\xi) - A\big)y(\xi)\,d\xi + (C,1)\lim_{t\to\infty}\int_0^t Pf(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{5}$$

Оскільки $\int_0^\infty \|A(t) - A\|\,dt < \infty$, то це означає, що інтеграл $\int_0^\infty \big(A(\xi) - A\big)\,d\xi$ збігається абсолютно. Враховуючи те, що оператор P є замкненим, отримаємо, що звичайна границя $\lim_{t\to\infty}\int_0^t P\big(A(\xi) - A\big)\,d\xi$ існує. Через те, що $y(t)$ є обмеженим розв'язком еволюційного рівняння (1), то існує також звичайна границя $\lim_{t\to\infty}\int_0^t P\big(A(\xi) - A\big)y(\xi)\,d\xi$. Відомо, що якщо існує звичайна границя функції, то тим більше існує границя її за Чезаро. Отже, ми показали, що границя за Чезаро $(C,1)\lim_{t\to\infty}\int_0^t P\big(A(\xi) - A\big)y(\xi)\,d\xi$ існує.

Тоді з рівності (5) ми отримуємо, що границя за Чезаро функції $Py(t)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує границя за Чезаро функції $\int_0^t Pf(\xi)\,d\xi$.

Теорема. *Границя за Чезаро обмеженого розв'язку еволюційного рівняння (1) при умові, що знайдеться такий лінійний оператор* A*, що* $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dotplus R(A)$ *і* $\int_0^\infty \|A(t) - A\|\,dt < \infty$*, існує тоді і тільки тоді, коли існують границі за Чезаро функції* $f(t)$ *і функції* $\int_0^t Pf(\xi)\,d\xi$*, де* P *— проектор на підпростір* $\operatorname{Ker} A$.

Доведення. Нехай існує оператор A такий, що $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} \dotplus R(A)$ і $\int_0^\infty \|A(t) - A\|\,dt < \infty$. Оператор $A\colon \operatorname{Ker} A \dotplus R(A) \to R(A)$, проектор $P\colon \operatorname{Ker} A \dotplus R(A) \to \operatorname{Ker} A$. Позначимо через $\widetilde{A}$ обмеження оператора A на $R(A)$, тобто $\widetilde{A}\colon R(A) \to R(A)$ і для довільного $x \in R(A)$ $\widetilde{A}x = Ax$. Аналогічно $\widetilde{P}\colon \operatorname{Ker} A \to \operatorname{Ker} A$ (тотожне перетворення). $A \dotplus P = \widetilde{A} \dotplus \widetilde{P}$.

Пряму суму проектора $\widetilde{P}$ і оператора $\widetilde{A}$ позначимо через A_1, тобто $A_1 = \widetilde{P} \dotplus \widetilde{A}\colon \operatorname{Ker} A \dotplus R(A) \to \operatorname{Ker} A \dotplus R(A)$. За теоремою Банаха до оператора A_1 існує обернений оператор A_1^{-1} (див. [2]), який є обмеженим оператором. $A_1^{-1} = (\widetilde{P} \dotplus \widetilde{A})^{-1} = \widetilde{P}^{-1} \dotplus \widetilde{A}^{-1} = \widetilde{P} \dotplus \widetilde{A}^{-1}$.

Нехай $y(t)$ — деякий обмежений розв'язок еволюційного рівняння (1). Тому правильну рівність $\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + f(t)$, $t \geq 0$, можна записати у вигляді рівності (3). Застосуємо до обох частин рівності (3) оператор A_1^{-1}, отримаємо:

$$A_1^{-1}\frac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}\big(A(t) - A\big)y(t) + y(t) - Py(t) + A_1^{-1}f(t)$$

або

$$y(t) = A_1^{-1}\frac{dy(t)}{dt} - A_1^{-1}\big(A(t) - A\big)y(t) + Py(t) - A_1^{-1}f(t). \tag{6}$$

Тепер знайдемо границю за Чезаро функції $y(t)$ за рівністю (6):

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = (C,1)\lim_{t\to\infty} A_1^{-1}\frac{dy(t)}{dt} - (C,1)\lim_{t\to\infty} A_1^{-1}\big(A(t) - A\big)y(t) + \\ + (C,1)\lim_{t\to\infty} Py(t) - (C,1)\lim_{t\to\infty} A_1^{-1}f(t). \tag{7}$$

Розглянемо границі за Чезаро функцій, що входять до правої частини рівності (7), і з'ясуємо умови їх існування.

