УДК 517.945

DÉTERMINATION SIMULTANÉE DE DEUX COEFFICIENTS AUX VARIABLES DIVERSES DANS UNE ÉQUATION PARABOLIQUE

M.I. Ivantchov

M. Ivantchov. *Simultaneous determination of two coefficients dependent on diverse variables in a parabolic equation*, Matematychni Studii, **10**(1998) 173–187.

In the paper we consider an inverse problem for a parabolic equation with two unknown coefficient dependent on diverse variables. We establish existense and uniqueness conditions for the given problem.

Н.И. Иванчов. *Одновременное определение двух коэффициентов, зависящих от различных аргументов, в параболическом уравнении* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 2. – С.173–187.

В работе рассматривается обратная задача для параболического уравнения с двумя неизвестными коэффициентами, зависящими от различных аргументов. Устанавливаются условия существования и единственности решения данной задачи.

1. Introduction. Des problèmes inverses d'identification d'une équation possèdent une telle particularité que l'on ne peut pas trouver des coefficients inconnus dépendants de toutes les variables . Ils peuvent dépendre du temps [1]–[3], ou seulement des variables spatiales [4], [5], ou du temps et de quelques variables spatiales [6]. Cela s'explique par le fait que la condition de surdétermination est posée sur un ensemble fixé et, par suite, la fonction, donnée dans cette condition, ne dépend pas de toutes les variables indépendantes. Cette circonstance fait impossible de reconstituer une fonction dépendante de tous les arguments. L'une des possibilités de reconstitution complète du coefficient consiste à sa représentation sous forme de produit de deux fonctions aux variables diverses dont l'une est donnée et l'autre doit être déterminée [7]–[9]. En cas où les facteurs de ce produit sont inconnus, on vient au problème inverse de détermination simultanée de deux fonctions inconnues aux variables diverses. Des problèmes inverses de détermination de deux coefficients inconnus dans une équation parabolique ont été étudiés dans les articles [10]–[13] où on a supposé que les deux fonctions dépendent des mêmes arguments. L'identification simultanée de deux coefficients $f(t), g(x)$ dans l'équation $u_t = u_{xx} + (f(t) + g(x))u$ a été étudiée par Savateev E.G. [14].

Dans cet article on considère le problème inverse pour l'équation

$$u_t = a(t)\,(u_{xx} + b(x)u) + f(x,t) \tag{1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

aux coefficients inconnus $a(t), b(x)$. D'une part, cette équation représente un cas particulier de l'équation $u_t = a_0(x,t)u_{xx} + b_0(x,t)u + f(x,t)$ où les coefficients inconnus $a_0(x,t), b_0(x,t)$ sont de la forme $a_0(x,t) \equiv a(t), b_0(x,t) \equiv a(t)b(x)$. D'autre part, on réduit à (1) l'équation suivante $v_t = a(t)a_1(y)v_{yy} + g(y,t)$ aux inconnus $a(t), a_1(y)$ après le changement de variable $x = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{a_1(\eta)}}$ et le changement correspondant de la fonction inconnue.

Pour l'équation (1) nous considérons dans le domaine $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ le problème inverse de détermination des fonctions $a(t) > 0, b(x) \leq 0, u(x,t)$ satisfaisantes à la condition initiale

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

aux conditions aux limites

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

et aux conditions de surdétermination

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{T_0} a(t)u(x,t)dt = \psi(x), \quad x \in [0,h], \tag{5}$$

$T_0 \in (0,T]$ étant un nombre fixé.

Définition. Nous dirons que $(a(t), b(x), u(x,t))$ est une solution du problème inverse (1)–(5) si les conditions suivantes sont vérifiées:
1) $a(t) \in C[0,T],\ a(t) > 0,\ t \in [0,T]$;
2) $b(x) \in C^\alpha[0,h],\ b(x) \leq 0,\ x \in [0,h],\ 0 < \alpha < 1$;
3) $u(x,t) \in C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$;
4) les fonctions $(a(t), b(x), u(x,t))$ satisfont à (1)–(5).

Ici on utilise les notations habituelles [15] $C^\alpha[0,h]$ pour l'espace des fonctions continues satisfaisant à la condition de Hölder à l'exposant α sur $[0,h]$ et $C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$ pour les fonctions continues avec ses dérivées u_x, u_{xx}, u_t dans $\overline{Q}_T$, u_{xx} satisfaisant à la condition de Hölder à l'exposant α par rapport à $x \in [0,h]$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$.

Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites:

(A1) $\varphi(x), \psi(x) \in C^{2+\alpha}[0,h],\ \mu_1(t), \mu_2(t) \in C^1[0,T],\ \mu_3(t) \in C[0,T],\ f(x,t) \in C^{2,0}(\overline{Q}_T)$;

(A2) $\varphi(0) = \mu_1(0),\ \varphi(h) = \mu_2(0),\ \mu_1'(0) = a(0)\left(\varphi''(0) + b(0)\varphi(0)\right) + f(0,0),\ \mu_2'(0) = a(0)\left(\varphi''(h) + b(h)\varphi(h)\right) + f(h,0)$, où $a(0) = \frac{\mu_3(0)}{\varphi'(0)}$, $b(0) = \frac{1}{\psi(0)}\big(\mu_1(T_0) - \varphi(0) - \psi''(0) - \int_0^{T_0} f(0,t)dt\big)$, $b(h) = \frac{1}{\psi(h)}(\mu_2(T_0) - \varphi(h) - \psi''(h) - \int_0^{T_0} f(h,t)dt)$;

(A3) $\varphi(x) \geq 0,\ \varphi'(x) > 0,\ \varphi''(x) \leq 0,\ \psi(x) > 0,\ \psi''(x) \geq 0,\ x \in [0,h]$; $\mu_i(t) \geq 0, i = 1,2,\ \mu_3(t) > 0,\ \mu_1(t) - \varphi(0) - \int_0^t f(0,\tau)d\tau \leq 0,\ \mu_2(t) - \varphi(h) - \int_0^t f(h,\tau)d\tau \leq 0,\ t \in [0,T]$; $f(x,t) \geq 0,\ f_{xx}(x,t) \leq 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_T$.

