УДК 539.3:519.6

АНАЛІЗ ЗСУВНИХ ОБОЛОНОК: ПОСТАНОВКА ТА КОРЕКТНІСТЬ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

П.П. Вагін, Н.В. Іванова, Г.А. Шинкаренко

P. Vahin, N. Ivanova, G. Shynkarenko. *Shear shells analysis: the formulation and well-posedness of dynamic variational problems*, Matematychni Studii, **10**(1998) 188–198.

In this paper we investigate a dynamic problem of shear shells with a deformable normal. A sixmodal version of initial boundary value problem and appropriate variational problem are formulated using the linear theory of Timoshenko's shells. The constructive proof of existence of a variational problem solution is based on the convergence analysis of a Galerkin semidiscrete approximation sequence. On the basis of energetical approach and a priori estimations, uniqueness of the solution and its continuous dependence on initial data, internal and external load is proved.

П.П. Вагин, Н.В. Иванова, Г.А. Шинкаренко. *Анализ оболочек со смещениями: постановка и корректность вариационных задач динамики* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 2. – С.188–198.

В данной работе исследуются задачи динамики сдвиговых оболочек с деформируемой нормалью. С применением гипотезы линейной теории оболочек типа Тимошенко сформулированы шестимодальный вариант начально-краевой задачи и соответсвующая ей вариационная задача. Путем анализа сходимости полудискретных аппроксимаций Галеркина осуществлено конструктивное доказательство существования решения вариационной задачи. На основании энергетического подхода и построеных априорных оценок доказана единственность и непрерывная зависимость решения от начальных условий задачи, внутренней и внешней нагрузок.

1. Постановка початково-крайової задачі. Нехай оболонка постійної товщини h займає в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ область D, обмежену поверхнею F, яка складається з двох лицьових поверхонь Ω_+, Ω_- та бічної поверхні S $(F = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup S)$.

Віднесемо серединну поверхню оболонки Ω, обмежену контуром Γ $(\Gamma \subset S)$, до системи ортогональних криволінійних координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ так, що координатні лінії $\alpha_i = \mathrm{const}(i = 1, 2)$ збігатимуться з лініями головних кривин цієї поверхні. Введемо ортогональну до поверхні Ω змінну z, $|z| \le h/2$. Надалі будемо припускати, що поверхня Ω є обмеженою областю в $\mathbb{R}^2$ з неперервною за Ліпшицем межею Γ.

Нехай $A_i(\alpha)$ та $k_i(\alpha)$ (i=1,2) — коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини серединної поверхні Ω, відповідно. Тоді параметри Ляме

1991 *Mathematics Subject Classification.* 49R99, 73V25.

$H_i = H_i(\alpha, z) = A_i(\alpha)\{1+zk_i(\alpha)\}$, i=1,2, $H_3 = 1$ дозволяють обчислити елемент об'єму оболонки у вигляді $dD = H_1H_2H_3d\alpha_1d\alpha_2dz$.

Припустимо, що оболонка піддається дії змінних в часі $t \in [0,T]$, $0 < T < +\infty$, масової сили $f(\alpha,z,t) = \{f_i(\alpha,z,t)\}_{i=1}^3$ та поверхневого навантаження $\sigma^+(\alpha,z,t) = \{\sigma_i^+(\alpha,z,t)\}_{i=1}^3$, $\sigma^-(\alpha,z,t) = \{\sigma_i^-(\alpha,z,t)\}_{i=1}^3$ і $\tau(\alpha,z,t) = \{\tau_n(\alpha,z,t), \tau_s(\alpha,z,t),$
$\tau_z(\alpha,z,t)\}$, прикладеного до поверхонь Ω_+, Ω_- та S_σ ($S_\sigma \subset S$), відповідно. Тут через τ_n, τ_s та τ_z позначено нормальну, дотичну та перерізуючу складові прикладеного до S_σ поверхневого навантаження, причому система криволінійних координат (n,s,z) визначена в такий спосіб, щоб її орти утворювали праву трійку, а орти n та s були напрямлені відповідно вздовж нормалі та дотичної до бічної поверхні оболонки S.

Далі заради визначеності будемо припускати, що решта поверхні оболонки жорстко защемлена, тобто вектор зміщень точок оболонки $U(\alpha,z,t) = \{U_i(\alpha,z,t)\}_{i=1}^3$

$$U = 0 \quad \text{на} \quad S \setminus S_\sigma, \quad \mathrm{mes}(S \setminus S_\sigma) > 0. \tag{1.1}$$

Розгортаючи вектор зміщень точок оболонки U в ряд Тейлора в околі $z = 0$ зі збереженням лінійних членів, знайдемо, що

$$U_i(\alpha,z,t) = u_i(\alpha,t) + z\gamma_i(\alpha,t), \tag{1.2}$$

де u_i, γ_i (i=1,2,3) — компоненти зміщень та компоненти вектора кутів повороту нормалі серединної поверхні Ω. Подання зміщень оболонки у вигляді (1.2) відповідає кінематичній гіпотезі теорії оболонок Тимошенка з деформівною нормаллю і показує, що нормальний елемент недеформованої серединної поверхні оболонки після її навантаження залишається в кожен момент часу прямолінійним, але може змінювати свою довжину і необов'язково залишатися ортогональним до серединної поверхні.

