УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З ВИРОДЖЕННЯМ

Г.М. Онишкевич

G. Onyshkevych. *Stability by Liapunov of the equation of type of plate oscillation with degeneration*, Matematychni Studii, **10**(1998) 153–162.

In paper mixed problem for the equation of type of plate oscillation degenerated on the part of boundary is considered. The cnditions of existence and singularity of the generalized solution and the conditions of stability by Liapunov of the zero solution are obtained.

Онишкевич Г.М. *Устойчивость по Ляпунову вырождающечегося уравнения типа колебания пластинки* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 2. – С.153–162.

В работе рассмотрена смешаная задача для вырождающечегося на границе уравнения типа колебания пластинки. Получены условия существования и единственности обобщенного решения указаной задачи, а также условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения.

У роботі досліджуються умови існування, єдиності та стійкості розв'язку рівняння типу коливання пластинки з гострим краєм. Коректність граничних задач для гіперболічних рівнянь, які вироджуються на границі вивчалась у монографії [1]. Стійкість за Ляпуновим рівнянь та систем з частинними похідними розглядалась в роботах [2], [3]. Для дослідження стійкості автори вказаних робіт використовували функції Ляпунова. Аналогічно, як у статті [4], у даній роботі стійкість розв'язку досліджується з використанням методу Гальоркіна.

Нехай Ω — обмежена область простору $\mathbb{R}^n$, межа якої $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_0$, причому $\Gamma \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\partial\Omega \in C^1$, $\operatorname{mes}\Gamma_0 \neq 0$.

Розглянемо в області $Q = \Omega \times (0; +\infty)$ рівняння

$$\begin{gathered} u_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \left(a_{ij}^{kl}(x,t) u_{x_k x_l}\right)_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij}(x,t) u_{x_j}\right)_{x_i} + \\ + c(x,t) u_t + h(x,t) u = f(x,t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \end{gathered} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Надалі вважатимемо, що справджуються умови

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B35, 35G15.

$$a_{ij}^{kl} = a_{kl}^{ij}, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad i,j,k,l = 1,\dots,n;$$
$$a_0\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n \eta_{ij}^2 \le \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl} \le a_1\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n \eta_{ij}^2,\ \alpha>0,\ a_0>0 \tag{4}$$
для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $(x,t)\in Q$, де $\rho(x)$ — відстань від x до Γ_0:
$$\rho(x) = \min_{y\in\Gamma_0}\big((x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2\big)^{\frac{1}{2}}, \quad x\in\Omega.$$
Для шуканої функції u задамо наступні крайові умови, які залежать від величини α:
$$u|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega}=0,\ 0<\alpha\le 1; \quad u|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma}=0,\ 1<\alpha\le 3;$$
$$u|_{\Gamma}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma}=0, \quad \alpha>3 \tag{5}$$
для $t\in S=[0;+\infty)$, де ν — зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

Введемо простір $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, як замикання множини двічі неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови (5) для $0<\alpha<2$, за нормою
$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)} = \left(\int_\Omega\left(v_t^2+\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n v_{x_ix_j}^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
а також аналогічний простір $\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)$, функції якого задовольняють умови (5) для $\alpha\ge 2$, за нормою
$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)} = \left(\int_\Omega\left(v_t^2+\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n v_{x_ix_j}^2+\rho^\beta(x)\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2+\rho^\gamma(x)v^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
де $\beta>\alpha-1$, $\gamma>\beta-1$.

Мета даної роботи — дослідження стійкості узагальненого розв'язку задачі (1)–(5), для якого справедливі такі включення:
$$u\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),\ 0<\alpha<2, \quad u\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)),\ \alpha\ge 2,$$
$$u_t\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)),\ \alpha>0. \tag{6}$$

Означення 1. Функція $u(x,t)$, яка задовольняє включення (6), умови (2) і (5), а також інтегральну тотожність
$$\int_Q\Bigg(-u_tv_t+\sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl}(x,t)u_{x_kx_l}v_{x_ix_j}+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_j}v_{x_i}+$$
$$+c(x,t)u_tv+h(x,t)uv-f(x,t)v\Bigg)\,dx\,dt=\int_{D_0}u_1v\,dx$$
для довільної $v\in M_\alpha$ і має обмежений носій, де $D_\tau=Q\cap\{t=\tau\}$, $\tau\ge 0$, $M_\alpha=\big\{v : v\in L^2(S;\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),\ 0<\alpha<2,\ v\in L^2(S;\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)),\ \alpha\ge 2, v_t\in L^2(S;L^2(\Omega)),\ \alpha>0\big\}$, називається узагальненим розв'язком задачі (1)–(5).