Remarquons que (A2) contient la condition de concordance de nul et premier ordre [14] et que l'on trouve les valeurs $a(0), b(0), b(h)$ des conditions de surdétermination (4), (5).

2. Réduction du problème inverse à un système d'équations. Posons

$$G_{0k}(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\quad k=1,2,$$
$$\theta(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau, \tag{6}$$

où $G_{0k}(x,t,\xi,\tau), k=1,2$ sont les fonctions de Green pour l'équation $u_t=a(t)u_{xx}$ aux conditions aux limites de premier et second espèce, respectivement.

À l'aide de la fonction de Green $G_{01}(x,t,\xi,\tau)$, on réduit le problème direct (1)–(3) à l'équation intégrale

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int_0^t\int_0^h G_{01}(x,t,\xi,\tau)a(\tau)b(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{7}$$

où

$$u_0(x,t)=\int_0^h G_{01}(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t G_{01\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t G_{01\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^h G_{01}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{8}$$

Remarquons que par les conditions (A1), (A2) la fonction $u_0(x,t)$ appartient à $C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$ et satisfait à l'équation (1) avec $b(x)\equiv 0$ et aux conditions (2), (3).

Le problème (1)–(3) et l'équation (7) sont équivalents quelles que soient des fonctions $a(t)\in C[0,T]$, $a(t)>0$ et $b(x)\in C^\alpha[0,h]$. En effet, étant donnée une solution du problème (1)–(3) $u(x,t)\in C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$, on établit par les propriétés de la fonction de Green que $u(x,t)$ satisfait à l'équation intégrale (7). D'autre part, si $u(x,t)\in C^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ est une solution de l'équation (7), on en déduit par les propriétés des potentiels de la chaleur [16] que la fonction $u(x,t)$ appartient à $C^{2,1}(Q_T)\cap C^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ et vérifie les conditions (1)–(3). En utilisant les suppositions (A1), (A2), on en déduit que $u(x,t)\in C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$ [15].

On obtient la deuxième équation du système en reportant $u(x,t)$ définie par (7) dans la condition (4):

$$a(t)=\frac{\mu_3(t)}{u_{0x}(0,t)+\int_0^t\int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau)a(\tau)b(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau},\quad t\in[0,T]. \tag{9}$$

Pour trouver $u_{0x}(0,t)$, on utilise les égalités

$$G_{01x}(x,t,\xi,\tau)=-G_{02\xi}(x,t,\xi,\tau),\quad a(\tau)G_{02xx}(x,t,\xi,\tau)=-G_{02\tau}(x,t,\xi,\tau) \tag{10}$$

et l'intégration par parties:

$$u_{0x}(x,t)=\int_0^h G_{02}(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi-\int_0^t G_{02}(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t G_{02}(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau+\int_0^t\int_0^h G_{01x}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \quad (11)$$

On obtient la troisième équation du système en intégrant l'équation (1) par rapport à t entre les limites 0 et T_0 et en utilisant la condition (5):

$$b(x)=\frac{u(x,T_0)-\varphi(x)-\psi''(x)-\int_0^{T_0}f(x,t)dt}{\psi(x)}, \quad x\in[0,h]. \quad (12)$$

On a donc réduit le problème inverse (1)–(5) au système d'équations (7), (9), (12).

Le problème inverse (1)–(5) et le système d'équations (7), (9), (12) sont équivalents au sens suivant. Si $(a(t),b(x),u(x,t))$ est une solution du problème (1)–(5) vérifiante la définition, les équations (7), (9), (12) sont satisfaites à cause de la manière de leur construction. D'autre part, soit $(a(t),b(x),u(x,t))\in C[0,T]\times C[0,h]\times C(\overline{Q}_T), a(t)>0, t\in[0,T],\ b(x)\le 0, x\in[0,h]$ une solution du système (7), (9), (12). Par les conditions (A1), (A2) et les propriétés des potentiels de la chaleur, on trouve, en tenant compte de (7), que $u(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$. Ceci posé, on obtient de l'équation (12) que $b(x)\in C^{\alpha}[0,h]$. En revenant à l'équation (7), on en déduit que la fonction $u(x,t)$ appartient à $C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$ [15] et vérifie l'équation (1) et les conditions (2), (3) pour toutes fonctions $a(t)\in C[0,T], a(t)>0, b(x)\in C^{\alpha}[0,h]$. Par suite, la condition (4) sera aussi satisfaite. Il nous reste à montrer que la condition (5) est vérifiée. Supposons que

$$\int_0^{T_0}a(t)u(x,t)dt=\chi(x), \quad x\in[0,h], \quad (13)$$

et $\chi(x)\not\equiv\psi(x)$. Reportons $b(x)$ de (12) à l'équation (1) et intégrons le résultat par rapport à t entre les limites 0 et T_0. En tenant compte de (13), on trouve

$$u(x,T_0)-\varphi(x)=\frac{\chi(x)}{\psi(x)}\Big(u(x,T_0)-\varphi(x)-\psi''(x)-\int_0^{T_0}f(x,t)dt\Big)+\chi''(x)+\int_0^{T_0}f(x,t)dt.$$

