УДК 517.5

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ В ПІВПЛОЩИНІ, ЯКИЙ ВИЗНАЧАЄТЬСЯ ШВИДКО ЗРОСТАЮЧОЮ МАЖОРАНТОЮ

В.Л. Шаран

V. Sharan. *On the interpolation sequences of one class functions analytic in the half-plane determined by fast-growing majorant*, Matematychni Studii, **10**(1998) 133–146.

The criterion of solution existence for the interpolation problem $f(\lambda_n) = b_n$ in the class of functions f analytic in the right half-plane $\mathbb{C}_+$ for which $(\exists c_1 > 0)\ (\forall z \in \mathbb{C}_+)\ :\ |f(z)| \leqslant c_1 \exp(\eta(c_1|z|))$, has been found, where η – positive increasitely differentiated continuously over $(0; +\infty)$ function such that $\eta(t) \to +\infty$ as $t \to +\infty$ and $(\exists c_2 > 0)\ (\forall t \geqslant 1)\ :\ \frac{\eta(t)\ln\eta(t)}{t\eta'(t)} \leqslant c_2$.

В. Шаран. *О интерполяционных последовательностях одного класса функций, аналитических в полуплоскости, который определяется быстро возрастающей мажорантой* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 2. – С.133–146.

Найден критерий существования решения интерполяционной задачи $f(\lambda_n) = b_n$ в классе функций f, аналитических в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$, для которых $(\exists c_1 > 0)\ (\forall z \in \mathbb{C}_+)\ :\ |f(z)| \leqslant c_1 \exp(\eta(c_1|z|))$, где η — положительная возрастающая непрерывно дифференцируемая на $(0; +\infty)$ функция, для которой $\eta(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $(\exists c_2 > 0)\ (\forall t \geqslant 1)\ :\ \frac{\eta(t)\ln\eta(t)}{t\eta'(t)} \leqslant c_2$.

Нехай (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел, які лежать у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, η — додатна неперервна зростаюча на $[0; +\infty)$ функція, а B_η — клас аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, які задовольняють умову

$$(\exists c_1 > 0)\ (\forall z \in \mathbb{C}_+)\ :\ |f(z)| \leqslant c_1 \exp(\eta(c_1|z|)). \tag{1}$$

Через $c_1,\ c_2,\ c_3, \dots$ надалі позначаємо додатні сталі.

Добре відома теорема Карлесона [1] дає опис інтерполяційних послідовностей класу B_η у випадку $\eta \equiv \text{const}$. Задача про опис інтерполяційних послідовностей класу B_η у випадку $\eta(r) = r^\varrho$ розглядалася в роботах Г.Д. Трошина [2], Б.Я. Левіна і Н.Т. Уена [3] та Н.Т. Уена [4], [5], [6]. Результати завершеного характеру в цьому випадку отримав М.Г. Малютін [7], [8], [9]. Метою даної статті є опис інтерполяційних послідовностей класу B_η у випадку, коли η досить швидко зростає. Ми припускаємо надалі, що η — додатна неперервно диференційовна на $(0; +\infty)$ функція, для якої $\eta(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ і

$$(\exists c_2)\ (\forall t \geqslant 1)\ :\ \frac{\eta(t)\ln\eta(t)}{t\eta'(t)} \leqslant c_2. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30E05.

Нехай (b_n) — довільна послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову

$$(\exists c_3)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ :\ |b_n| \leqslant c_3 \exp(\eta(c_3|\lambda_n|)). \tag{3}$$

Ми доведемо наступні твердження.

Теорема 1. *Для того щоб існувала функція $F \not\equiv 0$, яка належить до класу B_η і має нулі в усіх точках λ_n, необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty, \tag{4}$$

$$(\exists c_4)\ :\ \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{rS(r)}{\eta(c_4 r)} < +\infty, \tag{5}$$

де $S(r) = \sum\limits_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \Big(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\Big)\cos\varphi_n,\ \varphi_n = \arg\lambda_n,\ |\varphi_n| < \frac{\pi}{2}.$

Теорема 2. *Для того щоб для кожної послідовності комплексних чисел (b_n), яка задовольняє умову (3), існувала функція f із класу B_η така, що*

$$f(\lambda_n) = b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

необхідно і досить, щоб виконувались умови (4), (5) і для деякої функції F із класу B_η, яка має прості нулі в точках λ_n,

$$(\exists c_5)\ :\ \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\eta(c_5|\lambda_n|)} \ln\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_n |F'(\lambda_n)|} < +\infty. \tag{7}$$

Відзначимо, що для цілих функцій подібні результати отримала Т.І. Абаніна [10], [11].

Зауважимо також, що із (2) випливає виконання наступних умов

$$(\exists c_6)\ (\exists r_0)\ (\forall r \geqslant r_0)\ :\ \eta(r) \geqslant e^{r^{c_6}}, \tag{8}$$

$$(\forall c_7)\ (\forall c_8 > 1)\ (\exists r_0)\ (\forall r \geqslant r_0)\ :\ c_7\eta(r) \leqslant \eta(c_8 r). \tag{9}$$

Справді, із рівності $\ln\ln\eta(r) - \ln\ln\eta(1) = \int_1^r \frac{t\eta'(t)}{\eta(t)\ln\eta(t)}\,d\ln t$ і умови (2) отримуємо (8), а з рівності $\ln\eta(c_8 r) - \ln\eta(r) = \int_r^{c_8 r} \frac{t\eta'(t)}{\eta(t)}\,d\ln t$, випливає (9), бо $\frac{t\eta'(t)}{\eta(t)} \to +\infty$ при $t\to+\infty$ завдяки (2).