Початково-крайова задача зсувних оболонок з деформівною нормаллю полягає у знаходженні такого вектора узагальнених зміщень $u = (u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, що відповідні вектор компонент тангенціальної та згинної деформації $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{11} = \{e_{11},e_{22},e_{33},e_{12},e_{13},e_{23},K_{11},K_{22},K_{12},K_{13},K_{23}\}^T$, а також вектор компонент зусиль і моментів $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{11} = \{N_{11},N_{22},T,N_{13},N_{23},M_{11},M_{22},Q,M_{13},M_{23}\}$ задовольняють [2]:
деформаційні співвідношення

$$\begin{gathered}
e_{ii} = \frac{\partial_i u_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i}A_i}{A_1A_2}u_{3-i} + k_iu_3, \quad 2e_{i3} = \frac{\partial_i u_3}{A_i} + \gamma_i - k_iu_i, \quad i = 1,2, \\
e_{33} = \gamma_3, \quad 2e_{12} = \frac{A_1}{A_2}\partial_2\frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\partial_1\frac{u_2}{A_2}, \\
K_{ii} = \frac{\partial_i\gamma_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i}A_i}{A_1A_2}\gamma_{3-i} + k_i\gamma_3, \quad 2K_{i3} = \frac{\partial_i\gamma_3}{A_i}, \quad i = 1,2 \text{ в} \quad \Omega \times [0,T], \\
2K_{12} = \frac{k_1}{A_2}\partial_2u_1 + \frac{k_2}{A_1}\partial_1u_2 - \frac{k_2\partial_2A_1}{A_1A_2}u_1 - \frac{k_1\partial_1A_2}{A_1A_2}u_2 + \frac{A_2}{A_1}\partial_1\frac{\gamma_2}{A_2} + \frac{A_1}{A_2}\partial_2\frac{\gamma_1}{A_1};
\end{gathered} \tag{1.3}$$

рівняння руху

$$-\rho h u_i'' + \partial_i(N_{ii}A_{3-i}) - N_{3-i,3-i}\partial_i A_{3-i} + 2T\partial_{3-i}A_i + \partial_{3-i}(Qk_iA_i) +$$
$$+Qk_{3-i}\partial_{3-i}A_i + k_{3-i}A_1A_2N_{i,3} + A_i\partial_{3-i}T = -p_iA_1A_2, \quad i=1,2,$$
$$-\rho\frac{h^3}{12}\gamma_i'' + \partial_i(M_{ii}A_{3-i}) - M_{3-i,3-i}\partial_iA_{3-i} + Q\partial_{3-i}A_i - A_1A_2N_{3,i}+$$
$$+A_i\partial_{3-i}Q = -A_1A_2m_i, \quad i=1,2,$$
$$-\rho h u_3'' - N_{11}k_1 - N_{22}k_2 + \frac{1}{A_1A_2}[\partial_1(N_{13}A_2) + \partial_2(N_{23}A_1)] = -p_3,$$
$$-\rho\frac{h^3}{12}\gamma_3'' - N_{33} - k_1M_{11} - k_2M_{22} + [\partial_1(A_2M_{13}) + \partial_2(A_1M_{23})]/A_1A_2 = -m_3,$$
$$\text{в} \quad \Omega\times[0,T];$$

фізичні співвідношення (1.4)

$$\sigma = \mathbf{B}\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega\times[0,T]; \tag{1.5}$$

статичні крайові умови

$$\begin{gathered}
N_{11}\cos^2\theta + N_{22}\sin^2\theta + T\sin 2\theta + \frac{1}{2}(k_1+k_2)Q\sin 2\theta = N_n,\\
\frac{1}{2}(N_{22}-N_{11})\sin 2\theta + T\cos 2\theta + (k_2\cos^2\theta - k_1\sin^2\theta)Q = N_s,\\
N_{13}\cos\theta + N_{23}\sin\theta = N_z, \quad M_{11}\cos^2\theta + M_{22}\sin^2\theta + Q\sin 2\theta = M_n,\\
\frac{1}{2}(M_{22}-M_{11})\sin 2\theta + Q\cos 2\theta = M_s, \quad M_{13}\cos\theta + M_{23}\sin\theta = M_z\\
\text{на } \Gamma_\sigma\times[0,T],\ \Gamma_\sigma = \Gamma\cap S_\sigma;
\end{gathered} \tag{1.6}$$