Спочатку з'ясуємо умови існування та єдиності даного розв'язку. Будемо припускати, що виконуються умови

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijt}^{kl}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl} \le a_2\rho^{\alpha}(x)\sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}^2,\ a_{ij}^{kl}, b_{ij}, c, h \in L^{\infty}(Q),\ i,j,k,l = 1,\dots,n;$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j \ge b_0\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \text{ для всіх } \xi\in\mathbb{R}^n,\ b_0 + \frac{a_0\gamma_1}{\varkappa_1} \ge \delta_0,$$

$$h(x,t) + \frac{a_0\gamma_2}{\varkappa_0} \ge \delta_0, \quad c(x,t)\ge c_0 \ge 0,\ (x,t)\in Q, \tag{7}$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $(x,t)\in Q$, де a_2, $\delta_0, \gamma_1, \gamma_2$ — деякі додатні сталі, причому $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$.

Встановимо деякі оцінки для функцій з $\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha}(\Omega)$ і $\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)$. Нехай x_0 довільна точка Γ_0. Виберемо систему координат з центром в точці x_0 так, щоб нормаль до межі в x_0 мала напрямок осі Ox_n. Візьмемо таке достатньо мале $r = r(x_0)$, щоб частина межі $\Gamma_0\cap(|x|<r)$ була зв'язною множиною і однозначно проектувалась вздовж осі Ox_n на деяку область D площини $x_n = 0$. Нехай рівняння поверхні $\Gamma_0\cap(|x|<r)$ має вигляд $x_n = \psi(x')$, $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})\in D$, де $\psi(x')\in C^1(\overline{D})$, $|\psi_{x_i}| < \frac{1}{2n}$, $i = 1,\dots,n-1$, $x'\in D$. Перетворення

$$y_i = x_i,\ i = 1,\dots,n-1, \quad y_n = x_n - \psi(x') \tag{8}$$

з одиничним якобіаном відображає область $\Omega_0 = \Omega\cap(|x|<r)$ на ω. Позначимо $b(x_0) = \max\limits_{y\in\omega}|y_n|$. Легко отримати наступні нерівності:

$$\int_{\omega}\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2\,dy \le \frac{b^{2-\alpha}(x_0)}{2-\alpha}\int_{\omega}|y_n|^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(v_{y_iy_n})^2\,dy,$$

$$\int_{\omega} v^2\,dy \le \frac{(5-\alpha)b^{4-\alpha}(x_0)}{(2-\alpha)(4-\alpha)}\int_{\omega}|y_n|^{\alpha}(v_{y_ny_n})^2\,dy,\ v\in H^2_{\alpha}(\omega) \ \text{ і}$$

$$\int_{\omega}|y_n|^{\beta}\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2\,dy \le \frac{b^{\beta-\alpha+2}(x_0)}{\beta-\alpha+2}\int_{\omega}|y_n|^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(v_{y_iy_n})^2\,dy,$$

$$\int_{\omega}|y_n|^{\gamma}v^2\,dy \le \frac{b^{\gamma-\alpha+4}(x_0)}{(\beta-\alpha+2)(\gamma-\beta+2)}\int_{\omega}|y_n|^{\alpha}(v_{y_ny_n})^2\,dy,\ v\in H^2_{\alpha\beta\gamma}(\omega).$$

Згідно з перетворенням (8) $u(x',x_n)$ перейде в $v(y',y_n)$, тобто $v(y',y_n) = u(x',x_n)$, або $v(y',y_n) = u(y', y_n + \psi(x'))$. Звідси

$$\sum_{i=1}^{n}(v_{y_iy_n})^2 \le 2\sum_{i=1}^{n}(u_{x_ix_n})^2, \quad \sum_{i=1}^{n}(v_{y_i})^2 \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i})^2, \quad \rho(x)\le|y_n|\le 2\rho(x).$$