Крім цього, при виконанні вказаних умов на η, умова (5) рівносильна до кожної з наступних умов

$$(\exists c_9)\ (\exists r_0)\ (\forall r \geqslant r_0)\ :\ S_0(r) \leqslant \frac{\eta(c_9 r)}{r}, \tag{10}$$

$$(\exists c_{10})\ (\exists r_0)\ (\forall r \geqslant r_0)\ :\ s(r) \leqslant \eta(c_{10} r), \tag{11}$$

де

$$S_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}, \quad s(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \cos\varphi_n.$$

Справді, рівносильність умов (5) і (10) випливає із нерівності [12, с.490] $S(r) \leqslant S_0(r) \leqslant \frac{4}{3}S(2r)$ і умови (9). Покажемо тепер рівносильність умов (5) і (11). Якщо виконується (5), то (11) випливає із нерівності [12, с.484] $s(r) \leqslant \frac{2}{3}rS(2r)$.

Нехай тепер виконується умова (11). Оскільки [13, с.58] $S(r) = \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{r^2}\right) s(t)\,dt$, то, використовуючи (11), правило Лопіталя і (2), одержуємо (5).

1. Для доведення теореми 1 нам буде потрібна наступна лема.

Лема 1. *Нехай функція $f \not\equiv 0$, яка має нулі в точках $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і обмеженою в кожному півкрузі $Q_R = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$, $0 < R < +\infty$. Тоді для всіх $r \in [1; +\infty)$*

$$\sum_{|\lambda_n| \leqslant r} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \tag{12}$$

$$S(r) \leqslant \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |f(re^{i\varphi})| \cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_1^r \Big(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\Big) \ln |f(it) f(-it)| \, dt + c_{11}. \tag{13}$$

Це твердження міститься в [14, с. 26] (в [14] відповідні результати сформульовані для верхньої півплощини). Зауважимо, що (12) встановлюється в [14] в ході доведення теореми 2.1, а для отримання (13) потрібно врахувати монотонність сингулярної граничної функції (див. також [12]).

Доведення теореми 1. Якщо функція F аналітична в $\mathbb{C}_+$ і $|F(z)| \leqslant c_1 \exp(\eta(c_1|z|))$, $z \in \mathbb{C}_+$, то F обмежена в кожному півкрузі Q_R, $R > 0$. Тому [15, с. 182] має майже скрізь на уявній осі кутові граничні значення $F(iy)$, при цьому $|F(iy)| \leqslant c_1 \exp(\eta(c_1|y|))$ для майже всіх $y \in \mathbb{R}$. Тому із леми 1 отримуємо (4) і, використовуючи правило Лопіталя та (2), знаходимо

$$S(r) \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{\eta(c_1 r)}{r} + \frac{1}{\pi} \int_1^r \frac{\eta(c_1 t)}{t^2} \, dt + c_{12} \leqslant c_{13} \frac{\eta(c_1 r)}{r}.$$

Звідси отримуємо (5). Необхідність умов (4) і (5) доведено.

Достатність. Нехай

$$G(z) = \prod_{|\lambda_n| > 1} W_n(z), \quad W_n(z) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\overline{\lambda}_n} \exp\Big\{ \sum_{j=1}^{p_n} \frac{z^j}{j} \Big(\frac{1}{\lambda_n{}^j} + \frac{(-1)^{j+1}}{\overline{\lambda}_n{}^j} \Big) \Big\}, \tag{14}$$

де p_n — послідовність натуральних чисел, яку ми виберемо нижче. Відомо [14, с. 35], що при $|\lambda_n| \leqslant 2|z|$

$$\ln |W_n(z)| \leqslant 2 \left(\frac{2|z|}{|\lambda_n|} \right)^{p_n} \cos\varphi_n, \tag{15}$$

а при $|\lambda_n| > 2|z|$

$$|\ln W_n(z)| \leqslant 4 \left(\frac{|z|}{|\lambda_n|} \right)^{p_n+1} \cos\varphi_n, \quad \varphi_n = \arg \lambda_n. \tag{16}$$

Очевидно, при $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$

$$\ln |G(z)| = \sum_{1 < |\lambda_n| \leqslant 2r} \ln |W_n(z)| + \sum_{|\lambda_n| > 2r} \ln |W_n(z)|. \tag{17}$$

Відзначимо, що для сталої c_{10}, визначеної умовою (11),

$$\int_1^\infty \frac{ds(t)}{\eta^2(c_{10} t)} < +\infty. \tag{18}$$

Справді, враховуючи (11), отримуємо

$$\int_1^{+\infty}\frac{ds(t)}{\eta^2(c_{10}t)}=\frac{s(t)}{\eta^2(c_{10}t)}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{2c_{10}\eta'(c_{10}t)s(t)}{\eta^3(c_{10}t)}dt\leqslant c_{14}+2c_{10}\int_1^{+\infty}\frac{\eta'(c_{10}t)}{\eta^2(c_{10}t)}dt<+\infty.$$

Нехай $p_n=\left[\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}|\lambda_n|)\right]$, де $[x]$ — ціла частина числа x, а c_2 і c_{10} визначені відповідно умовами (2) та (11). Тоді із (17), враховуючи (15) і (16), отримуємо

$$\ln|G(z)|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant 2r}\left(\frac{2r}{|\lambda_n|}\right)^{[\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}|\lambda_n|)]}\cos\varphi_n\ +4\sum_{|\lambda_n|>2r}\left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)^{[\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}|\lambda_n|)]+1}\cos\varphi_n\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{|\lambda_n|>1}\left(\frac{2r}{|\lambda_n|}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}|\lambda_n|)}\cos\varphi_n=4\sum_{|\lambda_n|>1}\left(\frac{2e^{2c_2}r}{|\lambda_n|}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}|\lambda_n|)}\frac{\cos\varphi_n}{\eta^2(c_{10}|\lambda_n|)}\leqslant$$

$$\leqslant 4\int_1^{+\infty}\left(\frac{2e^{2c_2}r}{t}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t)}\frac{ds(t)}{\eta^2(c_{10}t)}\leqslant 4\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_2}r}{t}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t)}\right\}\int_1^{+\infty}\frac{ds(t)}{\eta^2(c_{10}t)}.\qquad(19)$$

