УДК 517.6:517.9

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Н.П. Настасьєва, І.М. Черевко

N.P. Nastaseeva, I.M. Cherevko. *Approximate method for boundary value problem of integro-differential equations of neutral type*, Matematychni Studii, **10**(1998) 147–152.

Boundary value problem for integro-differential equations of neutral type was considered. The iteration process for finding an approximate solution in the form of a spline-function of third degree of a boundary value problem and investigation of convergence was given.

Н.П. Настасьева, И.М. Черевко. *Приближенный метод решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнений нейтрального типа* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 2. – С.147–152.

Рассмотрена краевая задача для интегро-дифференциального уравнений нейтрального типа. Построена итерационная схема отыскания приближенного решения краевой задачи в виде кубических сплайн-функций и дано обоснование ее сходимости.

У багатьох прикладних задачах електродинаміки, теорії коливань, теплоенергетики та ін. динамічні процеси описуються диференціальними та інтегро-диференціальними рівняннями з аргументом, що відхиляється. Аналітичне розв'язання таких задач можливе тільки як виняток. Тому чисельні методи їх розв'язання становлять значний інтерес. Зведення крайової задачі до інтегрального рівняння і застосування до її розв'язання проекційно-ітераційних методів розглянуто в [2]. Метод сплайн-функцій для крайових задач запізнюючого типу розглядався в [3–7] та ін. У даній роботі, що продовжує дослідження [6,7], побудовано і обгрунтовано наближений метод розв'язання крайової задачі для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу у вигляді кубічних сплайнів дефекту 2. Застосування апарату сплайн-функцій дозволяє побудувати алгоритми прості для реалізації і в той же час придатні для розв'язання широкого класу крайових задач.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 34K10, 34K40, 65D07.

1. Позначення та постановка задачі

Нехай $\tau_0(x), \tau_1(x), \tau_2(x)$ — скалярні неперервні невід'ємні функції, визначені на проміжку $[a,b]$. Позначимо

$$a^* = \min\Big\{ \min_{x\in[a,b]} \big(x-\tau_0(x)\big), \min_{x\in[a,b]} \big(x-\tau_1(x)\big), \min_{x\in[a,b]} \big(x-\tau_2(x)\big)\Big\},$$
$$[y(x)] = \big(y(x), y\big(x-\tau_0(x)\big), y'(x), y'\big(x-\tau_1(x)\big), y''\big(x-\tau_2(x)\big)\big).$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x,[y(x)]\big) + \int_a^b g\big(x,t,[y(t)]\big)\,dt, \qquad x\in[a,b], \tag{1}$$
$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p=0,1,2,\ x\in[a^*,a],\ y(b)=\gamma, \tag{2}$$

де функції $f(x,u,u_1,v,v_1,w)$, $g(x,t,u,u_1,v,v_1,w)$ неперервні за сукупністю змінних та задовольняють умову Ліпшиця по u,u_1,v,v_1,w зі сталими $L_1, L_2, \dots, L_5$ та $R_1, R_2, \dots R_5$ відповідно, $\varphi(x)$ — задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*,a]$, $\gamma\in R$.

Введемо множини точок, що визначаються загаюваннями $\tau_1(x), \tau_2(x)$:

$$E_1 = \big\{x_i\in[a,b];\ x_i-\tau_1(x_i)=a,\ i=1,2,\dots\big\},$$
$$E_2 = \big\{x_j\in[a,b];\ x_0=a,\ x_{j+1}-\tau_2(x_{j+1})=x_j,\ j=1,2,\dots\big\}, \quad E=E_1\cup E_2.$$

Нехай загаювання $\tau_1(x), \tau_2(x)$ — такі функції, що множини E_1, E_2 скінченні. Точки множини E занумеруємо в порядку їх зростання: $a=x^{(0)}<x^{(1)}<\dots<x^{(l)}<b$ і введемо відрізки $\delta_1=[a,x^{(1)}]$, $\delta_2=[x^{(1)},x^{(2)}],\dots,\delta_{l+1}=[x^{(l)},b]$.