Тоді одержимо такі оцінки:

$$\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\,dx \le \frac{2^{2+\alpha}b^{2-\alpha}(x_0)}{2-\alpha}\int_{\Omega_0}\rho^{\alpha}(x)\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_j})^2\,dx,$$

$$\int_{\Omega_0} u^2\,dx \le \frac{2^{1+\alpha}(5-\alpha)b^{4-\alpha}(x_0)}{(2-\alpha)(4-\alpha)}\int_{\Omega_0}\rho^{\alpha}(x)\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_j})^2\,dx,\ u\in H^2_{\alpha}(\Omega_0) \ \text{ і}$$

$$\int_{\Omega_0}\rho^{\beta}(x)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\,dx \le \frac{2^{2+\alpha}b^{\beta-\alpha+2}(x_0)}{\beta-\alpha+2}\int_{\Omega_0}\rho^{\alpha}(x)\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_j})^2\,dx,$$

$$\int_{\Omega_0}\rho^{\gamma}(x)u^2\,dx \le \frac{2^{1+\alpha}b^{\gamma-\alpha+4}(x_0)}{(\beta-\alpha+2)(\gamma-\beta+2)}\int_{\Omega_0}\rho^{\alpha}(x)\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_j})^2\,dx, \tag{9}$$

де $u \in H^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_0)$.

Візьмемо покриття Γ_0 множинами $\Gamma_0 \cap (|x-x_0| < r(x_0))$ при всеможливих $x_0 \in \Gamma_0$. Виберемо скінченне підпокриття $\Gamma_0 \cap (|x-x_i| < r(x_i))$, $i = 1, \ldots, N$. Використовуючи нерівність Фрідріхса ([5],c.50), отримаємо

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx \le C_\Omega d \int_{\Omega_1} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx, \\
\int_{\Omega_1} v^2 dx \le C_\Omega d \int_{\Omega_1} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx \ \text{ для } v \in H^2_\alpha(\Omega) \ \text{ і} \\
\int_{\Omega_1} \rho^\beta(x) \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx \le C_\Omega d l^\beta \int_{\Omega_1} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx, \\
\int_{\Omega_1} \rho^\gamma(x) v^2 dx \le C_\Omega d l^\gamma \int_{\Omega_1} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx \ \text{ для } v \in H^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega),
\end{gathered} \tag{10}$$

де C_Ω залежить від області Ω і n, $d = \max\{1; r_0^{-\alpha}\}$, $r_o = \min\limits_{i=1,\ldots,N} r(x_i)$, $\Omega_1 = \Omega \setminus \{|x - x_i| < r_0, i = 1, \ldots N\}$, $l = \max\limits_{x\in\Omega} \rho(x)$. Покладемо $b = \max\limits_{i=1,\ldots,N} b(x_i)$. Тоді згідно з оцінками (9) і (10) одержимо

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx \le \varkappa_1 \int_{\Omega} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx, \\
\int_{\Omega} v^2 dx \le \varkappa_0 \int_{\Omega} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx \ \text{для довільної } v \in H^2_\alpha(\Omega) \ \text{ і} \\
\int_{\Omega} \rho^\beta(x) \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx \le \varkappa_1 \int_{\Omega} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx, \\
\int_{\Omega} \rho^\gamma(x) v^2 dx \le \varkappa_0 \int\limits_{\Omega} \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 dx \ \text{для довільної } v \in H^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega), \text{ де}
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\varkappa_0 = \begin{cases} C_\Omega d, & \rho(x) \ge r_0, \\ \frac{2^{1+\alpha}(5-\alpha) b^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)}, & \rho(x) < r_0 \text{ при } 0 < \alpha < 2; \end{cases}$$

$$\varkappa_0 = \begin{cases} C_\Omega d l^\gamma, & \rho(x) \ge r_0, \\ \frac{2^{1+\alpha} b^{\gamma-\alpha+4}}{(\gamma-\beta+2)(\beta-\alpha+2)}, & \rho(x) < r_0 \text{ при } \alpha \ge 2; \end{cases}$$

$$\varkappa_1 = \begin{cases} C_\Omega d, & \rho(x) \ge r_0, \\ \frac{2^{2+\alpha} b^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}, & \rho(x) < r_0 \text{ при } 0 < \alpha < 2; \end{cases} \quad \varkappa_1 = \begin{cases} C_\Omega d l^\beta, & \rho(x) \ge r_0, \\ \frac{2^{2+\alpha} b^{\beta-\alpha+2}}{(\beta-\alpha+2)}, & \rho(x) < r_0 \text{ при } \alpha \ge 2. \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (4), (7) для* $0 < \alpha < 2$ *і, крім цього,* $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega))$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).*