On transforme cette égalité à la forme

$$\chi''(x)\psi(x)-\chi(x)\psi''(x)+q(x)\left(\chi(x)-\psi(x)\right)=0, \quad (14)$$

où

$$q(x)=u(x,T_0)-\varphi(x)-\int_0^{T_0}f(x,t)dt. \quad (15)$$

À l'aide de la fonction $\omega(x)=\chi(x)/\psi(x)$, l'équation (14) s'écrit ainsi

$$\omega''(x)+\frac{2\psi'(x)}{\psi(x)}\omega'(x)+\frac{q(x)}{\psi(x)}(\omega(x)-1)=0. \quad (16)$$

Par les conditions (3) et (5) on a

$$\chi(0)=\psi(0)=\int_0^{T_0}a(t)\mu_1(t)\,dt, \qquad \chi(h)=\psi(h)=\int_0^{T_0}a(t)\mu_2(t)\,dt.$$

Par conséquent,

$$\omega(0) = \omega(h) = 1. \tag{17}$$

Le problème (15), (17) admet une solution évidente $\omega(x) \equiv 1$. Si $q(x) \leq 0$, cette solution est unique et $\chi(x) \equiv \psi(x)$ ce qui signifie la vérification de la condition (5). Montrons que $q(x) \leq 0, x \in [0,h]$. Par la condition (A3) et le principe de maximum, on a $u(x,t) \geq 0$ dans le domaine $\overline{Q}_T$. De l'équation (7) on trouve que

$$0 \leq u(x,t) \leq u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_T \tag{18}$$

puisque $b(x) \leq 0$.

Considérons la fonction $w(x,t) = u_0(x,t) - \varphi(x) - \int_0^t f(x,\tau)d\tau$. Par les propriétés de $u_0(x,t)$, la fonction $w(x,t)$ satisfait à l'équation

$$w_t = a(t)w_{xx} + a(t)\varphi''(x) + a(t)\int_0^t f_{xx}(x,\tau)d\tau \tag{19}$$

et aux conditions

$$w(x,0) = 0,\ x \in [0,h], \quad w(0,t) = \mu_1(t) - \varphi(0) - \int_0^t f(0,\tau)d\tau,$$
$$w(h,t) = \mu_2(t) - \varphi(h) - \int_0^t f(h,\tau)d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{20}$$

D'après le principe de maximum et la condition (A3), on a $w(x,t) \leq 0$ ce qui donne

$$u_0(x,t) - \varphi(x) - \int_0^t f(x,\tau)d\tau \leq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{21}$$

Par (15), (18), (21), on déduit aisément que $q(x) \leq 0$, et la démonstration d'équivalence du problème (1)–(5) et du système (7), (9), (12) est achevée. Cela signifie qu'il suffit d'établir l'existence de solution du système (7), (9), (12) dans l'espace $C[0,T] \times C[0,h] \times C(\overline{Q}_T)$.

3. Existence de solution du système (7), (9), (12). Pour établir l'existence de solution du système (7), (9), (12), nous appliquons le théorème de Schauder de point fixe.

Évaluons des solutions du système (7), (9), (12). D'après (21) et la condition (A3), on trouve

$$0 \leq u_0(x,t) \leq M_0 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{22}$$

où $M_0 = \max_{[0,h]} \varphi(x) + \max_{\overline{Q}_T} \int_0^t f(x,\tau)d\tau$.

On obtient de (18) et (22) l'estimation de $u(x,t)$:

$$0 \leq u(x,t) \leq M_0 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{23}$$

De (12), (18), (21) et (A3), il suit que $b(x) \leq 0,\ x \in [0,h]$. D'autre part, en tenant compte de (23), il découle de l'équation (12) que $|b(x)| \leq B_0$ avec une constante positive $B_0 = 2M_0 + \max_{[0,h]} \psi''(x)$. Par conséquent, on a l'estimation

$$-B_0 \leq b(x) \leq 0, \quad x \in [0,h]. \tag{24}$$

En étudiant des solutions de l'équation (9), on remarque que le dénominateur dans (9) est égale en point $t = 0$ à $u_{0x}(0,0) = \varphi'(0) > 0$. Par suite, il existe un nombre t_0, $0 < t_0 \le T$, tel que $u_x(0,t) > 0$ pour $t \in [0,t_0]$, la valeur de t_0 sera indiquée plus loin. Par les propriétés de la fonction de Green $G_{01}(0,t,\xi,\tau) = 0$, $G_{01}(x,t,\xi,\tau) > 0$, $x \in (0,h)$, on trouve $G_{01x}(0,t,\xi,\tau) \ge 0$. Il en découle que

$$\int_0^t \int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau)a(\tau)b(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau \le 0.$$