Означимо множину функцій

$$B\big([a^*,b]\big) = \big\{y(x): y\in C[a^*,b],\ y\in C^1[a,b],\ y\in C^2[\delta_r],\ r=1,2,\dots,l+1\big\},$$

яка утворює лінійний простір.

Розв'язком задачі (1)–(2) будемо вважати таку функцію $y=y(x)$ із простору $B\big([a^*,b]\big)$, яка задовольняє рівняння (1) на $[a,b]$ (за винятком точок множини E) і крайові умови (2).

Питання існування та єдиності розв'язку крайових задач для диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, вивчалось в [1–3]. В подальшому будемо припускати, що існує розв'язок задачі (1)–(2), який належить до $B\big([a^*,b]\big)$.

2. Обчислювальна схема

Задамо на $[a,b]$ сітку Δ: $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ так, щоб $E\subset\Delta$. Будемо шукати наближений розв'язок задачі (1)–(2) у вигляді інтерполяційного кубічного сплайну $S(y,x)$ дефекту 2 на сітці Δ, що належить простору функцій $B\big([a^*,b]\big)$.

Введемо позначення $h_j=x_j-x_{j-1}$, $j=1,\dots,n$, $M_{j\oplus}=S''(y,x_j+0)$, $j=0,\dots,n-1$, $M_{j\ominus}=S''(y,x_j-0)$, $j=1,\dots,n$. Для сплайну $s(x,y)$ нескладно одержати зображення [3]:

$$S(y,x) = M_{j\ominus}\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j} + M_{j-1\oplus}\frac{(x_j-x)^3}{6h_j} + \Big(\frac{y_{j-1}}{h_j} - M_{j-1\oplus}\frac{h_j}{6}\Big)(x_j-x) +$$
$$+\Big(\frac{y_j}{h_j} - M_{j\ominus}\frac{h_j}{6}\Big)(x-x_{j-1}), \quad x\in[x_{j-1},x_j],\ j=1,\dots,n, \tag{5}$$

де величини $M_{j\oplus}$, $M_{j\ominus}$ задовольняють рівняння неперервності

$$h_{j+1}y_{j-1}-(h_j+h_{j+1})y_j+h_jy_{j+1}=\frac{h_jh_{j+1}}{6}\big(h_jM_{j-1\oplus}+2h_jM_{j\ominus}+$$
$$+2h_{j+1}M_{j\oplus}+h_{j+1}M_{j+1\ominus}\big),\quad j=1,\dots,n-1,\ y_0=\varphi(a),\ y_n=\gamma. \tag{6}$$

Наведемо деякі властивості матриць A і B, що визначаються коефіцієнтами відповідно в лівій та правій частинах системи (6).

Лема. *Справедливі наступні співвідношення:*

1)
$$\det(A)=(-1)^{n-1}h_2h_3\dots h_{n-1}(b-a), \tag{7}$$

2)
$$\|A^{-1}\|\le\frac{K^2}{8h^2}(b-a)=\max_i\sum_{j=1}^{n-1}|a_{ij}^{-1}|, \tag{8}$$

3)
$$\|B\|=\max_i\sum_{j=1}^{n-1}|b_{ij}|\le 6H^2, \tag{9}$$

де a_{ij}^{-1} *— елементи матриці* A^{-1}, $K=\frac{H}{h}$, $h=\min_i h_i$, $H=\max_i h_i$.

Доведення тверджень леми легко одержати, застосовуючи принцип математичної індукції та використовуючи структуру матриць A,B.

Розглянемо тепер ітераційну схему знаходження наближеного розв'язку задачі (1)–(2) у вигляді послідовності сплайнів (5).

1. Вибираємо кубічний сплайн $S(y^{(0)},x)$ довільним чином, щоб тільки задовольнялись крайові умови (5).

2. Використовуючи вихідне рівняння (1) і сплайн $S(y^{(0)},x)$, знаходимо для $k=0,1,\dots$

$$M_{j\oplus}^{k+1}=f\big(x_j,[S(y^{(k)},x_j+0)]\big)+\int_a^b g\big(x_j,t,[S(y^{(k)},t)]\big)\,dt,\ j=0,\dots,n-1, \tag{10}$$

$$M_{j\ominus}^{k+1}=f\big(x_j,[S(y^{(k)},x_j-0)]\big)+\int_a^b g\big(x_j,t,[S(y^{(k)},t)]\big)\,dt,\ j=1,\dots,n. \tag{11}$$

У формулах (10), (11), покладаємо $S^{(p)}(y^{(k)},t)=\varphi^{(p)}(t)$, $p=0,1,2$, якщо $t<a$.