Доведення. Розглянемо в області $Q_T = \Omega\times(0;T)$ рівняння (1), де T — довільне додатнє число. Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u^N(x,t) = \sum_{m=1}^{N} C_m^N(t)\,\omega_m(x), \tag{12}$$

де $\{\omega_m(x)\}$ — базис простору $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, а $C_m^N(t)$ знаходимо з наступної задачі:

$$\begin{gathered}\int_\Omega\biggl(u_{tt}^N\omega_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}u_{x_kx_l}^N\omega_{mx_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_j}^N\omega_{mx_i} + \\ +cu_t^N\omega_m + hu^N\omega_m - f\omega_m\biggr)\,dx = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

$$C_m^N(0) = u_{0m}^N,\quad C_{mt}^N(0) = u_{1m}^N,\quad m=1,\dots,N. \tag{14}$$

Сталі u_{0m}^N, u_{1m}^N є коефіцієнтами таких зображень: $u_0^N(x) = \sum_{m=1}^N u_{0m}^N\omega_m(x)$, $u_1^N(x) = \sum_{m=1}^N u_{1m}^N\omega_m(x)$, причому $u_0^N(x)\to u_0(x)$ в $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, а $u_1^N(x)\to u_1(x)$ в $L^2(\Omega)$ при $N\to\infty$.

Домножимо кожне рівняння системи (13) відповідно на функцію $C_{mt}^N(t)$, просумуємо по m від 1 до N, проінтегруємо по t від 0 до T. Після цих операцій отримаємо рівність

$$\begin{gathered}\int_{Q_T}\biggl(u_{tt}^Nu_t^N + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl}u_{x_kx_l}^Nu_{x_ix_jt}^N + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_j}^Nu_{x_it}^N + \\ + c(u_t^N)^2 + hu^Nu_t^N - fu_t^N\biggr)\,dx\,dt = 0,\end{gathered} \tag{15}$$

Використовуючи інтегрування частинами та умови теореми, легко одержати оцінку

$$\begin{gathered}A_1\int_{D_T}\biggl((u_t^N)^2 + \rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_j}^N)^2\biggr)dx \le \\ \le A_2\biggl[\int_{D_0}\biggl((u_1^N)^2 + \rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^{n}(u_{0x_ix_j}^N)^2\biggr)dx + \int_{Q_T} f^2dx\,dt\biggr] + \\ +A_3\int_0^T\int_{D_t}\biggl(u_t^N)^2 + \rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_j}^N)^2\biggr)dx\,dt.\end{gathered} \tag{16}$$

Тут $A_1 = \min\{1; a_0(1-\gamma_1-\gamma_2)\}$, $A_2 = \max\{1; a_1+b_1\varkappa_1+h_1\varkappa_0)\}$, $A_3 = \max\{1; a_2+b_2\varkappa_1 + h_2\varkappa_0\}$, а додатні сталі b_1, b_2, h_1, h_2 такі, що справджують умови:

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le b_1\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(x,t)\xi_i\xi_j \le b_2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ h(x,t)\le h_1,\ h_t\le h_2$$

для всіх $\eta\in\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(x,t)\in Q$.

Застосовуючи до оцінки (16) лему Гронуола-Белмана, отримаємо

$$\|u^N\|_{L^\infty((0;T);\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega))} \le C_2, \quad \|u^N_t\|_{L^\infty((0;T);L^2(\Omega))} \le C_2, \tag{17}$$

де C_2 — додатна стала, яка не залежить від N.

Нехай $S_T = (0;T)$. Згідно з оцінками (17) можна вибрати підпослідовність $\{u^{N,N}(x,t)\}$ таку, що для фіксованого k:

$$\begin{aligned} &u^{N,N} \to v^k \quad *\text{-слабо в } L^\infty(S_k; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),\\ &u^{N,N}_t \to v^k_t \quad *\text{-слабо в } L^\infty(S_k; L^2(\Omega)) \text{ при } N \to \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

Позначимо через $u(x,t)$ функцію, яка для кожного k в Q_k збігається з $v^k(x,t)$. Очевидно, що $u(x,t)$ задовольняє включення (6).