Cette inégalité permet d'évaluer $a(t)$ sur $[0,t_0]$ comme suit:

$$a(t) \ge \frac{\mu_3(t)}{u_{0x}(0,t)}. \tag{25}$$

Estimons $u_{0x}(0,t)$ en partant de (11). On vérifie aisément que

$$\int_0^h G_{02}(x,t,\xi,0)\,d\xi = 1. \tag{26}$$

Ceci posé, on trouve $\int_0^h G_{02}(0,t,\xi,0)\varphi'(\xi)\,d\xi \le \max\limits_{[0,h]} \varphi'(x)$. En remplaçant $G_{02}(x,t,\xi,\tau)$ par son expression de (6), on obtient

$$\int_0^t G_{02}(0,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right) d\tau.$$

Par l'inégalité

$$z\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2z^2\right) \le C_1 < \infty, \quad z \in (0,\infty), \tag{27}$$

il vient

$$\left|\int_0^t G_{02}(0,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau\right| \le \frac{\max_{[0,T]} |\mu_1'(t)|}{\sqrt{\pi}} \left(2C_1 t + \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right).$$

On utilise de même (27) pour évaluer l'intégrale

$$\int_0^t G_{02}(0,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu_2'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) d\tau \le C_2 t.$$

De façon similaire, on trouve

$$\int_0^t \int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}} \int_0^h f(\xi,\tau)\times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) d\xi \le \frac{\max_{\overline{Q}_T} f(x,t)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\times$$

$$\times \int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi + 2nh) \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) d\xi.$$

En calculant l'intégrale par rapport à ξ et en utilisant l'inégalité (27), on en déduit

$$\int_0^t \int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \le C_3 t + C_4 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Finalement, on obtient l'estimation

$$u_{0x}(0,t) \le C_5 + C_6 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \tag{28}$$

où les constantes $C_5 > 0, C_6 > 0$ sont déterminées par les données du problème (1)–(5).

En revenant à (25), on en déduit à l'aide de (28)

$$a(t) \ge \frac{C_7}{C_5 + C_8 (\min_{[0,t_0]} a(t))^{-1/2}}.$$

On considère l'inégalité obtenue en point de minimum de la fonction $a(t)$ sur $[0,t_0]$ et on la résout par rapport à $(\min_{[0,t_0]} a(t))^{1/2}$. Par suite, on a l'estimation

$$a(t) \ge A_0 > 0, \quad t \in [0,t_0] \tag{29}$$

avec une constante A_0 déterminée par C_5, C_7, C_8.

Pour trouver l'estimation de $\max_{[0,t_0]} a(t)$, on évalue à l'aide de (23), (24) l'expression suivante:

$$\int_0^t \int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau) a(\tau) b(\xi) u(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \ge -B_0 M_0 \int_0^t \int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau) a(\tau)\, d\xi d\tau.$$

L'application de (10) permet de calculer l'intégrale, et on vient à l'estimation

$$\int_0^t \int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau) a(\tau) b(\xi) u(\xi,\tau) d\xi d\tau \ge -B_0 M_0 \int_0^t \big(G_{02}(0,t,0,\tau) -$$
$$-G_{02}(0,t,h,\tau)\big) a(\tau) d\tau = -\frac{B_0 M_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\bigg(-\frac{n^2h^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\bigg) d\tau.$$

Par le changement $\theta(t)-\theta(\tau) = \sigma$, on obtient

$$\int_0^t \int_0^h G_{01x}(0,t,\xi,\tau) a(\tau) b(\xi) u(\xi,\tau) d\xi d\tau \ge$$
$$\ge -\frac{B_0 M_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma. \tag{30}$$

D'après (A3), (11), (26), (30), on déduit de l'équation (9):

$$a(t) \le \frac{\max_{[0,T]} \mu_3(t)}{\min_{[0,h]} \varphi'(x) - \dfrac{B_0 M_0}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma},$$

ce qui peut s'écrire

$$a(t) \le \frac{C_9}{C_{10} - C_{11} \displaystyle\int_0^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma}, \quad t \in [0, t_0]. \tag{31}$$

En multipliant (31) par le dénominateur et en intégrant entre les limites 0 et t, on trouve

$$\int_0^t a(\tau)\left(C_{10} - C_{11} \int_0^{\theta(\tau)} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma\right) d\tau \le C_9 t.$$

Le changement de variable $\theta(\tau) = z$ réduit cette inégalité à la forme

$$\int_0^{\theta(t)} \left(C_{10} - C_{11} \int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma\right) dz \le C_9 t. \tag{32}$$

Posons

$$r(s) = \int_0^{s} \left(C_{10} - C_{11} \int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma\right) dz.$$

Soit $s_0 > 0$ tel que

$$C_{10} - C_{11} \int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma > 0, \quad z \in [0, s_0]. \tag{33}$$

Il en suit que $r(s) > 0$ sur $(0, s_0]$ et $r'(s) > 0$ sur $[0, s_0]$. Par conséquent, il existe la fonction inverse $r^{-1}(y)$, définie sur le segment $[0, R_0]$, où $R_0 = r(s_0)$. À l'aide de la fonction $r(s)$, l'inégalité (32) s'écrit comme $r(\theta(t)) \le C_9 t$, d'où on trouve

$$\theta(t) \le r^{-1}(C_9 t), \tag{34}$$

pourvu que $C_9 t \le R_0$. Autrement dit, on a l'estimation (34) sur $[0, t_0]$ si le nombre $t_0, 0 < t_0 \le T$ satisfait à la condition

$$C_9 t_0 \le R_0. \tag{35}$$

Dans la suite, nous supposerons que t_0 vérifie la condition (35) et $T_0 \le t_0$. L'application de (34) à (31) nous donne l'estimation

$$a(t) \le A_1 < \infty, \quad t \in [0, t_0], \tag{36}$$

où

$$A_1 = \frac{C_9}{C_{10} - C_{11}\displaystyle\int_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2h^2}{4\sigma}\right) d\sigma}, \qquad t_1 = r^{-1}(C_9 t_0).$$

Cela signifie que toute solution $(a(t), b(x), u(x,t))$ du système (7), (9), (12) vérifie les estimations (23), (24), (29), (36) pour $x \in [0,h],\ t \in [0,t_0]$, où le nombre t_0 est déterminé par (33), (35).