геометричні крайові умови

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u\times[0,T],\ \Gamma_u = \Gamma\setminus\Gamma_\sigma; \tag{1.7}$$

початкові умови

$$u|_{t=0} = u^0, \quad u'|_{t=0} = u^1 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{1.8}$$

У формулах (1.3), (1.4) та далі символи $\partial_i f$ та f' використано для позначення похідних $\frac{\partial}{\partial\alpha_i}f$, i=1,2, та $\frac{\partial f}{\partial t}$, відповідно; символом θ позначено кут між нормаллю n до контура Γ та віссю α_1; $\rho=\rho(\alpha)$ — густина матеріалу оболонки. У співвідношеннях (1.3)–(1.8) введено наступні позначення:
усереднені характеристики навантаження

$$\begin{gathered}
p_i = \Big(1+\frac{hk_1}{2}\Big)\Big(1+\frac{hk_2}{2}\Big)\sigma_i^+ + \Big(1-\frac{hk_1}{2}\Big)\Big(1-\frac{hk_2}{2}\Big)\sigma_i^- + \int_{-h/2}^{h/2} f_i(1+zk_1)(1+zk_2)\,dz,\\
m_i = \frac{h}{2}\Big[\Big(1+\frac{h}{2}k_1\Big)\Big(1+\frac{h}{2}k_2\Big)\sigma_i^+ - \Big(1-\frac{h}{2}k_1\Big)\Big(1-\frac{h}{2}k_2\Big)\sigma_i^-\Big] +\\
+\int_{-h/2}^{h/2} f_i(1+zk_1)(1+zk_2)z\,dz, \quad i=1,2,3;
\end{gathered} \tag{1.9}$$

інтегральні характеристики напруженого стану

$$\begin{gathered}
\Big[N_{ij}, M_{ij}\Big] = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}(1+zk_{3-i})[1,z]\,dz, \quad i=1,2,\\
N_{33} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{33}(1+zk_1)(1+zk_2)\,dz,\\
\Big[N_{i3}, M_{i3}\Big] = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{i3}(1+zk_{3-i})[1,z]\,dz, \quad i=1,2,
\end{gathered} \tag{1.10}$$

та
$$\Big[N_n, M_n\Big] = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_n[1,z]\,dz, \quad \Big[N_s, M_s\Big] = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_s[1,z]\,dz,$$
$$\Big[N_z, M_z\Big] = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_z[1,z]\,dz, \tag{1.11}$$
а також використано умову рівності з точністю до $o(h^2)$ крутних моментів $Q = M_{12} = M_{21}$ та введено симетричне зусилля Новожилова $T = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}$. Символом $\mathbf{B}$ в (1.5) позначено матрицю пружних характеристик матеріалу оболонки, елементи якої у випадку ортотропного матеріалу мають наступний вигляд

$$b_{ii} = \frac{E_i h}{\Delta}(1 - \nu_{jk}\nu_{kj}), \quad b_{ij} = \frac{E_i h}{\Delta}(\nu_{ij} + \nu_{ik}\nu_{kj}), \quad i \to j \to k, i \neq j,$$
$$i,j,k = 1,2,3, b_{44} = 2G_{12}h,\ b_{55} = 2G_{13}h,\ b_{66} = 2G_{23}h,$$
$$b_{i+6,i+6} = \frac{E_i h^3}{12\Delta}(1 - \nu_{jk}\nu_{kj}), \quad b_{i+6,j+6} = \frac{E_i h^3}{12\Delta}(\nu_{ij} + \nu_{i3}\nu_{3j}), \quad i \to j, i \neq j,$$
$$i,j = 1,2, b_{99} = \frac{G_{12}h^3}{6},\ b_{10,10} = \frac{G_{13}h^3}{6},\ b_{11,11} = \frac{G_{23}h^3}{6},$$
$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32}. \tag{1.12}$$

Тут $\{E_i\}$, $\{\nu_{ij}\}$ та $\{G_{ij}\}$ — модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона та модулі зсуву матеріалу оболонки відповідно, для яких виконуються рівності

$$E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}, \quad E_1\nu_{13} = E_3\nu_{31}, \quad E_2\nu_{23} = E_3\nu_{32}. \tag{1.13}$$

З огляду на (1.12) та (1.13) відзначимо, що для матриці $\mathbf{B}$ вірні наступні властивості симетрії та еліптичності

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad i,j = 1,...11, \tag{1.14}$$

$$\sum_{i,j=1}^{11} b_{ij}\xi_i\xi_j \geq b_0 \sum_{i=1}^{11} \xi_i^2, \quad b_0 = \mathrm{const} > 0 \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{11}) \in \mathbb{R}^{11}. \tag{1.15}$$