Покажемо, що $u(x,t)$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(5). Згідно з умовами (4) справедливі наступні збіжності:

$$\int_Q \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{kl}_{ij} u^{N,N}_{x_i x_j} v_{x_k x_l} dx\,dt \to \int_Q \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{kl}_{ij} u_{x_i x_j} v_{x_k x_l} dx\,dt,$$

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u^{N,N}_{x_i} v_{x_j} dx\,dt \to \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx\,dt,$$

$$\int_Q h u^{N,N} dx\,dt \to \int_Q hu\,dx\,dt \quad \text{при} \quad N \to \infty$$

для довільної $v \in M_\alpha$. Згідно з (18) $(u^{N,N}_t, v) \to (u,v)$ $*$-слабо в $L^\infty_{\text{loc}}(S)$, тому $(cu^{N,N}_t, v) \to (cu_t, v)$ в $D'(S)$ при $N \to \infty$.

Використовуючи систему (13), одержимо при $N \to +\infty$

$$0 = \int_Q \Big(u^{N,N}_{tt} v + \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{kl}_{ij} u^{N,N}_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u^{N,N}_{x_j} v_{x_i} + cu^{N,N}_t v + hu^{N,N} v - fv \Big) dx\,dt \to$$

$$\to \int_Q \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^n a^{kl}_{ij} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_j} v_{x_i} + cu_t v + huv - fv \Big) dx\,dt + A. \tag{19}$$

Розглянемо вираз $\int_Q u^{N,N}_{tt} v\,dx\,dt$ для довільної $v \in M_\alpha$. Очевидно, $\int_Q u^{N,N}_{tt} v\,dx\,dt = -\int_Q u^{N,N}_t v_t dx\,dt - \int_{D_0} u^{N,N}_t v\,dx$. Враховуючи зображення (12) і умови (14), маємо $u^{N,N}_t(x,0) = u^N_1(x)$. Використовуючи той факт, що $u^N_1(x) \to u_1(x)$ в $L^2(\Omega)$ при $N \to \infty$, отримаємо збіжність $\int_{D_0} u^{N,N}_t v\,dx \to \int_{D_0} u_1 v\,dx$ при $N \to \infty$. На підставі збіжності (18), одержимо $\int_Q u^{N,N}_t v_t dx\,dt \to \int_Q u_t v_t dx\,dt$ при $N \to \infty$ для довільної $v \in M_\alpha$. Тоді $A = -\int_Q u_t v_t dx\,dt - \int_{D_0} u_1 v\,dx$. Отже, маємо

$$0 = \int_Q \Big(u^{N,N}_{tt} v + \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{kl}_{ij} u^{N,N}_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u^{N,N}_{x_j} v_{x_i} + cu^{N,N}_t v + hu^{N,N} v - fv \Big) dx\,dt \to$$

$$\int_Q \Big(-u_t v_t + \sum_{i,j,k,l=1}^n a^{kl}_{ij} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_j} v_{x_i} + cu_t v + huv - fv \Big) dxdt - \int_{D_0} u_1 v\,dx = 0$$

при $N \to \infty$. Тобто для довільної $v \in M_\alpha$ функція $u(x,t)$ задовольняє інтегральну тотожність. Покажемо, що $u(x,t)$ задовольняє початкову умову (2). Згідно із збіжностями (18), маємо $u^{N,N} \to u$ $*$-слабо в $L^\infty_{\text{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega))$, при $N \to \infty$. Тобто $\int_\Omega u^{N,N}\omega_m dx \to \int_\Omega u\omega_m dx$ $*$-слабо в $L^1(S)$, $m = 1,\ldots,N$. Зокрема, для $t = 0$ $\int_\Omega u^{N,N}(x,0)\omega_m dx \to \int_\Omega u(x,0)\omega_m\, dx$ при $N \to \infty$, $m = 1,\ldots,N$. Враховуючи умови (14) і зображення (12), одержимо

$$u^{N,N}(x,0) = \sum_{m=1}^{N} C^N_m(0)\omega_m(x) = \sum_{m=1}^{N} u^N_{0m}\omega_m(x) = u^N_0(x).$$