Désignons par $\mathcal{N}$ un ensemble de fonctions dans l'espace de Banach $\mathbb{B} \equiv C[0.t_0] \times C[0,h] \times C(\overline{Q}_{t_0})$ défini de la façon suivante: $\mathcal{N} = \big\{(a(t), b(x), u(x,t)) : A_0 \le a(t) \le A_1,\ -B_0 \le b(x) \le 0,\ 0 \le u(x,t) \le M_0\big\}$. Écrivons le système (7), (9), (12) sous la forme d'une équation opérateur

$$(a(t), b(x), u(x,t)) = P(a(t), b(x), u(x,t)). \tag{37}$$

Par les estimations (23), (24), (29), (36), on voit que l'opérateur P transforme $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$. D'après le théorème de Schauder, pour établir l'existence de solution de l'équation (37), il faut montrer que l'opérateur P est compact. Pour ce but, on doit vérifier, selon le théorème d'Ascoli–Arzelà, que l'ensemble $P\mathcal{N}$ est équicontinu. En écrivant l'équation (37) sous la forme

$$\begin{aligned} a(t) &= P_1(a(t), b(x), u(x,t))(t),\\ b(x) &= P_2(a(t), b(x), u(x,t))(x),\\ u(x,t) &= P_3(a(t), b(x), u(x,t))(x,t), \end{aligned}$$

on doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|P_1(t_2) - P_1(t_1)| < \varepsilon, \quad |P_2(x_2) - P_2(x_1)| < \varepsilon, \quad |P_3(x_2,t_2) - P_3(x_1,t_1)| < \varepsilon, \tag{38}$$

lorsque $|x_2 - x_1| < \delta,\ |t_2 - t_1| < \delta$, quelles que soient des fonctions $(a(t), b(x), u(x,t)) \in \mathcal{N}$.

Donnons des exemples d'estimation des expressions qui se trouvent dans (38).

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Désignons par

$$R_1 = \int_0^h \big(G_{02}(x_2,t,\xi,0) - G_{02}(x_1,t,\xi,0)\big)\varphi'(\xi)d\xi.$$

D'abord on évalue R_1 pour $t > 0$ assez petit. À l'aide de (26), on réduit R_1 à la forme

$$\begin{aligned} R_1 = \varphi'(x_2) - \varphi'(x_1) + \int_0^h G_{02}(x_2,t,\xi,0)(\varphi'(\xi) - \varphi'(x_2))d\xi -\\ - \int_0^h G_{02}(x_1,t,\xi,0)(\varphi'(\xi) - \varphi'(x_1))\, d\xi. \end{aligned} \tag{39}$$

En tenant compte de la définition de $\mathcal{N}$, on trouve

$$\begin{aligned} \left|\int_0^h G_{02}(x,t,\xi,0)(\varphi'(\xi) - \varphi'(x))d\xi\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\pi A_0 t}} \int_0^h |\varphi'(\xi) - \varphi'(x)| \times\\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4A_1 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4A_1 t}\right)\right) d\xi. \end{aligned}$$

Par les propriétés de l'intégrale de Poisson [16], on peut indiquer un tel nombre $t_{01} > 0$, suffisament petit, que

$$\left| \int_0^h G_{02}(x,t,\xi,0)(\varphi'(\xi) - \varphi'(x))\,d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{40}$$

pour tout $x \in [0,h]$ et $t \in [0,t_{01}]$. Remarquons que le choix de t_{01} ne dépend pas d'élément concret de $\mathcal{N}$. L'inégalité (40) et la continuité de $\varphi'(x)$ permettent d'établir l'estimation $|R_1| < \varepsilon$ pour x_1, x_2, t arbitraires lorsque $|x_2 - x_1| < \delta_1$ et $t \in [0,t_{01}]$. Pour $t \geq t_{01}$, on représente R_1 sous la forme

$$R_1 = \int_0^h \varphi'(\xi)\,d\xi \int_{x_1}^{x_2} G_{02x}(x,t,\xi,0)\,dx.$$

En supposant $x_2 > x_1$, on obtient

$$|R_1| \leq \frac{\max_{[0,h]} \varphi'(x)}{2\sqrt{\pi\theta^3(t)}} \int_0^h d\xi \int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|x - \xi + 2nh| \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\theta(t)} \right) + \right.$$
$$\left. + |x + \xi + 2nh| \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4\theta(t)} \right) \right) dx. \tag{41}$$

En utilisant le changement $x - \xi + 2nh = 2z\sqrt{\theta(t)}$, on évalue l'intégrale

$$\int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x - \xi + 2nh| \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\theta(t)} \right) dx =$$
$$= 4\theta(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2nh-\xi}{2\sqrt{\theta(t)}}}^{\frac{2nh-\xi}{2\sqrt{\theta(t)}}} |z| e^{-z^2}\,dz \leq 4\theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} |z| e^{-z^2}\,dz = 4\theta(t).$$

On évalue la deuxième intégrale dans (41) de la même façon et on trouve

$$|R_1| \leq \frac{4|x_2 - x_1|}{\sqrt{\pi A_0 t_{01}}} \max_{[0,h]} \varphi'(x), \quad t \in [t_{01}, t_0].$$

Il en découle l'existence d'un nombre $\delta_2 > 0$ tel que $|R_1| < \varepsilon$ pour $|x_2 - x_1| < \delta_2$ et $t \in [0, t_0]$.