Оскільки функція $\left(\frac{2e^{2c_2}r}{t}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t)}$ неперервна на $[1;+\infty]$ і прямує до нуля при $t\to+\infty$, то для кожного фіксованого $r>0$ знайдеться точка t_r, в якій дана функція досягає свого максимуму. Крім цього, задана функція спадає на $[2e^{2c_2}r;+\infty]$, і тому $t_r\leqslant 2e^{2c_2}r$. Отже, якщо $t_r=1$, то, враховуючи (8) отримуємо

$$\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_2}r}{t}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t)}\right\}=(2e^{2c_2}r)^{c_{15}}\leqslant\eta(c_{16}t).\qquad(20)$$

Якщо ж $1<t_r\leqslant 2e^{2c_2}r$, то

$$\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_2}r}{t}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t)}\right\}=e^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t_r)\ln(2e^{2c_2}r/t_r)}.\qquad(21)$$

Оскільки

$$\left(e^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t)\ln(2e^{2c_2}r/t)}\right)'\Big|_{t=t_r}=0,$$

то, враховуючи (2), отримуємо

$$\ln\frac{2e^{2c_2}r}{t_r}=\frac{\eta(c_{10}t_r)\ln\eta(c_{10}t_r)}{c_{10}t_r\eta'(c_{10}t_r)}\leqslant c_2.$$

Внаслідок цього із (21) одежуємо

$$\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_2}r}{t}\right)^{\frac{1}{c_2}\ln\eta(c_{10}t)}\right\}\leqslant e^{\frac{1}{c_2}c_2\ln\eta(c_{10}t_r)}\leqslant\eta(c_{17}r).\qquad(22)$$

Отже, із (19), враховуючи (18), (20) та (22), знаходимо, що для декої сталої c_{18}

$$\ln|G(z)|\leqslant c_{18}\eta(c_{18}r),\quad z=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+,$$

а збіжність добутку (14) випливає із (15), (16) і проведених вище викладок. Позначимо

$$F(z)=G_1(z)\cdot G(z),\qquad(23)$$

де $G_1(z)=\prod_{|\lambda_n|\leqslant 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n}$. Із [14, с. 30] і (4) випливає, що добуток $G_1(z)$ збігається в $\mathbb{C}_+$ і $|G_1(z)|\leqslant 1$ при $z\in\mathbb{C}_+$. Тому, враховуючи (9), робимо висновок, що функція F належить до класу B_η і задовольняє умови теореми 1. Теорему 1 доведено.

2. Для доведення теореми 2 нам ще будуть потрібні наступні леми.

Лема 2. *Нехай μ_ζ — міра в замкненій півплощині $\overline{\mathbb{C}}_+$ і $\int_{\operatorname{Re}\zeta\geqslant 0} d\mu_\zeta = T$. Тоді існує така абсолютна стала* B, *що*

$$\int\limits_{\operatorname{Re}\zeta\geqslant 0} \frac{1}{\cos\theta} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z+\overline{\zeta}}\right| d\mu_\zeta > -BMT, \quad \zeta = \varrho e^{i\theta}$$

при всіх z, які не належать системі кругів K_n з радіусами γ_n і центрами в деяких точках λ_n, такими, що $\frac{1}{r}\sum_{|\lambda_n|\leqslant r}\gamma_n < \frac{1}{M}$.

Це твердження належить А. П. Гришину [16].

Лема 3. *Нехай послідовність точок λ_n із $\mathbb{C}_+$ задовольняє умови (4) і (5). Тоді існують сталі c_{19} і c_{20} такі, що для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, але поза системою кругів, верхня лінійна щільність якої не перевищує $\frac{1}{M}$, для функції F, визначеної рівністю (23), виконується*

$$|F(z)| > \exp(-Mc_{19}\eta(c_{20}|z|)). \tag{24}$$

Доведення. Очевидно для довільного R, $1 < R < +\infty$

$$F(z) = \prod_{|\lambda_n|\leqslant 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n} \cdot \prod_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R} \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n} \times$$
$$\times \prod_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p_n} \frac{z^j}{j}\left(\frac{1}{{\lambda_n}^j} + \frac{(-1)^{j+1}}{{\overline{\lambda}_n}^j}\right)\right\} \prod_{|\lambda_n|>2R} W_n(z) = \pi_1\cdot\pi_2\cdot\pi_3\cdot\pi_4.$$

Оцінимо $|F(z)|$ в крузі $|z| = r \leqslant R$, $1 < R < +\infty$. Оскільки при $|z| \geqslant 3$ і $|\lambda_n| \leqslant 1$

$$\left|\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right| = \left|1 - \frac{2\operatorname{Re}\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right| \geqslant 1 - \frac{2\operatorname{Re}\lambda_n}{|z|-|\lambda_n|} \geqslant 1 - \operatorname{Re}\lambda_n.$$

Тому, при $|z| \geqslant 3$ маємо

$$\ln|F(z)| \geqslant \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R} \ln\left|\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right| - |\ln|\pi_3|| - |\ln|\pi_4|| - c_{21}.$$

Відмітимо, що

$$|\ln|\pi_3|| \leqslant 2 \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R} \left(\frac{2R}{|\lambda_n|}\right)^{p_n} \cos\varphi_n,$$