Зауваження. Відзначимо, що початково-крайова задача (1.3)–(1.8) містить як часткові випадки

(i) початково-крайову задачу лінійної теорії Тимошенка, яка припускає, що елемент нормалі серединної поверхні в процесі деформування оболонки повертається на певний кут без викривлення та зміни своєї довжини [7,8], тобто $\gamma_3 = 0$;

(ii) рівняння класичної теорії оболонок [4] при допущенні, що

$$\gamma_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} + k_i u_i, \quad i = 1,2, \quad \gamma_3 = 0.$$

2. Варіаційна постановка задачі та її коректність. Для варіаційного формулювання початково-крайової задачі (1.3)–(1.8) введемо наступні функціональні простори

$$V = \Big\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \big[W_2^1(\Omega)\big]^6 | v = 0 \text{ на } \Gamma_u \Big\},$$
$$G = \Big\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \big[L^2(\Omega)\big]^6 \Big\}. \tag{2.1}$$

Надалі вважатимемо, що для даних задачі справедливі наступні включення

$$\begin{gathered} u^0 \in V, \quad u^1 \in G, \quad p = (p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3) \in L^2(0,T;G), \\ N_n, N_s, N_z, M_n, M_s, M_z \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_\sigma)). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Нехай V' — простір, спряжений до простору узагальнених векторів зміщень V з нормою $||\cdot||_*$.

Помножимо скалярно рівняння руху (1.4) на довільний вектор $v \in V$ і проінтегруємо результат по області Ω. Використовуючи формулу Гріна й крайові умови (1.6), отримаємо наступне варіаційне рівняння

$$\mu(u''(t), v) + \eta(u(t), v) = \langle l(t), v\rangle \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Тут білінійні форми та лінійний функціонал мають наступний вигляд

$$\mu(u,v) = \iint\limits_\Omega \rho \sum_{i=1}^{3} (u_i v_i + \gamma_i \xi_i) A_1 A_2 \, d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{2.4}$$

$$\eta(u,v) = \iint\limits_\Omega \sum_{i=1}^{11} \sigma_i(u)\varepsilon_i(v) A_1 A_2 \, d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \forall u, v \in V, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \langle l, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_\Omega (p_i v_i + m_i \xi_i) A_1 A_2 \, d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int\limits_{\Gamma_\sigma} \{N_n v_n + N_s v_s + N_z v_z + M_n \xi_n + M_s \xi_s + M_z \xi_z\} d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Сформулюємо тепер варіаційну задачу динаміки теорії зсувних оболонок з деформівною нормаллю:

з*адано* $l \in L^2(0,T;V')$; $u^0 \in V$, $u^1 \in G$; *знайти узагальнений вектор зміщень* $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^\infty(0,T;G)$, $u'' \in L^2(0,T;V')$, *такий, що*

$$\begin{gathered} \mu(u''(t), v) + \eta(u(t), v) = \langle l(t), v\rangle \quad \forall t \in [0,T], \\ \mu(u'(0) - u^1, v) = 0, \quad \eta(u(0) - u^0, v) = 0, \quad \forall v \in V. \end{gathered} \tag{2.7}$$

На основі визначення (2.4) можемо констатувати, що

$$\text{білінійна форма } \mu(\cdot,\cdot)\colon G \times G \to \mathbb{R} \text{ неперервна, симетрична } i\ G - \text{еліптична}, \tag{2.8}$$

а тому визначає скалярний добуток в просторі G і норму

$$|v|_G = \sqrt{\mu(u,v)} \quad \forall v \in G, \tag{2.9}$$

еквівалентну нормі $||v||_G = \left(\sum_{i=1}^3 \left(||v_i||^2_{L^2(\Omega)} + ||\xi_i||^2_{L^2(\Omega)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. Введемо в просторі V норму $||v||_V = \left(\sum_{i=1}^3 \left(||v_i||^2_{W_2^1(\Omega)} + ||\xi_i||^2_{W_2^1(\Omega)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. Користуючись співвідношеннями (1.5) подамо білінійну форму (2.5) у вигляді

$$\eta(u,v) = \iint\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{11} b_{ij} \varepsilon_i(u)\varepsilon_j(v) A_1 A_2 \, d\alpha_1 d\alpha_2 \quad \forall u, v \in V. \tag{2.10}$$

Важливі властивості форми (2.10) констатує

Теорема 2.1. *Нехай серединна поверхня* Ω *ортотропної оболонки утворює обмежену область точок простору* $\mathbb{R}^2$ *з неперервною за Ліпшицем межею* Γ. *Припустимо, що*

(i) для компонент матриці $\mathbf{B}$ *виконуються властивості (1.14) та (1.15);*

(ii) для кожного $u \in V$ *такого, що* $\varepsilon_i(u) = 0$, $i = 1, ..., 11$, *в* Ω *випливає, що* $u = 0_V$.