Тобто $\int_\Omega u^N_0(x)\omega_m(x)\, dx \to \int_\Omega u(x,0)\omega_m(x)\, dx$ при $N \to \infty$, $m = 1,\ldots,N$. Отже, $u(x,0) = u_0(x)$ і теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (4), (7) для* $0 < \alpha < 2$ *і, крім цього,* a^{kl}_{ij}, b_{ij}, $c, h \in L^\infty(Q)$, $i,j,k,l = 1,\ldots,n$; $c \geq c_0 \geq 0$, $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}\xi_i\xi_j \geq b_0\sum_{i=1}^n \xi_i^2$ *для всіх* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $b_0 + \frac{a_0(1-\gamma_0)}{\varkappa_1} \geq \delta_1$, *де* $(x,t) \in Q$, δ_1, γ_0 *— додатні сталі, причому* $\gamma_0 < 1$. *Тоді задача (1)–(5) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Покажемо, що відповідна однорідна задача з нульовими початковими умовами (2), (3) має лише нульовий розв'язок. Візьмемо

$$v = \begin{cases} \int_t^\tau u\, d\theta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t < \infty. \end{cases}$$

Очевидно, що $v \in H^1_0(S; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega))$. Тому має місце рівність

$$\int_{Q_\tau}\Big(-u_t v_t + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl}_{ij} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_j} v_{x_i} + c u_t v + huv\Big) dxdt = 0.$$

Використовуючи інтегрування частинами, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_{D_\tau} u^2 dx + \int_{D_0}\Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl}_{ij} z_{x_k x_l}(x,\tau) z_{x_i x_j}(x,\tau) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} z_{x_j}(x,\tau) z_{x_i}(x,\tau)\Big) dx = \\
&\quad = -\int_{Q_\tau}\Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a^{kl}_{ijt}(z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) + \\
&\qquad + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t))\Big) dx\, dt + \\
&\qquad + 2\int_{Q_\tau}(-cu^2 + (c_t - h)u(z(x,\tau) - z(x,t)))\, dx\, dt,
\end{aligned} \tag{20}$$

де $z(x,t) = \int_0^t u(x,\theta)\, d\theta$.

Сталі δ_2 і τ виберемо з наступних умов: $\frac{a_0\gamma_0}{2\varkappa_0}-4\tau \geq \frac{a_0\gamma_0}{4\varkappa_0}$, $\frac{a_0\gamma_0}{2}-2\tau a_2 \geq \frac{a_0\gamma_0}{4}$, $\frac{a_0(1-\gamma_0)}{\varkappa_1}+b_0-2\tau b_2 \geq \frac{\delta_1}{2}$. Тоді з рівності (20) будемо мати таку нерівність:

$$\int_{D_\tau}\Big(u^2+\frac{a_0\gamma_0}{2}\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n z^2_{x_ix_j}\Big)dx \leq$$
$$\leq \int_{Q_\tau}\Big(u^2(h_1^2+(c^0)^2)+2(a_2+b_2\varkappa_1+2\varkappa_0)\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n z^2_{x_ix_j}\Big)dx\,dt. \quad (21)$$

Тут c^0 така додатна стала, що $c(x,t)\leq c^0$, $c_t(x,t)\leq c^0$, $(x,t)\in Q$. Позначимо $A_4=\min\{1;\ \frac{a_0\gamma_0}{2}\}$, $A_5=\max\{h_1^2+(c^0)^2; 2(a_2+b_2\varkappa_1+2\varkappa_0)\}$. Тоді з нерівності (21) одержимо оцінку

$$\int_{D_\tau}\Big(u^2+\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n z^2_{x_ix_j}\Big)\,dx \leq \frac{A_5}{A_4}\int_0^\tau\int_{D_t}\Big(u^2+\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n z^2_{x_ix_j}\Big)\,dx\,dt.$$

Застосовуючи до цієї нерівності лему ([6], с.152), отримаємо, що

$$\int_0^T\int_{D_t}\Big(u^2+\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n z^2_{x_ix_j}\Big)\,dx\,dt \leq 0$$

для довільного додатнього T. Тобто $u(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in Q_T$, T — довільне. Отже, теорему 2 доведено.