3. Із рівнянь неперервності (6) і крайових умов (2) знаходимо множину $\{y_j^{(k+1)}\}$, $j=0,\dots,n$, $k=0,1,\dots$.

4. За множиною $\{y_j^{(k+1)}\}$, $j=0,\dots,n$ знаходимо кубічний сплайн $S(y^{(k+1)},x)$, який виступає в якості наступного наближення.

Якщо послідовність сплайнів $S(y^{(k)},x)$, $k=0,1,\dots$ збігається до розв'язку задачі (1)–(2), то при достатньо великому k сплайн $S(y^{(k)},x)$ буде апроксимацією шуканого розв'язку. Відмітимо, що у випадку крайових задач із загаюванням аналогічні ітераційні схеми вивчались в [3,4,7].

3. Достатні умови збіжності

Введемо позначення

$$u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},\quad v=\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3},\quad w=1, \tag{12}$$
$$\lambda_1=L_1+L_2+(b-a)(R_1+R_2),\quad \lambda_2=L_3+L_4+(b-a)(R_3+R_4),$$
$$\lambda_3=L_5+(b-a)R_5.$$

Теорема 1. *Нехай розв'язок крайової задачі існує і єдиний та належить простору функцій $B\big([a^*, b]\big)$. Тоді при виконанні нерівності*

$$\vartheta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{13}$$

існує таке $H^* > 0$, що для всіх $H < H^*$ послідовність $\{S(y^{(k)}, x)\}$, $k = 0, 1, \dots$ рівномірно збігається на $[a, b]$ і справджується нерівність

$$\lim_{k\to\infty} \big\| S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x) \big\| \le K_p \omega\big(y''(x), H\big), \quad p = 0, 1, 2, \tag{14}$$

де $y(x)$ — розв'язок задачі (1), (2),

$$\omega\big(y''(x), H\big) = \max\big\{\omega_r(y'', H) \mid 1 \le r \le l + 1\big\},$$

$\omega_r(y'', H)$ — модуль неперервності функції $y''(x)$ на δ_r,

$$K_0 = \sup_{H \le H^*} \Big(\frac{u\mu}{1-\vartheta} + \frac{5H^2}{2}\Big), \quad K_1 = \sup_{H \le H^*} \Big(\frac{v\mu}{1-\vartheta} + 5H\Big),$$

$$K_2 = \sup_{H \le H^*} \Big(\frac{\omega\mu}{1-\vartheta} + 5\Big), \quad \mu = 5\big(1 + \frac{h^2}{2}(\lambda_1 - L_1) + H\lambda_2 + \lambda_3\big).$$

Доведення. За лемою із рівності (7) випливає, що побудова ітераційної послідовності можлива. Покажемо, що ряди

$$S(p)(y^{(0)}, x) + \sum_{i=1}^{\infty} \big[S^{(p)}(y^{(i)}, x) - S^{(p)}(y^{(i-1)}, x)\big], \quad p = 0, 1, 2$$

збігаються рівномірно на $[a, b]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей

$$S^{(p)}(y^{(k)}, x), \quad k = 0, 1, \dots, \; p = 0, 1, 2.$$

Запишемо ітераційний алгоритм у матричній формі

$$t^{(k+1)} = \frac{A^{-1}B}{6} \Big(f\big(x, [S(y^{(k)}, x)]\big) + \int_a^b g\big(x, t, [S^{(k)}(y^{(k)}, x)]\big)\, dt \Big) + A^{-1}q, \tag{15}$$

де q — сталий вектор, що залежить тільки від крайових умов (2).