і завдяки (16)

$$|\ln|\pi_4|| \leqslant |\ln\pi_4| \leqslant \sum_{|\lambda_n|>2R} |\ln W_n(z)| \leqslant 4 \sum_{|\lambda_n|>2R} \left(\frac{|z|}{|\lambda_n|}\right)^{p_n+1} \cos\varphi_n.$$

Тому, аналогічно як і при доведенні достатньої частини теореми 1, отримуємо, що для всіх $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+,\ r \leqslant R$

$$\ln|F(z)| \geqslant \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R} \ln\left|\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right| - \eta(c_{22}R) - \eta(c_{23}r) - c_{21} \geqslant \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R} \ln\left|\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right| - \eta(c_{24}R).$$

Визначимо міру $\mu_\zeta = \mu_\zeta(D)$ множини $D \subset \overline{\mathbb{C}}_+$ рівністю $\mu_\zeta(D) = \sum\limits_{\substack{\lambda_n \in D\\ 1<|\lambda_n|\leqslant 2R}} \cos\varphi_n$.

Оскільки $\mu_\zeta(\overline{\mathbb{C}}_+) = s(2R)$ і

$$\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R} \ln\left|\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right| = \int_{\overline{\mathbb{C}}_+} \frac{1}{\cos\theta} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z+\overline{\zeta}}\right| d\mu_\zeta,\ \zeta = \varrho e^{i\theta},$$

то із леми 2 випливає, що нерівність

$$\ln|F(z)| \geqslant -M_1 c_{25} s(2R) - \eta(c_{24}R) \tag{25}$$

виконується в $\mathbb{C}_+$ поза такими винятковими кругами K_n з радіусами γ_n і центрами в точках λ_n, що $\frac{1}{2R}\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant 2R}\gamma_n < \frac{1}{M_1}$. При цьому виняткові круги залежать від R. Покажемо, що можна позбутися цієї залежності (це, фактично, доведено в [4]). Виберемо послідовність $R_i = 2^i,\ i \in \mathbb{N}\cup 0$. Побудуємо в півкрузі $\{z : |z| \leqslant R_i, \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ відповідну систему кругів $K_n^{(i)}$. Через K_n позначимо систему кругів $K_n^{(i)}$, центри яких попали в півкільце $\{z : R_{i-1} \leqslant |z| < R_i, \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$. Переконаємося в тому, що K_n є шуканою системою кругів. Справді, для довільного R існує таке i, що $R_i \leqslant R < R_{i+1}$ і

$$\frac{1}{R}\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant R}\gamma_n = \frac{1}{R}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{R_j<|\lambda_n|\leqslant R_{j+1}}\gamma_n^{(j+1)} + \frac{1}{R}\sum_{R_i<|\lambda_n|\leqslant R}\gamma_n^{(i+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R_i}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{R_j<|\lambda_n|\leqslant R_{j+1}}\gamma_n^{(j+1)} + \frac{1}{R}\sum_{R_i<|\lambda_n|\leqslant R}\gamma_n^{(i+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{R_{i-j-1}}\frac{1}{R_{j+1}}\sum_{R_j<|\lambda_n|\leqslant R_{j+1}}\gamma_n^{(j+1)} + \frac{2}{2R_i}\sum_{R_i<|\lambda_n|\leqslant R}\gamma_n^{(i+1)} \leqslant \frac{1}{M_1}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{2^j} + \frac{2}{M_1} \leqslant \frac{2}{M_1}.$$

Покладемо $M = M_1/4$. Тоді із (25), враховуючи (11), отримуємо, що $(\forall R)$ $(\forall z \in \mathbb{C}_+ : |z| \leqslant R)$: $\ln|F(z)| \geqslant -Mc_{19}\eta(c_{20}R)$ поза системою кругів, верхня лінійна щільність якої не перевищує $\frac{1}{M}$. Звідси випливає твердження леми.

Лема 3.1. *Нехай виконуються умови (4) і (5). Тоді для функції F, визначеної рівністю (23), на деяких півколах $D_k = \{z : |z| = r_k, \operatorname{Re} z > 0\}, r_k \to +\infty, r_k < \alpha r_{k-1}, 1 < \alpha < +\infty$, для декої сталої c_{26} виконується*

$$|F(z)| > \exp(-c_{26}\eta(c_{26}|z|)).$$

Доведення. Візьмемо послідовність чисел $R_1 > 0$, $R_2 = \alpha_1 R_1, \ldots, R_k = \alpha_1 R_{k-1}, \ldots$, $\alpha_1 = \sqrt{\alpha}$, $1 < \alpha < +\infty$. Із леми 3 випливає, що в кожному півкрузі $\{z : |z| \leqslant R_k, \operatorname{Re} z > 0\}$ виконується

$$|F(z)| > \exp(-Mc_{19}\eta(c_{20}|z|)) \tag{26}$$

поза системою кругів K_n із радіусами γ_n, для якої $\sum_{|\lambda_n|\leqslant R_k}\gamma_n<\frac{1}{M}R_k$. Оскільки $R_k-R_{k-1}=\alpha_1R_{k-1}-R_{k-1}=(\alpha_1-1)R_{k-1}$, то, взявши $M>\alpha_1/(\alpha_1-1)$, матимемо $\frac{1}{M}R_k=\frac{\alpha_1}{M}R_{k-1}<(\alpha_1-1)R_{k-1}=R_k-R_{k-1}$, $k>1$. Тому існують півкола $D_k=\{z:|z|=r_k,\mathrm{Re}\,z>0\}, R_{k-1}<r_k<R_k$, які не перетинаються з винятковими кругами і на яких виконується (26). Залишилося відмітити, що $r_{k+1}/r_k<R_{k+1}/R_{k-1}==\alpha_1{}^2=\alpha$. Лему 3.1 доведено.