Границя за Чезаро функції $A_1^{-1}\frac{dy(t)}{dt}$ рівна нулю.

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} A_1^{-1}\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A_1^{-1}\frac{dy(\xi)}{d\xi}\,d\xi = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t A_1^{-1}\,dy(\xi) = \\ = \lim_{t\to\infty} A_1^{-1}\frac{1}{t}y(\xi)\big|_0^t = \lim_{t\to\infty} A_1^{-1}\frac{y(t) - y(0)}{t}.$$

Враховуючи те, що $y(t)$ є деяким обмеженим розв'язком еволюційного рівняння (1), тобто $\|y(t)\| \leq M$, де M — деяка константа, а оператор A_1^{-1} є обмеженим оператором, отримуємо:

$$\left\|A_1^{-1}\frac{y(t) - y(0)}{t}\right\| \leq \|A_1^{-1}\| \cdot \left\|\frac{y(t) - y(0)}{t}\right\| \leq \|A_1^{-1}\| \cdot \frac{2M}{t} \to 0$$

при $t \to \infty$.

Оскільки $\int_0^\infty \|A(t) - A\|\,dt < \infty$, то це означає, що інтеграл $\int_0^\infty \bigl(A(\xi) - A\bigr)\,d\xi$ збігається абсолютно. Оператор A_1^{-1} є замкненим оператором, тому існує звичайна границя $\lim_{t\to\infty} \int_0^t A_1^{-1}\bigl(A(\xi) - A\bigr)\,d\xi$. Функція $y(t)$ є обмеженим розв'язком еволюційного рівняння (1), тому існує також границя $\lim_{t\to\infty} \int_0^t A_1^{-1}\bigl(A(\xi) - A\bigr)y(\xi)\,d\xi$. З цього випливає, що границя за Чезаро

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} A_1^{-1}\bigl(A(t) - A\bigr)y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t A_1^{-1}\bigl(A(\xi) - A\bigr)y(\xi)\,d\xi$$

існує.

Стосовно границі за Чезаро функції $Py(t)$, то за лемою вона існує тоді і тільки тоді, коли існує границя за Чезаро функції $\int_0^t Pf(\xi)\,d\xi$, де P — проектор на підпростір $\operatorname{Ker} A$.

Отже, ми отримали, що якщо існують границі за Чезаро функції $\int_0^t Pf(\xi)\,d\xi$ і функції $f(t)$, то існує границя за Чезаро обмеженого розв'язку $y(t)$ еволюційного рівняння (1), де існує оператор A такий, що $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dotplus R(A)$ і $\int_0^\infty \|A(t) - A\|\,dt < \infty$.

Щоб довести необхідність твердження теореми, проведемо наступні міркування:

Нехай існує границя за Чезаро обмеженого розв'язку $y(t)$ еволюційного рівняння (1); з цього випливає, що існує границя за Чезаро функції $Py(t)$, бо проектор P є замкненим оператором. За рівністю (7) тоді легко бачити, що існує границя за Чезаро $(C,1)\lim_{t\to\infty} A_1^{-1}f(t)$, а отже, і границя за Чезаро функції $f(t)$.

Отже, границя за Чезаро обмеженого розв'язку $y(t)$ еволюційного рівняння (1) з умовами (2) існує тоді і тільки тоді, коли існують границі за Чезаро функції $f(t)$ і функції $\int_0^t Pf(\xi)\,d\xi$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иност. лит., 1962. – 830с.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464с.

Дрогобицький педагогіний інститут, педагогічний ф-т,

вул. Л. Курбаса, 2, м.Дрогобич Львів. обл. 293720.

Львівський університет, механіко-математичний ф-т,

вул. Університетська, 1, Львів, 290602

Надійшло 6.05.1998

Після переробки 30.06.1998