Нехай $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Тоді із (15), враховуючи властивості f, маємо

$$\begin{aligned} \|y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}\| \le \frac{1}{6} \|A^{-1}\|\, \|B\| \big(\lambda_1 \|S(y^{(k)}, x) - S(y^{(k-1)}, x)\| + \\ + \lambda_2 \|S'(y^{(k)}, x) - S'(y^{(k-1)}, x)\| + \lambda_3 \|S''(y^{(k)}, x) - S''(y^{(k-1)}, x)\|\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Виходячи із співвідношень (6), (16) і враховуючи вигляд сплайну (5), одержуємо, що

$$\begin{aligned} \|S(y^{(k+1)}, x) - S(y^{(k)}, x)\| \le \Big(\frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8}\Big) \big[\lambda_1 \|S(y^{(k)}, x) - S(y^{(k-1)}, x)\| + \\ + \lambda_2 \|S'(y^{(k)}, x) - S'(y^{(k-1)}, x)\| + \lambda_3 \|S''(y^{(k)}, x) - S''(y^{(k-1)}, x)\|\big]. \end{aligned} \tag{17}$$

Далі, із формул (5), (6) та леми випливає, що

$$\|S'(y^{(k+1)},x)-S'(y^{(k)},x)\| \le \Big(\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3}\Big)\big[\lambda_1\|S(y^{(k)},x)-S(y^{(k-1)},x)\|+ \\ +\lambda_2\|S'(y^{(k)},x)-S'(y^{(k-1)},x)\|+\lambda_3\|S''(y^{(k)},x)-S''(y^{(k-1)},x)\|\big], \tag{18}$$

$$\|S''(y^{(k+1)},x)-S''(y^{(k)},x)\| \le \lambda_1\|S(y^{(k)},x)-S(y^{(k-1)},x)\|+ \\ +\lambda_2\|S'(y^{(k)},x)-S'(y^{(k-1)},x)\|+\lambda_3\|S''(y^{(k)},x)-S''(y^{(k-1)},x)\|. \tag{19}$$

Введемо позначення

$$d=\lambda_1\|S(y^{(k)},x)-S(y^{(k-1)},x)\|+\lambda_2\|S'(y^{(k)},x)-S'(y^{(k-1)},x)\|+ \\ +\lambda_3\|S''(y^{(k)},x)-S''(y^{(k-1)},x)\|.$$

Ітеруючи нерівності (17)–(19) при виконанні умови (13) і $H\le H^*$, одержуємо нерівності

$$\begin{aligned}\|S(y^{(k+1)},x)-S(y^{(k)},x)\| &\le u\vartheta^{k-1}d,\\ \|S'(y^{(k+1)},x)-S'(y^{(k)},x)\| &\le v\vartheta^{k-1}d,\\ \|S''(y^{(k+1)},x)-S''(y^{(k)},x)\| &\le \omega\vartheta^{k-1}d.\end{aligned} \tag{20}$$

Звідси, очевидно, випливає збіжність послідовностей $\{S^{(p)}(y^{(k)},x)\}$, $k=0,1,\ldots$, $p=0,1,2$. Позначимо $\lim\limits_{k\to+\infty}S^{(p)}(y^{(k)},x)=S^{(p)}(\overline{y},x)$, $p=0,1,2$.

Зауважимо, що параметри $\overline{M}_{j\oplus}$, $\overline{M}_{j\ominus}$ задовольняють системи (6), (10), (11).

Нехай $S(y,x)$ — кубічний сплайн дефекту 2, що інтерполює на сітці Δ розв'язок $y(x)$ крайової задачі (1), (2). Тоді маємо

$$\|S^{(p)}(\overline{y},x)-y^{(p)}(x)\|\le\|S^{(p)}(\overline{y},x)-S^{(p)}(y,x)\|+\|S^{(p)}(y,x)-y^{(p)}(x)\|,\quad p=0,1,2. \tag{21}$$

Для другого доданку в (21) справедлива оцінка [8]

$$\|S^{(p)}(y,x)-y^{(p)}(x)\|\le K_pH^{2-p}\omega(y''(x),H),\quad p=0,1,2,\ K_0=\frac{5}{2},\ K_1=K_2=5. \tag{22}$$

Позначимо

$$\max_{a\le x\le b}\big|S^{(p)}(\overline{y},x)-S^{(p)}(y,x)\big|=\alpha_p,\quad p=0,1,2.$$