Лема 4 [14, с.22]. *Нехай функція f, аналітична і обмежена в півкрузі $Q_{R'}=\{z:|z|<R',\ \mathrm{Re}\,z>0\}$. Тоді при $z=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+, 0<R<R'$, справедлива формула*

$$\ln|f(z)|=-\sum_{\zeta_k\in Q_R}\ln\left|\frac{R^2-z\overline{\zeta}_k}{R(z-\zeta_k)}\cdot\frac{R(z+\overline{\zeta}_k)}{R^2+z\zeta_k}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}-\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{-i\theta}+z|^2}\right)\ln|f(Re^{i\theta})|\,d\theta+ \qquad (27)$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{r\cos\varphi}{|t+iz|^2}-\frac{R^2r\cos\varphi}{|R^2+itz|^2}\right)\ln|f(it)|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{r\cos\varphi}{|t+iz|^2}-\frac{R^2r\cos\varphi}{|R^2+itz|^2}\right)dh(t),$$

де ζ_k — нулі функції f, h — незростаюча обмежена функція на $[-R,R]$, для якої майже скрізь $h'(t)=0$, а $f(it)$ — кутові граничні значення f на $[-iR,iR]$. Функція $h(t)$ може бути виражена через функцію $f(z)$ з точністю до адитивної сталої наступним чином:

$$h(t_1)-h(t_2)=\lim_{x\to0}\int_{t_1}^{t_2}\ln|f(x+iy)|\,dy-\int_{t_1}^{t_2}\ln|f(iy)|\,dy,$$

де $t_1<t_2$ — точки неперервності $h(t)$. Функцію $h(t)$ називають сингулярною граничною функцією.

Зауваження. Формула (27) залишається справедливою для функцій f, які подаються у вигляді $f=f_1/f_2$, якщо кожна із функцій f_1 і f_2 задовольняє умови леми 4 і сингулярна гранична функція функції f_2 дорівнює нулеві.

Лема 5. *Нехай послідовність (λ_n) задовольняє умову (7). Тоді для деякої сталої c_{27}*

$$\sup_n\left\{\frac{1}{\eta(c_{27}|\lambda_n|)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\lambda_n\,\mathrm{Re}\,\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}}\right\}<+\infty, \qquad (28)$$

де $q_k=\left[\eta(c_{27}|\lambda_k|)/\ln\sqrt{1+|\lambda_k|^2}\right]$

Доведення цієї леми подібне до доведення леми 4.1 із [9]. Покажемо спочатку, що

$$(\exists c_{28})\ :\ \sup_n\left\{\frac{1}{\eta(c_{28}|\lambda_n|)}\sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n\\|\lambda_k|\leqslant2|\lambda_n|+1}}\ln\left|\frac{\lambda_n+\overline{\lambda}_k}{\lambda_n-\lambda_k}\right|\right\}<+\infty, \qquad (29)$$

Запишемо для функції F формулу (27) в півкрузі $Q_{R_n}=\{z:|z|<R_n,\mathrm{Re}\,z>0\}$, де $R_n=2\,(2|\lambda_n|+1)$, при $z=\lambda_n$. Враховуючи, що

$$\int_{-R_n}^{R_n}\left(\frac{r\cos\varphi}{|t+iz|^2}-\frac{{R_n}^2r\cos\varphi}{|{R_n}^2+itz|^2}\right)dh(t)\leqslant0,$$

отримуємо

$$\ln 2+\sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n\\ \lambda_k\in Q_{R_n}}}\ln\left|\frac{\lambda_n+\overline{\lambda}_k}{\lambda_n-\lambda_k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\partial Q_{R_n}}\frac{\partial G_{R_n}(\xi,\lambda_n)}{\partial n_\xi}\ln|F(\xi)||d\xi|+\ln\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_n|F'(\lambda_n)|}+\sum_{\lambda_k\in Q_{R_n}}\ln\left|\frac{{R_n}^2+\lambda_n\lambda_k}{{R_n}^2-\lambda_n\overline{\lambda}_k}\right|, \tag{30}$$

де $G_R(\xi,z)$ — функція Гріна півкруга Q_R, $\frac{\partial G_R}{\partial n_\xi}$ — її похідна по внутрішній нормалі до межі півкруга. Оскільки [13, с. 12] $\frac{\partial G_R}{\partial n_\xi}\geqslant 0$, $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q_R}\frac{\partial G_R(\xi,\lambda_n)}{\partial n_\xi}|d\xi|=1$, то, враховуючи належність F до класу B_η, одержуємо

$$\int_{\partial Q_{R_n}}\frac{\partial G_{R_n}(\xi,\lambda_n)}{\partial n_\xi}\ln|F(\xi)||d\xi|\leqslant c_{29}\eta(c_{29}|\lambda_n|). \tag{31}$$

Оцінимо суму, що стоїть в правій частині нерівності (30). Враховуючи (4) і (11), отримуємо

$$\sum_{\lambda_k\in Q_{R_n}}\ln\left|\frac{{R_n}^2+\lambda_n\lambda_k}{{R_n}^2-\lambda_n\overline{\lambda}_k}\right|=\sum_{\lambda_k\in Q_{R_n}}\ln\left|1-\frac{\lambda_n\lambda_k+\lambda_n\overline{\lambda}_k}{{R_n}^2-\lambda_n\overline{\lambda}_k}\right|\leqslant\sum_{\lambda_k\in Q_{R_n}}\frac{2|\lambda_n|\operatorname{Re}\lambda_k}{{R_n}^2-|\lambda_n\lambda_k|}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\lambda_k\in Q_{R_n}}\frac{2\operatorname{Re}\lambda_k}{R_n}\leqslant\sum_{|\lambda_k|\leqslant 1}2\operatorname{Re}\lambda_k+\sum_{\substack{\lambda_k\in Q_{R_n}\\ |\lambda_k|>1}}\frac{2\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|}\leqslant c_{30}\eta(c_{30}|\lambda_n|). \tag{32}$$