Тоді симетрична білінійна форма $\eta(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ *із (2.10) є неперервною та* V*-еліптичною, тобто*

$$|\eta(u,v)| \le M||u||_V||v||_V, \quad M = const > 0, \tag{2.11}$$

$$\eta(u,u) \ge \beta||u||_V^2, \quad \beta = const > 0, \forall u, v \in V. \tag{2.12}$$

Доведення. Використовуючи деформаційні співвідношення (1.3) та нерівність Шварца неважко переконатись в справедливості (2.11). Дійсно,

$$|\eta(u,v)| \le C\Big|\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{11}\varepsilon_i(u)\varepsilon_i(v)A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2\Big| \le C|(u,v)_V| \le C||u||_V||v||_V \quad u,v \in V.$$

Тут і скрізь далі, де спеціально ненаголошено, символом C позначаються різні додатні сталі, значення яких не залежать від величин, які нас цікавлять. Далі, з огляду на припущення (i) отримуємо, що

$$\eta(u,u) \ge C\iint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{11}(\varepsilon_i(u))^2A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad \forall u \in V. \tag{2.13}$$

З огляду на (1.3) подамо оператори $\varepsilon_i(u)$ у вигляді лінійної комбінації похідних від узагальнених зміщень

$$\varepsilon_i(u) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{|l|\le 1}(g_{ijl}D^l u_j + g_{i,j+3,l}D^l\gamma_j), \quad i = 1, ..., 11, \tag{2.14}$$

з деякими коефіцієнтами $g_{ijl} \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1, \ldots, 11$, $j = 1, \ldots, 6$. Тут $D^l = \frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial\alpha_1^{l_1}\partial\alpha_2^{l_2}}$, $l = (l_1, l_2)$, $|l| = l_1 + l_2$. На основі коефіцієнтів g_{ijl} складемо прямокутну матрицю $\mathbf{P} = \{P_{ij}(\alpha,\xi)\}_{i=1,j=1}^{11,6}$, елементи якої визначаються згідно з правилами

$$P_{ij}(\alpha,\xi) = \sum_{|l|=1} g_{ijl}\xi_1^{l_1}\xi_2^{l_2}, \quad \xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, \ldots, 11, j = 1, \ldots, 6. \tag{2.15}$$

Із урахуванням структури операторів компонент деформації (1.3) та розкладів (2.14) можна безпосередньо переконатись, що

$$\mathbf{P}^T(\alpha,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi_1}{A_1} & 0 & 0 & \frac{\xi_2}{2A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_1\xi_2}{2A_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_2}{A_2} & 0 & \frac{\xi_1}{2A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_2\xi_1}{2A_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_1}{2A_1} & \frac{\xi_2}{2A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_1}{A_1} & 0 & \frac{\xi_2}{2A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_2}{A_2} & \frac{\xi_1}{2A_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_1}{2} & \frac{\xi_2}{2} \end{pmatrix}$$

Неважко бачити, що за будь-яких значень параметрів $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 \neq 0$, ненульових коефіцієнтів A_1, A_2 першої квадратичної форми та довільних значень головних кривин k_1, k_2 серединної поверхні оболонки матриця $\mathbf{P}$ завжди містить щонайменше шість лінійно незалежних рядків. Тоді із результатів [6] випливає, що система операторів $\varepsilon_i \in \mathcal{L}(V, L^2(\Omega))$, $i = 1, \ldots, 11$, є коерцитивною щодо простору $[L^2(\Omega)]^6$, тобто знайдеться стала $C = \text{const} > 0$ така, що

$$\sum_{i=1}^{11} ||\varepsilon_i(u)||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \Big(||u_i||^2_{L^2(\Omega)} + ||\gamma_i||^2_{L^2(\Omega)} \Big) \geq C||u||^2_V \ \forall u \in V. \tag{2.16}$$

Приймаючи до уваги припущення (ii) та теореми 7.2, 7.3 із першого розділу праці [6], приходимо до висновку, що система операторів $\{\varepsilon_i(u)\}_{i=1}^{11}$ є коерцитивною в просторі V, тобто

$$\sum_{i=1}^{11} ||\varepsilon_i(u)||^2_{L^2(\Omega)} \geq C||u||^2_V \quad \forall u \in V, C = \text{const} > 0. \tag{2.17}$$

Оцінки (2.13) та (2.17) приводять до бажаної нерівності (2.12).