Розглядатимемо стійкість нульового розв'язку. Таким чином, будемо досліджувати рівняння (1) з $f(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in Q$. Введемо позначення

$$\rho(u(x,t))=\Big(\int_\Omega\Big(u_t^2+\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n u^2_{x_ix_j}\Big)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Означення 2. Нульовий розв'язок задачі (1)–(5) називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\epsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що як тільки виконується умова $\rho(u(x,0))<\delta$, тоді $\rho(u(x,t))<\epsilon$ для майже всіх $t\in S$. Якщо ж, крім цього, $\lim\limits_{t\to+\infty,t\in J}\rho(u(x,t))=0$, де J — множина невиключних значень t функції $t\mapsto\rho(u(x,t))$, то нульовий розв'язок будемо називати асимптотично стійким.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(5) з $f(x,t)\equiv 0$ в Q, $0<\alpha<2$ і, крім цього,*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^n a^{kl}_{ijt}\eta_{ij}\eta_{kl}\leq 0,\quad \sum_{i,j=1}^n b_{ijt}\xi_i\xi_j\leq 0,\quad h_t\leq 0 \qquad (22)$$

для всіх $\eta\in\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(x,t)\in Q$. Тоді нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим. Якщо ж

$$c_0>0, \qquad (23)$$

то $\rho(u(x,t)) \le A_9 \exp(-\mu t)\rho(u(x,0))$ *для майже всіх* $t \in S$, *де* μ *і* A_9 *— додатні сталі.*

Доведення. Нехай $c_0 \ge 0$. Тоді згідно з умовами теореми з рівності (15) одержимо оцінку

$$A_1 \int_{D_t} \left((u_t^N)^2 + \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j}^N)^2 \right) dx \le A_2 \int_\Omega \left((u_1^N)^2 + \rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (u_{0x_i x_j}^N)^2 \right) dx.$$

Тобто $\rho^2(u^N(x,t)) \le \frac{A_2}{A_1}\rho^2(u^N(x,0))$, де $t \in [0;T]$, а T — довільне додатне число. Таким чином, маємо $\rho^2(u^N(x,t)) \le A_6\rho^2(u^N(x,0)) \le 2A_6\rho(u(x,0))$, $t \in S$ для достатньо великих N. Перейшовши до границі при $N \to \infty$, отримаємо, що $\rho^2(u(x,t)) \le 2A_6\rho(u(x,0))$ для майже всіх $t \in S$. Тоді для довільного $\epsilon > 0$ вибираємо $\delta = \epsilon/2A_6$ і з умови $\rho(u(x,0)) < \delta$ випливає, що $\rho(u(x,t)) < \epsilon$ для майже всіх $t \in S$.

Розглянемо випадок, коли $c_0 > 0$. Кожне рівняння системи (13) помножимо спочатку відповідно на $C_{mt}^N \exp(\mu t)$, а потім на $C_m^N \mu \exp(\mu t)$ і просумуємо по m від 1 до N. Тоді одержимо рівність

$$\int_\Omega \left(v_{tt}v_t + \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^{kl} v_{x_k x_l} v_{x_i x_j t} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_{x_j} v_{x_i t} + h v_t v + v_t^2(c-2\mu) + v_t v(\mu^2 - \mu c) \right) dx = 0,$$

$t \in S$, де $v = u^N \exp(\mu t)$, μ — додатна стала. Звідси, інтегруючи по t від 0 до τ, і використовуючи умови (22), (23), отримаємо

$$\int_{D_\tau} \left((v_t)^2 + (a_0(1-\gamma_1-\gamma_2) + \varkappa_0(\mu^2 - \mu c^0))\rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (v_{x_i x_j})^2 \right) dx \le A_7 \rho^2(u^N(x,0)), \tag{24}$$

де $A_7 = \max\{1+\mu;\ a_1 + b_1\varkappa_1 + (h_1+\mu)\varkappa_0)\}$, $\mu \le c_0/2$. Перепишемо нерівність (24) для u^N , вибравши при цьому μ таким малим, щоб справджувались наступні умови:

$$a_0(1-\gamma_1-\gamma_2) + \mu\varkappa_0(\mu - c^0 - 1/\delta_2) > 0,\ c_0 - 2\mu \ge 0,\ 1 - \mu\delta_2 > 0. \tag{25}$$

Тут δ_2 — додатна стала. Покладемо $\delta_2 = \frac{1}{\mu+1}$. Будемо мати

$$\int_{D_\tau} \left(\frac{1}{\mu+1}(u_t^N)^2 + (a_0(1-\gamma_1-\gamma_2) - \mu\varkappa_0(c^0+1))\rho^\alpha(x) \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j}^N)^2 \right) dx \le$$
$$\le A_7 \rho^2(u^N(x,0)) \exp(-2\mu\tau);$$