Тому нерівність (29) випливає із (30), (31), (32) і (7). Далі, із тотожності $\left|\frac{a-b}{\overline{a}+b}\right|=1-\frac{\operatorname{Re}a\operatorname{Re}b}{|\overline{a}+b|^2}$, нерівності $x\leqslant-\ln(1-x)$, $0\leqslant x<1$, і (29) одержуємо

$$\sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n\\ |\lambda_k|\leqslant 2|\lambda_n|+1}}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2}\leqslant c_{31}\eta(c_{31}|\lambda_n|). \tag{33}$$

Крім цього, із (4) і (11) маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}}<+\infty. \tag{34}$$

Справді,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{\eta(c_{27}|\lambda_k|)/\ln\sqrt{1+|\lambda_k|^2}-2}}\leqslant$$

$$\leqslant c_{32}++\int_1^{+\infty}\frac{ds(t)}{(1+t^2)^{\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3}}=$$

$$=c_{32}+\left.\frac{s(t)}{(1+t^2)^{\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3}}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{s(t)d((\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3)\ln(1+t^2)}{e^{(\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3)\ln(1+t^2)}}\leqslant$$

$$\leqslant c_{33}+\int_1^{+\infty}\frac{\eta(c_{10}t)d((\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3)\ln(1+t^2))}{e^{(\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3)\ln(1+t^2)}}\leqslant$$

$$\leqslant c_{33}+c_{34}\int_1^{+\infty}\frac{d(\frac{1}{2}(\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3)\ln(1+t^2))}{e^{\frac{1}{2}(\eta(c_{27}t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3)\ln(1+t^2)}}<+\infty.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n \operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}} = \frac{1}{4(1+|\lambda_n|^2)^{q_n-1}} + \sum_{k\neq n} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n \operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}} =$$

$$= \frac{1}{4(1+|\lambda_n|^2)^{q_n-1}} + \sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n \\ |\lambda_k|\leqslant 2|\lambda_n|+1}} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n \operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}} +$$

$$+ \sum_{|\lambda_k|>2|\lambda_n|+1} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n \operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4(1+|\lambda_n|^2)^{q_n-1}} + \sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n \\ |\lambda_k|\leqslant 2|\lambda_n|+1}} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n \operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2} + \sum_{|\lambda_k|>2|\lambda_n|+1} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n \operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}}. \tag{35}$$

Отже, висновок леми отримуємо із (33), (34) і (35). Лему 5 доведено.

Доведення теореми 2. Спочатку доведемо необхідність умов (4) і (5). Припустимо, що для довільної послідовності (b_n), яка задовольняє умову (3), існує функція $g \in B_\eta$ така, що $g(\lambda_n) = b_n$, зокрема знайдеться $g \in B_\eta$, для якої справедливі рівності $f(\lambda_1) = 1$, $f(\lambda_n) = 0, n = 2, 3, \ldots$. Функція $f_\Lambda = (z-\lambda_1)f(z) \not\equiv 0$ має нулі в усіх точках λ_n і належить до класу B_η. Тому за теоремою 1 виконуються умови (4) і (5). Доведемо тепер необхідність умови (7) від супротивного. Припустимо, що для кожної сталої c_5 і кожної функції $F \in B_\eta$, яка має прості нулі в точках λ_n, умова (7) не виконується. Візьмемо в ролі F функцію, визначену рівністю (23). Тоді для цієї функції F

$$(\forall c_5): \ \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\eta(c_5|\lambda_n|)} \ln \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_n |F'(\lambda_n)|} = +\infty.$$

Тому існує підпослідовність (ν_n) послідовності (λ_n), для якої

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \ \frac{1}{\eta(n|\nu_n|)} \ln \frac{1}{\operatorname{Re}\nu_n |F'(\nu_n)|} > n, \tag{36}$$

при цьому [17, с. 290] підпослідовність (ν_n) можна вибрати так, щоб добуток

$$H(z) = \prod_{|\nu_n|\leqslant 1} \frac{z-\nu_n}{z+\overline{\nu}_n} \prod_{|\nu_n|>1} \frac{1-z/\nu_n}{1+z/\overline{\nu}_n}$$

збігався і

$$|\operatorname{Re}\nu_n H'(\nu_n)| \geqslant c_{35} > 0. \tag{37}$$

Нехай f — функція із класу B_η така, що $f(\lambda_n) = 0$, $\lambda_n \notin \{\nu_n\}$, $f(\nu_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $\Omega(z) = \frac{f(z)\cdot H(z)}{F(z)}$. Функція $\Omega(z)$ є аналітичною в $\mathbb{C}_+$. Покажемо, що вона належить до класу B_η. Нехай r_k — послідовність із леми 3.1. Тоді $(\forall z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+)$ $(\exists m \in \mathbb{N}) : r_m \leqslant r < r_{m+1}$. Із зауваження до леми 4, отримуємо

$$\ln|\Omega(re^{i\varphi})| = -\sum_{\omega_k\in Q_{r_{m+2}}} \ln\left| \frac{r_{m+2}^2 - z\overline{\omega}_k}{r_{m+2}(z-\omega_k)} \cdot \frac{r_{m+2}(z+\overline{\omega}_k)}{r_{m+2}^2 + z\omega_k} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r_{m+2}^2 - r^2}{|r_{m+2}e^{i\theta} - re^{i\varphi}|^2} - \frac{r_{m+2}^2 - r^2}{|r_{m+2}e^{-i\theta} + re^{i\varphi}|^2} \right) \ln|\Omega(r_{m+2}e^{i\theta})|\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-r_{m+2}}^{r_{m+2}} \left(\frac{r\cos\varphi}{|t+ire^{i\varphi}|^2} - \frac{r_{m+2}^2 r\cos\varphi}{|r_{m+2}^2 + itre^{i\varphi}|^2} \right) (\ln|f(it)|\, dt + dh(t), \tag{38}$$