Враховуючи властивості функції f та оцінки (22), знаходимо

$$\Big|M_{j\oplus}-\Big((f\big(x_j,[S(y,x_j+0)]\big)+\int_a^b g\big(x,t,[S(y,t)]\big)\,dt\Big)\Big|\le \\ \le 5\Big(1+\frac{H^2}{2}(\lambda_1-L_1)+H\lambda_2+\lambda_2\Big)\omega(y''(x),H)=\mu\omega(y''(x),H), \tag{23}$$

$$\Big|M_{j\ominus}-\Big((f\big(x_j,[S(y,x_j-0)]\big)+\int_a^b g\big(x,t,[S(y,t)]\big)\,dt\Big)\Big|\le\mu\omega(y''(x),H), \tag{24}$$

Із співвідношень (23), (24) та враховуючи, що сплайни $S(\overline{y},x)$, $S(y,x)$ мають вигляд (5), одержуємо систему нерівностей

$$\begin{aligned}\alpha_0&\le u\big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H)\big),\\ \alpha_1&\le v\big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H)\big),\\ \alpha_3&\le \omega\big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H)\big).\end{aligned} \tag{25}$$

Розв'язуючи систему нерівностей (25), знаходимо оцінки перших доданків у правій частині (21), які разом із (22) забезпечують виконання нерівності (14).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо розглядати частинний випадок крайової задачі (1)–(2) (при $g(x,t,[y]) \equiv 0$), тоді умова (13) теореми 1 збігається із одержаною в [1] достатньою умовою існування розв'язку крайових задач для диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Зауваження 2. При використанні описаного алгоритму розв'язування крайових задач (1)–(2) за наближений розв'язок вибирається $S(y^{(k)},x)$ при деякому $k > 0$. Оцінимо похибку, яка буде при цьому допущена. Із нерівності (20) маємо

$$\left\|S^{(p)}(y^{(k+j)},x) - S^{(p)}(y^{(k)},x)\right\| \le \vartheta^{k-1}\max(u,v,w)d\frac{1-\vartheta^i}{1-\vartheta}, \quad p=0,1,2. \tag{26}$$

Нехай $H < H^*$, тоді з нерівності (26) одержуємо

$$\left\|S^{(p)}(\overline{y},x) - S^{(p)}(y^{(k)},x)\right\| \le \frac{\vartheta^{k-1}}{1-\vartheta}\max(u,v,w)d.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує число ітерацій k_0 таке, що при $k > k_0$

$$\left\|S^{(p)}(\overline{y},x) - S^{(p)}(y^{(k)},x)\right\| \le \varepsilon, \quad p=0,1,2. \tag{26}$$

Тоді при $k \ge k_0$ і виконанні теореми 1 одержуємо оцінку похибки

$$\left\|S^{(p)}(y^{(k)},x) - y^{(p)}(x)\right\| \le \varepsilon + K_p\omega(y''(x),H), \quad p=0,1,2.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Каменский Г.А., Мышкис А.Д. *Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа* Дифференц. уравнения. – 1972. – Т.8, №12. – С.2171–2179.
2. Лучка А.Ю. *О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* Дифференциально-функциональные уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С.90–101.
3. Nikolova T.S., Bainov D.D. *Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations* Yokohama Math. J. – 1981. – V.29, №1. – P.108–122.
4. Burkowski F.I., Gowan D.D. *The numerical derivation of a periodic solution of a second order differential-difference equation* SIAM J. Numer. Anal. – 1973. – V.10, №3. – P.489–495.
5. Bellen A., Migula G. *Spline approximations for neutral delay differential equaitons* Revua d'analyse numer. et théorie de l'approx. – 1994. – V.23, №2. – P.117–125.
6. Черевко И.М., Якимов И.В. *Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* Укр. матем. ж. – 1989. – Т.41, №6. – С.854–860.
7. Черевко И.М., Настасьева Н.П. *Чисельный метод розв'язування крайової задачі для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь із загаюваннями* Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь. – Київ: Ин-т математики АН України, 1993. – С.90–101.
8. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972, 316с.

Чернівецький державний ун-т,

274012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

Надійшло 20.03.1997

Після переробки 30.01.1998