De façon analogue, on évalue l'intégrale

$$\int_0^h (G_{02}(x,t_2,\xi,0) - G_{02}(x,t_1,\xi,0))\,\varphi'(\xi)\,d\xi.$$

Considérons l'expression

$$R_2 = \int_0^t (G_{02}(x_2,t,\xi,0) - G_{02}(x_1,t,\xi,0))\,\mu_1'(\tau)\,d\tau.$$

Après le changement $\sigma = \theta(t) - \theta(\tau)$, on trouve

$$|R_2| \leq \frac{\max_{[0,T]} |\mu_1'(t)|}{A_0\sqrt{\pi}} \int_0^{A_1 t} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \exp\left(-\frac{(x_2+2nh)^2}{4\sigma} \right) - \exp\left(-\frac{(x_1+2nh)^2}{4\sigma} \right) \right| d\sigma.$$

En évaluant à l'aide de (27) les séries

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_i+2nh)^2}{4\sigma}\right)\le C_{12}+\frac{C_{13}}{\sqrt{\sigma}},\quad i=1,2,$$

on conclut q'il existe un nombre t_{02}, $0<t_{02}\le t_0$ tel que $|R_2|<\varepsilon$ pour $t\in[0,t_{02}]$. Lorsque $t\ge t_{02}$, on transforme R_2 comme suit:

$$R_2=\int_0^t \mu_1'(\tau)d\tau\int_{x_1}^{x_2}G_{02x}(x,t,0,\tau)dx.$$

On achève l'éstimation comme au cas précédent.

L'expression

$$R_3=\int_0^t\int_0^h\big(G_{01x}(x_2,t,\xi,\tau)-G_{01x}(x_1,t,\xi,\tau)\big)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

est aussi considérée d'abord pour des valeurs du temps suffisamment petites. Par le changement $\sigma=\theta(t)-\theta(\tau)$, on établit

$$|R_3|\le\frac{\max_{\overline{Q}_T}f(x,t)}{2A_0\sqrt{\pi}}\int_0^{\theta(t)}\frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}}\int_0^h\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg(|x_k-\xi+2nh|\exp\Bigg(-\frac{(x_k-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\Bigg)+$$
$$+|x_k+\xi+2nh|\exp\left(-\frac{(x_k+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg)d\xi\le C_{14}\sqrt{t}.$$

Il existe donc un nombre $t_{03},0<t_{03}\le t_0$ tel que $|R_3|<\varepsilon$ pour $t\in[0,t_{03}]$ et x_1,x_2 arbitraires dans $[0,h]$. Lorsque $t>t_{03}$, on effectue le même changement de variable, ce qui donne l'estimation

$$|R_3|\le\frac{\max_{\overline{Q}_T}f(x,t)}{2A_0\sqrt{\pi}}\int_0^{A_1t}\frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}}\int_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg(\Bigg|(x_2-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)-$$
$$-(x_1-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg|+\Bigg|(x_2+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)-$$
$$-(x_1+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg|\Bigg)d\xi.$$

On décompose l'intégrale par rapport à σ en somme de deux intégrales, l'une étant de 0 à t_{03}, l'autre de t_{03} à A_1t. En supposant $x_1<x_2$, on obtient

$$|R_3|\le\varepsilon+\frac{\max_{\overline{Q}_T}f(x,t)}{2A_0\sqrt{\pi}}\int_{t_{03}}^{A_1t}\frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}}\int_0^h d\xi\int_{x_1}^{x_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg(\Bigg|\frac{\partial}{\partial x}\Bigg((x-\xi+2nh)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg)\Bigg|+\Bigg|\frac{\partial}{\partial x}\left((x+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\right)\Bigg|\Bigg)dx.$$

On établit aisément de cette estimation qu'il existe un nombre $\delta_4>0$ tel que $|R_3|<2\varepsilon$, si $|x_2-x_1|<\delta_4$ pour $t\in[0,t_0]$ arbitraire et tout élément d'ensemble $\mathcal{N}$.

De façon analogue, on évalue l'expression suivante:

$$R_4 = \int_0^{t_2} G_{02}(x,t_2,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau - \int_0^{t_1} G_{02}(x,t_1,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau.$$

En supposant $t_1 < t_2$, on réduit R_4 à la somme $R_4 = R_{41} + R_{42}$, où

$$R_{41} = \int_0^{t_1} \left(G_{02}(x,t_2,0,\tau) - G_{02}(x,t_1,0,\tau)\right)\mu_1'(\tau)\,d\tau,$$
$$R_{42} = \int_{t_1}^{t_2} G_{02}(x,t_2,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau.$$

En tenant compte de (6) et (27), on trouve

$$|R_{42}| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta(t_2)-\theta(\tau))}\right) d\tau \leq$$
$$\leq C_{12}(t_2-t_1) + C_{13}\sqrt{t_2-t_1}.$$

Il en découle que $|R_{42}| < \varepsilon$, si $|t_2 - t_1| < \delta_5$, où le nombre $\delta_5 > 0$ dépend seulement de ε et des données du problème (1)–(5).