де ω_k — нулі функції f, відмінні від $\lambda_k \notin \{\nu_k\}$, а $h(t)$ — сингулярна гранична функція для функції $f(z)$, оскільки $|F(it)| = 1$, $|H(it)| = 1$ майже скрізь, а сингулярні граничні функції для $F(z)$ і $H(z)$ дорівнюють нулеві. Оскільки із леми 3.1 отримуємо, що для деякої сталої c_{26} $\ln \frac{1}{|F(r_{m+2}e^{i\theta})|} \leqslant c_{26}\eta(c_{26}r_{m+2})$ і $|H(r_{m+2}e^{i\theta})| \leqslant 1$, то $\ln|\Omega(r_{m+2}e^{i\theta})| \leqslant \ln|f(r_{m+2}e^{i\theta})| + c_{26}\eta(c_{26}r_{m+2})$. Тому, враховуючи належність f до класу B_η, незростання функції h і умову [13, с. 12]

$$\sum_{\omega_k \in Q_{r_{m+2}}} \ln\left|\frac{r_{m+2}^2 - z\overline{\omega}_k}{r_{m+2}(z-\omega_k)} \cdot \frac{r_{m+2}(z+\overline{\omega}_k)}{r_{m+2}^2 + z\omega_k}\right| \geqslant 0, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

із (38) отримуємо, що $\Omega(z) \in B_\eta$. Далі, враховуючи рівність $f(\lambda_n) = 1$, одержуємо

$$\frac{1}{F'(\nu_n)} = \frac{\Omega(\nu_n)}{H'(\nu_n)}. \tag{39}$$

Крім цього, із (39) та (37) отримуємо

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}): \ \frac{1}{\operatorname{Re}\nu_n |F'(\nu_n)|} \leqslant n_0 \exp(\eta(n_0|\nu_n|)), \tag{40}$$

що суперечить (36). Необхідність доведено.

Доведення достатності проводиться, як і в [9], модифікованим методом Джонса [18]. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = 0$, то перенумерувавши, якщо це потрібно, точки λ_n можна вважати, що

$$\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} \geqslant \frac{\operatorname{Re}\lambda_{n+1}}{1+|\lambda_{n+1}|^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Нехай

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1+\overline{\lambda}_k z}{\overline{\lambda}_k + z} \cdot \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}}.$$

Цей ряд збігається рівномірно в кожній області $\{z : |z| \leqslant R, \operatorname{Re} z \geqslant \delta > 0\}$, бо використовуючи нерівність $1 + xy \leqslant \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$, одержуємо

$$\left|\frac{1+\overline{\lambda}_k z}{\overline{\lambda}_k + z}\right| \cdot \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}} \leqslant \frac{\sqrt{1+R^2}}{\delta} \cdot \frac{\sqrt{1+|\lambda_k|^2}\operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}}.$$

Далі ($n \in \mathbb{N}$)

$$\operatorname{Re}\alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\operatorname{Re}\lambda_k + \operatorname{Re} z + |\lambda_k|^2 \operatorname{Re} z + |z|^2 \operatorname{Re}\lambda_k\right) \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}|z+\overline{\lambda}_k|^2}. \tag{42}$$

Враховуючи (41) і (28), знаходимо

$$\operatorname{Re}\alpha_n(\lambda_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} + \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}\right)(1+|\lambda_k|^2)(1+|\lambda_n|^2)\times$$

$$\times \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}} \leqslant 2\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n \operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k-1}} \leqslant c_{41}\eta(c_{41}|\lambda_n|). \tag{43}$$

Крім цього, із (41) одержуємо

$$\operatorname{Re}\alpha_n(z) \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re}\lambda_k)^2}{|\lambda_n+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}}. \tag{44}$$

Покажемо, що ряд

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_nF(z)\varphi_n(z)}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}, \tag{45}$$

де

$$\varphi_n(z)=\left(\frac{1+z\overline{\lambda}_n}{1+|\lambda_n|^2}\right)^{s_n+2q_n}\cdot\left(\frac{2\operatorname{Re}\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right)\exp\{\alpha_n(\lambda_n)-\alpha_n(z)\},$$

розв'язує інтерполяційну задачу $f(\lambda_n)=b_n,\ n\in\mathbb{N}$. Послідовність натуральних чисел $\{s_n\}$ виберемо нижче. Відмітимо, що $\varphi_n(\lambda_n)=1,\ n\in\mathbb{N}$, і тому $f(\lambda_n)=b_n,\ n\in\mathbb{N}$. Крім цього, використовуючи нерівність $1+xy\leqslant\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$, отримуємо

$$\left|\frac{1+\overline{\lambda}_kz}{1+|\lambda_n|^2}\right|\leqslant\frac{1+|\lambda_n||z|}{1+|\lambda_n|^2}\leqslant\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Звідси одержуємо

$$|\varphi_n(z)|\leqslant 4\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n+2q_n}\cdot\frac{(\operatorname{Re}\lambda_n)^2}{|z+\overline{\lambda}_n|^2}\exp\{\operatorname{Re}(\alpha_n(\lambda_n)-\alpha_n(z))\}. \tag{46}$$