Зауваження 2.1. Допущення (ii) теореми 2.1 є ключовим не лише для її доведення, але й для практичного використання при розв'язуванні прикладних задач. Цей факт вимагає конкретизації структури простору

$$H = \{\omega | \omega \in [W_2^1(\Omega)]^6,\ \varepsilon_i(\omega) = 0,\ i = 1, \ldots, 11\}, \tag{2.18}$$

узагальнені вектори зміщень якого володіють нульовою енергією деформації оболонки і визначають характер її жорстких зміщень. Щоб з'ясувати суть справи проведемо такий аналіз для пластинки. В цьому випадку співвідношення $\varepsilon_i(\omega) = 0$, $i = 1, \ldots, 11$, з урахуванням (1.3) визначають лінійну однорідну систему рівнянь з частинними похідними наступного вигляду

$$\begin{gathered} \partial_1 u_1 = 0,\ \partial_2 u_2 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 = 0,\ \gamma_1 + \partial_1 u_3 = 0, \\ \gamma_2 + \partial_2 u_3 = 0,\ \partial_1 \gamma_1 = 0,\ \partial_2 \gamma_2 = 0,\ \partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2 = 0,\ \partial_1 \gamma_3 = 0,\ \partial_2 \gamma_3 = 0. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Неважко переконатись, що загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$\begin{gathered} u_1 = C_1 \alpha_2 + C_2,\ u_2 = -C_1 \alpha_1 + C_3,\ u_3 = C_4 \alpha_1 + C_5 \alpha_2,\ \gamma_1 = -C_6 \alpha_2 - C_4, \\ \gamma_2 = C_6 \alpha_1 - C_5,\ \gamma_3 = 0, \quad C_i = \text{const}, i = 1, \ldots, 6. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Очевидно, що базисом підпростору H є векторні функції наступного вигляду

$$\begin{aligned} &\omega_1 = (0,0,0,-\alpha_2,\alpha_1,0), \quad \omega_2 = (0,0,-\alpha_1,1,0,0), \quad \omega_3 = (0,0,-\alpha_2,0,1,0), \\ &\omega_4 = (\alpha_2,-\alpha_1,0,0,0,0), \qquad \omega_5 = (1,0,0,0,0,0), \qquad \omega_6 = (0,1,0,0,0,0). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Отже, якщо пластинка закріплена по кожній компоненті зміщень u_1, u_2, u_3, γ_1, γ_2 на певних частинах ненульової міри контуру Γ, то сталі $C_i = 0$, $i = 1, \ldots, 6$, і допущення (ii) теореми 2.1 виконується.

Прикладом таких крайових умов, що виключають жорсткі зміщення, є вибрані нами геометричні крайові умови (1.7).

Наслідок 2.1. *Білінійна форма (2.10) визначає скалярний добуток на просторі узагальнених векторів зміщень V і норму*

$$|v|_V = \sqrt{\eta(v,v)} \quad \forall v \in V, \tag{2.22}$$

еквівалентну нормі $||v||_V$.

Один з основних результатів стосовно варіаційної задачі (2.7) про динамічне деформування зсувних оболонок встановлює

Теорема 2.2. *Припустимо, що виконуються умови теореми 2.1. Тоді існує єдиний розв'язок варіаційної задачі (2.7) такий, що $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^\infty(0,T;G)$, $u'' \in L^2(0,T;V')$. Крім того, цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних задачі та зовнішнього навантаження, тобто існує $C = const > 0$ така, що*

$$|u(t)|_V^2 + |u'(t)|_G^2 \leq C\Big\{||u^0||_V^2 + ||u^1||_G^2 + \int_0^t ||l(\tau)||_*^2\, d\tau\Big\} \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.23}$$

Доведення. Користуючись методикою з праць [9,10], доведення проведемо поетапно: спочатку покажемо коректність напівдискретизованої за просторовими змінними варіаційної задачі. Далі, скориставшись граничним переходом, доведемо коректність вихідної варіаційної задачі.

Нехай $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ — базис сепарабельного гільбертового простору V і для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо лінійну оболонку V_n системи функцій $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Очевидно, що замикання лінійного простору $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ за нормою простору V збігається з V. Послідовність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $\{u_n(t)\}_{n=1}^\infty$ розв'язку задачі (2.7) визначимо у вигляді функцій

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)\varphi_i, \tag{2.24}$$

що є розв'язками задач:

знайти вектор узагальнених зміщень $u_n \in L^2(0,T;V_n)$ такий, що

$$\begin{gathered} \mu(u_n''(t),v) + \eta(u_n(t),v) = \langle l(t),v\rangle, \\ \mu(u_n'(0),v) = \mu(u^1,v), \quad \eta(u_n(0),v) = \eta(u^0,v) \ \ \forall v \in V_n, n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Очевидно, що задача (2.25) еквівалентна задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^n \Big\{\mu(\varphi_i,\varphi_j)q_j''(t) + \eta(\varphi_i,\varphi_j)q_j(t)\Big\} = \langle l(t),\varphi_i\rangle \quad \forall t \in (0,T] \\ \sum_{j=1}^n \eta(\varphi_i,\varphi_j)q_j(0) = \eta(u^0,\varphi_i), \quad \sum_{j=1}^n \mu(\varphi_i,\varphi_j)q_j'(0) = \mu(u^1,\varphi_i), \quad i = 1,\ldots,n. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Внаслідок G-еліптичності білінійної форми $\mu(\cdot,\cdot)$ та V-еліптичності білінійної форми $\eta(\cdot,\cdot)$ матриці $\mathbf{M} = \{\mu(\varphi_i,\varphi_j)\}_{i,j=1}^n$ та $\mathbf{N} = \{\eta(\varphi_i,\varphi_j)\}_{i,j=1}^n$ додатно визначені; тому система (2.26) є невиродженою системою лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Введемо вектор $\mathbf{r} = (q_1'(t), \ldots, q_n'(t))$. Тоді задачу Коші (2.26) можна записати $\forall t \in [0,T]$ у вигляді

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}'(t) \\ \mathbf{r}'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{Nq}(0) \\ \mathbf{Mr}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^0 \\ \mathbf{r}^0 \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

або в скороченому записі

$$\mathbf{s}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{s}(t)) \;\; \forall t \in [0,T], \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}^0, \tag{2.28}$$

де

$$\mathbf{s}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{r}(t)),\; \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Nq}(t) \end{pmatrix},\; \mathbf{s}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^{-1}\mathbf{q}^0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}^0 \end{pmatrix}.$$

Неважко бачити, що функції $F_i(t, s_1, \ldots, s_{2n})$ неперервні за змінними $s_1, \ldots, s_{2n}$ та для будь-яких значень $\tilde{s}_i$ задовольняють узагальнену умову Ліпшиця

$$\begin{aligned} ||\mathbf{F}(t, \tilde{\mathbf{s}}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{s})||^2 &= ||\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q})||^2 + ||\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}||^2 \le \\ &\le \Big(||\mathbf{M}^{-1}||^2||\mathbf{N}||^2 + 1\Big)||\tilde{\mathbf{s}} - \mathbf{s}||^2,\; i = 1, \ldots, 11, \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Отже, згідно теореми Каратеодорі [5] задача Коші (2.28) має єдиний розв'язок на всьому інтервалі [0,T].

(ii) Для доведення неперервної залежності розв'язку напівдискретизованої задачі (2.25) від початкових даних та правих частин скористаємось енергетичними міркуваннями. Покладемо в (2.25) $v = u_h'(t)$. Враховуючи позначення для норм (2.9), (2.22), отримаємо наступне енергетичне рівняння

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{|u_n'(t)|_G^2 + |u_n(t)|_V^2\Big\} = \langle l(t), u_n'(t)\rangle,\; \forall t \in (0,T]. \tag{2.29}$$

Після інтегрування рівняння (2.29) в часі на проміжку [0,t] отримаємо

$$\frac{1}{2}\Big\{|u_n'(t)|_V^2 + |u_n(t)|_G^2\Big\} = \frac{1}{2}\Big\{|u_n'(0)|_V^2 + |u_n(0)|_G^2\Big\} + \int_0^t \langle l(\tau), u_n'(\tau)\rangle\, d\tau \;\forall t \in [0,T]. \tag{2.30}$$

Для спрощення записів введемо енергетичну норму

$$||u(t)||_E = \sqrt{|u(t)|_V^2 + |u'(t)|_G^2}. \tag{2.31}$$

Оскільки при зроблених стосовно даних задачі (2.25) припущеннях $l \in L^2(0,T;V')$, то

$$|\langle l(t), u_n'(t)\rangle| \le C||l(t)||_*^2 + ||u_n'(t)||_V^2. \tag{2.32}$$

Приймаючи до уваги початкові умови задачі (2.25) і останню нерівність, на основі енергетичного рівняння (2.30) $\forall t \in [0,T]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$||u_n(t)||_E^2 \le |u^0|_V^2 + |u^1|_G^2 + 2C\int_0^t ||l(\tau)||_*^2\, d\tau + 2\int_0^t ||u_n(\tau)||_E^2\, d\tau. \tag{2.33}$$

Застосувавши до останньої нерівності лему Гронуолла [3], стверджуємо, що існує стала $C = C(T) = \text{const} > 0$ така, що

$$||u_n(t)||_E^2 \leq C\Big\{|u^0|_V^2 + |u^1|_G^2 + \int_0^t ||l(\tau)||_*^2\, d\tau\Big\} \quad \forall t \in [0,T], \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.34}$$

Тому,

$$\begin{gathered}\text{послідовність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна } \{u_n\} \\ /\text{відповідно } \{u_n'\} \text{ /утворює обмежену множину в просторі } L^\infty(0,T;V) \\ /\text{відповідно в просторі } L^\infty(0,T;G)/.\end{gathered} \tag{2.35}$$