On évalue l'expression R_{41} en deux étapes. Tout d'abord, on établit l'existence d'un tel nombre $t_{04} > 0$ que $|R_{41}| < \varepsilon$ pour $t \in [0, t_{04}]$. Ensuite on évalue R_{41} pour $t > t_{04}$ en décomposant l'intégrale en somme comme au cas précédent. D'ici on obtient l'existence d'un tel nombre $\delta_6 > 0$ que $|R_4| < 2\varepsilon$, si $|t_2 - t_1| < \delta_6$ pour des points $t_1, t_2 \in [0, t_0]$ arbitraires.

En utilisant des procédés analogues, on établit aisément que les inégalités (38) sont vérifiées. Par conséquent, l'application du théorème de Schauder donne l'existence de la solution du système d'équations (7), (9), (12) appartenante à $C[0,t_0]\times C[0,h]\times C(\overline{Q}_T)$.

Théorème 1. *Si les conditions (A1)–(A3) sont satisfaites, il existe une solution de problème (1)–(5), définie dans le domaine $\overline{Q}_{t_0}$ où le nombre $t_0 > 0$ vérifie les conditions (33), (35) et $T_0 \leq t_0$.*

Par le procédé de passage à la limite [16], on établit aisément le théorème suivant.

Théorème 2. *Supposons que les conditions $\varphi(x), \psi(x) \in C^{2+\alpha}[0,h]$ dans (A1)–(A3) sont remplacées par les suivantes: $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0,h]$. Alors il existe une solution $(a(t), b(x), u(x,t))$ de problème (1)–(5), définie dans le domaine $\overline{Q}_{t_0}$ et appartenante à l'espace $C[0,t_0] \times C[0,h] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$.*

Exemple. Considerons le problème inverse aux inconnus $(a(t), b(x), u(x,t))$:

$$u_t = a(t)(u_{xx} + b(x)u) + (x+h)(h+1-x) - \frac{x+h}{(1+t)^2}, \quad (x,t) \in Q_T,$$
$$u(x,0) = x+h, \quad x \in [0,h],$$
$$u(0,t) = \frac{h}{1+t}, \quad u(h,t) = \frac{2h}{1+t}, \quad t \in [0,T],$$
$$a(t)u_x(0,t) = 1, \quad t \in [0,T],$$

$$\int_0^{T_0} a(t)u(x,t)dt = T_0(x+h), \quad x \in [0,h].$$

Il est facile de voir que les données du problème posé vérifiont les conditions du théorème 1 et que les fonctions $a(t) = 1+t, b(x) = x-h-1, u(x,t) = \frac{x+h}{1+t}$ constituent une solution de ce problème.

4. Unicité de solution.

Théorème 3. *Si les conditions $\mu_3(t) > 0, t \in [0,T]$, $\psi(x) > 0, x \in [0,h]$ sont satisfaites, la solution du problème (1)–(5) est unique.*

Preuve. Si $(a_i(t), b_i(x), u_i(x,t)), i = 1,2$ sont deux solutions du problème (1)–(5), leur différence $a(t) = a_1(t) - a_2(t), b(x) = b_1(x) - b_2(x), u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ satisfait aux conditions

$$u_t = a_1(t)(u_{xx} + b_1(x)u) + a(t)(u_{2xx}(x,t) + b_1(x)u_2(x,t)) + \\ + a_2(t)b(x)u_2(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{42}$$

$$u(x,0) = 0, \ x \in [0,h], \quad u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{43}$$

$$a_1(t)u_x(0,t) = -a(t)u_{2x}(0,t), \quad t \in [0,T], \tag{44}$$

$$\int_0^{T_0} a_1(t)u(x,t)dt = -\int_0^{T_0} a(t)u_2(x,t)dt, \quad x \in [0,h]. \tag{45}$$

En désignant par $G_1(x,t,\xi,\tau)$ la fonction de Green de problème (42), (43), on représente sa solution sous la forme

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\big(a(\tau)(u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + b_1(\xi)u_2(\xi,\tau)) + \\ + a_2(\tau)b(\xi)u_2(\xi,\tau)\big)\, d\xi d\tau. \tag{46}$$

En reportant (46) dans (44), on obtient

$$a(t)u_{2x}(0,t) = -a_1(t)\int_0^t \int_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)\big(a(\tau)(u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + b_1(\xi)u_2(\xi,\tau)) + \\ + a_2(\tau)b(\xi)u_2(\xi,\tau)\big)\, d\xi d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{47}$$

On utilise la condition (45), en intégrant l'équation (42) par rapport à t de 0 à T_0:

$$u(x,T_0) = b(x)\int_0^{T_0} a_2(t)u_2(x,t)\, dt.$$

En tenant compte de ce que $u_2(x,t)$ satisfait à la condition (5) et en utilisant (46), on réduit l'égalité précedente à la forme

$$b(x)\psi(x) = \int_0^{T_0} \int_0^h G_1(x,T_0,\xi,\tau)\big(a(\tau)(u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + b_1(\xi)u_2(\xi,\tau)) + \\ + a_2(\tau)b(\xi)u_2(\xi,\tau)\big)\, d\xi d\tau, \quad x \in [0,h]. \tag{48}$$

On a obtenu le système d'équations intégrales homogènes de second espèce dont l'une est l'équation de Volterra, et l'autre de Fredholm. Montrons que le système d'équations (47), (48) admet la solution unique nulle.