Нехай $A_8 = \max\{\frac{1}{1+\mu};\ a_0(1-\gamma_1-\gamma_2) - \mu\varkappa_0(c^0+1)\}$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\rho^2(u^N(x,t)) \le \frac{A_7}{A_8}\rho^2(u^N(x,0))\exp(-2\mu t) \le \frac{2A_7}{A_8}\rho^2(u(x,0))\exp(-2\mu t),$$

$t \in S$, для достатньо великих N. Перейшовши до границі при $N \to \infty$, одержимо $\rho(u(x,t)) \le A_9\rho(u(x,0))\exp(-\mu t)$ для майже всіх $t \in S$, де A_9 — додатна стала, яка не залежить від t. Отже, теорему 3 доведено.

Надалі вважатимемо, що виконуються такі умови

$$
\begin{gathered}
b_0\rho^\beta(x)\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1,2}^n b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le b_1\rho^\beta(x)\sum_{i=1}^n \xi_i^2,\\
\sum_{i,j=1}^n b_{ijt}(x,t)\xi_i\xi_j \le b_2\rho^\beta(x)\sum_{i=1}^n \xi_i^2,\ h(x,t)\le h_1\rho^\gamma(x),\ h_t(x,t)\le h_2\rho^\gamma(x)
\end{gathered}
\tag{26}
$$

для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(x,t)\in Q$, $\beta<2\alpha-2$, $\gamma<2\alpha-3$. Таким самим шляхом, як для теорем 1–3, можна довести наступні теореми.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (4), (7) для* $\alpha\ge 2$, *(26) і, крім цього,* $a_{ij}^{kl}, b_{ij},\ c,h\in L^\infty(Q)$, $i,j,k,l=1,\dots,n$; $b_0+\frac{a_0\gamma_1}{\varkappa_1}\ge\delta_3$, $h(x,t)+\frac{a_0\gamma_2}{\varkappa_0}\rho^\gamma(x)\ge h_0\rho^\gamma(x)$, $c(x,t)\ge c_0\ge 0$, *де* $(x,t)\in Q$, δ_3, h_0,γ_1,γ_2 *— деякі додатні сталі, причому* $\gamma_1+\gamma_2<1$; $u_0\in\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$, $f\in L^2_{\text{loc}}(S;L^2(\Omega))$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).*

Теорема 5. *Нехай виконуються умови (4), (7) для* $\alpha\ge 2$ *і (26), крім цього,*

$$
b_0+\frac{a_0(1-\gamma_0)}{\varkappa_1}\ge\delta_4,\ h(x,t)+\frac{a_0\gamma_2}{\varkappa_0}\rho^\gamma(x)\ge h_0\rho^\gamma(x),\ c(x,t)\ge c_0\ge 0,
$$

де $(x,t)\in Q$, δ_4, h_0, γ_0, γ_2 *- додатні сталі, причому* $\gamma_0<1$, $\gamma_2<1$. *Тоді задача (1)–(5) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

При дослідженні стійкості будемо розглядати нульовий роз'язок, тобто рівняння (1) з $f(x,t)\equiv 0$ в Q. Введемо позначення

$$
\rho(u(x,t))=\left(\int_\Omega\left(u_t^2+\rho^\alpha(x)\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2+\rho^\beta(x)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+\rho^\gamma(x)u^2\right)dx\right)^{\frac12}.
$$

Стійкість розуміємо в сенсі означення 2 тільки вже в даній метриці.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теорем 4, 5 і, крім цього, виконується умова (22) для* $\alpha\ge 2$. *Тоді нульовий розв'язок задачі (1)–(5) стійкий за Ляпуновим.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Байкузиев К.Б. Основные смешаные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными. – Ташкент: Фан, 1984. – 252с.
2. Зубов В.И. Устойчивость движения: (Методы Ляпунова и их применение). – М.: Высш.шк., 1984. – 232с.
3. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. – Новосибирск: Наука. Сиб.отд., 1987. – 274с.
4. Лавренюк С.П. *Об устойчивости поперечных колебаний стержня с острым краем* Нелинейные граничные задачи. – 1992. – Вып.4. – С.62–65.
5. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336с.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408с.

Львівський університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 21.11.1996