З огляду на твердження (2.35) із послідовності напівдискретних апроксимацій $\{u_n\}$ можна вибрати підпослідовність $\{u_\Delta\}$, що збігається до деякого вектора u, а саме

$$u_\Delta \to u \text{ в } L^\infty(0,T;V) \ * -\text{слабко}, \quad u_\Delta' \to u' \text{ в } L^\infty(0,T;G) \ * -\text{слабко}. \tag{2.36}$$

Залишається показати, що побудований таким чином вектор u є розв'язком варіаційної задачі (2.7). Дійсно, виберемо функцію $\psi(t) \in C_T = \{\psi \in C^1([0,T]) | \psi(t) = 0\}$, домножимо на неї рівняння задачі (2.25) та проінтегруємо результат на проміжку [0,t]. Після інтегрування частинами отримаємо

$$\begin{gathered}\int_0^t \{-\mu(u_\Delta', v)\psi' + \eta(u_\Delta, v)\psi - \langle l, v\rangle\psi\}\, d\tau = \\ = -\mu(u_\Delta'(0), v(0))\psi(0) = -\mu(u^1, v(0))\psi(0)\ \forall v \in V_n.\end{gathered} \tag{2.37}$$

В останній рівності перейдемо до границі при $\Delta \to \infty$ і знову виконаємо інтегрування частинами. В результаті, внаслідок (2.36), одержимо рівняння

$$\int_0^t \{-\mu(u'', v) + \eta(u,v) - \langle l, v\rangle\}\psi\, d\tau = \mu(u'(0) - u^1, v(0))\psi(0)\ \forall v \in V_n, \forall \psi \in C_T. \tag{2.38}$$

Звідси, внаслідок довільності t, випливає, що побудований в (2.36) вектор u задовольняє друге рівняння варіаційної задачі (2.7). Крім цього, функція в фігурних дужках в лівій частині рівняння (2.38) є ортогональною на проміжку $[0,t]$ до довільної функції $\psi \in C_T$, звідки, внаслідок щільності W в V, випливає, що вектор u також задовольняє перше рівняння задачі (2.7). Нарешті з (2.25) та (2.36) безпосередньо випливає, що

$$0 = \eta(u_\Delta(0) - u^0, v) \to \eta(u(0) - u^0, v) = 0 \text{ при } \Delta \to \infty \quad \forall v \in V_n, \tag{2.39}$$

тобто границя $u(t)$ задовольняє і другу початкову умову варіаційної задачі (2.7).

Отже, побудована в (2.36) функція u є розв'язком варіаційної задачі (2.7). Існування розв'язку варіаційної задачі доведено.

Оцінку (2.23) отримуємо з апріорної оцінки (2.34) шляхом граничного переходу при $n \to \infty$. Оцінка (2.23) виражає окрім неперервної залежності розв'язку варіаційної задачі, обмеженість повної енергії оболонки в кожний момент часу.

Єдиність розв'язку варіаційної задачі (2.7) легко встановлюється міркуваннями від супротивного з використанням нерівності (2.23).

Отже, доведення теореми завершено.

3. Заключні зауваження. В даній праці встановлено достатні (й цілком вживані для практичних застосувань) умови коректності варіаційних еволюційних задач для зсувних оболонок з деформівною нормаллю. Структура просторів кінематично допустимих векторів узагальнених зміщень цієї теорії оболонок дозволяє використовувати широко вживані апроксимації методу скінченних елементів для побудови напівдискретизованої за просторовими змінними задачі (2.25), створюючи тим самим базис для успішного чисельного аналізу задач статики зсувних оболонок. У розглядуваних задачах динаміки ця процедура повинна доповнюватись належним вибором методу інтегруванння задачі Коші (2.26). З огляду на це можна рекомендувати використання однокрокових рекурентних схем інтегрування в часі, запропонованих в працях [1,9].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.– М.: Стройиздат, 1987.– 447 с.
2. Вагін П.П., Іванова Н.В. *Нелінійне деформування багатошарових оболонок. Постановка задачі* Львів. ун-т.– Львів, 1996.– 27 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 20.12.96, 285 Ук96.
3. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними.– Київ: Вища школа, 1995.– 350 с.
4. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наукова думка, 1988.– 261 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– 576 с.
6. Литвинов В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.– М.: Наука, 1987.– 368 с.
7. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек.– Львов: Вища школа, 1978.– 159 с.
8. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин.– Рига: Зинатне, 1988.– 284 с.
9. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач.– Київ: НМКВО, 1991.– 88 с.
10. V. Girault, P.-A. Raviart. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations.– Lect. Notes Math, 1979.– V. 749. – 200 pp.

Львівський державний університет, факультет прикладної математики та інформатики.

Надійшло 1.03.98