Considérons l'équation intégrale

$$b(x)\psi(x) = g(x) + \int_0^{T_0}\int_0^h G_1(x,T_0,\xi,\tau)a_2(\tau)b(\xi)u_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad x \in [0,h]. \quad (49)$$

Établissons l'unicité de solution continue de l'équation (49). Supposons que $b_0(x) \not\equiv 0,\ x \in [0,h]$ soit une solution continue de l'équation homogène

$$b_0(x)\psi(x) = \int_0^{T_0}\int_0^h G_1(x,T_0,\xi,\tau)a_2(\tau)b_0(\xi)u_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad x \in [0,h]. \quad (50)$$

Désignons par $v_0(x,t)$ la solution du problème

$$v_{0t} = a_1(t)(v_{0xx} + b_1(x)v_0) + a_2(t)b_0(x)u_2(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (51)$$

$$v_0(x,0) = 0,\ x \in [0,h], \quad v_0(0,t) = v_0(h,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \quad (52)$$

À l'aide de la fonction $v_0(x,t)$, on ramène (50) à la forme

$$b_0(x)\psi(x) = v_0(x,T_0). \quad (53)$$

On intègre (51) par rapport à t entre les limites 0 et T_0, en tenant compte des conditions (52):

$$v_0(x,T_0) = \int_0^{T_0} a_1(t)(v_{0xx}(x,t) + b_1(x)v_0(x,t))dt + b_0(x)\int_0^{T_0} a_2(t)u_2(x,t)\,dt.$$

En utilisant (53) et la condition (5), qui est vérifiée par la fonction $u_2(x,t)$, on en trouve

$$\int_0^{T_0} a_1(t)(v_{0xx}(x,t) + b_1(x)v_0(x,t))\,dt = 0.$$

À l'aide de notation

$$\psi_0(x) = \int_0^{T_0} a_1(t)v_0(x,t)\,dt,$$

l'égalité précedente peut s'écrire

$$\psi_0''(x) + b_1(x)\psi_0(x) = 0, \quad x \in [0,h]. \quad (54)$$

On trouve des conditions (52)

$$\psi_0(0) = \psi_0(h) = 0. \quad (55)$$

Or on a $b_1(x) \le 0, x \in [0,h]$, la solution du problème (54), (55) est unique: $\psi_0(x) \equiv 0$. Par la définition de $\psi_0(x)$ et la condition $a_1(t) > 0$, il en suit que $v_0(x,t) \equiv 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_T$. On trouve donc de (54) que $b_0(x) \equiv 0,\ x \in [0,h]$. Par conséquent, la solution de l'équation (48) est unique. Par l'alternative de Fredholm, l'équation (49) admet la solution unique quelle que soit une fonction continue $g(x)$. Il en suit que l'équation (48) admet aussi une solution unique $b(x)$ qui s'exprime par $a(t)$. En reportant cette solution dans (47), on obtient une équation intégrale homogène de Volterra de second espèce par rapport à $a(t)$. Par suite, $a(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$. En substituant $a(t) \equiv 0$ et $b(x) \equiv 0$ dans (46), on trouve $u(x,t) \equiv 0$ dans $\overline{Q}_T$. Le théorème est établi.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jones B.F., *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I*, J. Math. Mech. **11** (1962), no. 6, 907–918.

[2] Cannon J.R., Lin Yangping, *An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation*, J. Math. Anal. Appl. **145** (1990), 470–484.

[3] Иванчов Н.И., *Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями*, Укр. мат. журнал **45** (1993), no. 8, 1066–1071.

[4] Прилепко А.И., Костин А.Б., *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I*, Сиб. мат. журн. **33** (1992), no. 3, 146–155.

[5] Прилепко А.И., Костин А.Б., *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II*, Сиб. мат. журн. **34** (1993), no. 3, 147–162.

[6] Безнощенко Н.Я., *Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения*, Дифф. уравнения **19** (1983), no. 11, 1908–1915.

[7] Jones B.F., *Various methods for finding unknown coefficients in parabolic equation*, Comm. on Pure and Applied Math. **16** (1963), 33–44.

[8] Lorenzi A., *Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation*, Ric. Mat. **32** (1983), no. 2, 263–284.

[9] Ivanchov M.I., *Inverse problem for finding a major coefficient in a parabolic equation*, Matematychni Studii **8** (1997), no. 2, 212–220.

[10] Искендеров А.Д., *Об одной обратной задаче для квазилинейного параболического уравнения*, Дифференц. уравнения **10** (1974), no. 5, 890–898.

[11] Ахундов А.Я., *Обратная задача для линейных параболических уравнений*, Доклады АН Азерб. ССР **39** (1983), no. 5, 3–6.

[12] Музылев Н.В., *Об единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и и объемной теплоемкости*, Журнал вычисл. математики и математ. физики **23** (1983), no. 1, 102–108.

[13] Иванчов Н.И., *Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости*, Сиб. мат. журнал **35** (1994), no. 3, 612–621.

[14] Саватеев Е.Г., *О задаче идентификации коэффициента в параболическом уравнении*, Сиб. мат. журнал **36** (1995), no. 1, 177–185.

[15] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967.

[16] Фридман А., *Уравнения с частными производными параболического типа*, М.: Мир, 1968.

Université de Lviv, Facultée de Mathématique

Получено 3.04.1998