Із (3) і (7) випливає, що

$$\frac{b_n}{|F'(\lambda_n)|}\leqslant c_1\operatorname{Re}\lambda_n\exp(\eta(c_2|\lambda_n|)). \tag{47}$$

При $|z-\lambda_n|\geqslant\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{2}$ маємо

$$\left|\frac{F(z)}{z-\lambda_n}\right|\leqslant\frac{2|F(z)|}{\operatorname{Re}\lambda_n}\leqslant\frac{c_{42}}{\operatorname{Re}\lambda_n}\exp(\eta(c_{42}|z|)).$$

При $|z-\lambda_n|<\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{2}$, використовуючи принцип максимума, одержуємо

$$\left|\frac{F(z)}{z-\lambda_n}\right|\leqslant\max_{|t-\lambda_n|=\operatorname{Re}\lambda_n/2}\left\{\left|\frac{F(t)}{t-\lambda_n}\right|\right\}\leqslant\frac{c_{42}}{\operatorname{Re}\lambda_n}\exp(\eta(c_{42}(|z|+1))).$$

Отже, ми отримали, що для деякої сталої c_{42}

$$\left|\frac{F(z)}{z-\lambda_n}\right|\leqslant\frac{2|F(z)|}{\operatorname{Re}\lambda_n}\leqslant\frac{c_{42}}{\operatorname{Re}\lambda_n}\exp(\eta(c_{42}(|z|+1))), z\in\mathbb{C}_+, n\in\mathbb{N}. \tag{48}$$

Із (46), (47) і (48), враховуючи (43) та (44), отримуємо

$$\begin{aligned}|\Phi_n(z)|:=\left|\frac{b_nF(z)\varphi_n(z)}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}\right|&\leqslant c_{43}\exp(\eta(c_2(|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1)))\times\\ \times 4\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n+2q_n}&\cdot\frac{(\operatorname{Re}\lambda_n)^2}{|z+\overline{\lambda}_n|^2}\exp\{\operatorname{Re}(\alpha_n(\lambda_n)-\alpha_n(z))\}\leqslant\\ \leqslant c_{43}\exp(\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1)))4&\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n}(\sqrt{1+|z|^2})^{2q_n}\times\\ \times\frac{(\operatorname{Re}\lambda_n)^2}{|z+\overline{\lambda}_n|^2(1+|\lambda_n|^2)^{q_n}}&\exp\left\{-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\operatorname{Re}\lambda_k)^2}{|z+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}}\right\}.\end{aligned} \tag{49}$$

Позначимо

$$\varkappa_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\operatorname{Re}\lambda_k)^2}{|z+\overline{\lambda}_k|^2(1+|\lambda_k|^2)^{q_k}}.$$

Очевидно, $\varkappa_n(z)-\varkappa_{n+1}(z)=\frac{(\operatorname{Re}\lambda_n)^2}{|z+\overline{\lambda}_n|^2(1+|\lambda_n|^2)^{q_n}}$. Крім цього, $\varkappa_n(z)\to 0$ при $n\to\infty$ рівномірно на компактах із $\mathbb{C}_+$. Тому із (48) знаходимо

$$|\Phi_n(z)|\leqslant c_{43}\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))\right\}\exp(-\varkappa_n(z))\times$$
$$\times\left(\varkappa_n(z)-\varkappa_{n+1}(z)\right)\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n}\left(\sqrt{1+|z|^2}\right)^{2q_n}.$$

Використовуючи нерівність $t\leqslant e^t-1,\ t\geqslant 0$, при $t=\varkappa_n(z)-\varkappa_{n+1}(z)$, одержуємо

$$|\Phi_n(z)|\leqslant c_{43}\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))\right\}\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n}\times$$
$$\times\left(\sqrt{1+|z|^2}\right)^{2q_n}\cdot\left\{\exp(-\varkappa_{n+1}(z))-\exp(-\varkappa_n(z))\right\}. \quad (50)$$

Розглянемо тепер два випадки: нехай $\sqrt{1+|\lambda_n|^2}\geqslant e\sqrt{1+|z|^2}$. Тоді

$$\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))\right\}\left(\sqrt{1+|z|^2}\right)^{2q_n}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta(c_2(|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))+2\frac{\eta(c_{27}|\lambda_n|)}{\ln\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\ln\sqrt{1+|z|^2}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))+2\frac{\eta(c_{27}|\lambda_n|)}{\ln\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\ln\frac{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}{e}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta(c_{44}|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))\right\};$$

якщо ж $\sqrt{1+|\lambda_n|^2}<e\sqrt{1+|z|^2}$, то

$$\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))\right\}\left(\sqrt{1+|z|^2}\right)^{2q_n}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))+2\frac{\eta(c_{27}|\lambda_n|)}{\ln\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\ln\sqrt{1+|z|^2}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{42}(|z|+1))+2\frac{\eta(c_{27}e\sqrt{1+|z|^2})}{\ln(e\sqrt{1+|z|^2})}\ln\sqrt{1+|z|^2}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta(c_2|\lambda_n|)+\eta(c_{45}(|z|+1))\right\}.$$

Отже, ми отримали, що для деяких сталих c_{44} і c_{45}

$$|\Phi_n(z)|\leqslant c_{43}\exp\left\{\eta(c_{44}|\lambda_n|)+\eta(c_{45}(|z|+1))\right\}\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n}\times$$
$$\times\left\{\exp(-\varkappa_{n+1}(z))-\exp(-\varkappa_n(z))\right\}. \quad (51)$$

Нехай $s_n = [\eta(c_{44}|\lambda_n|)]$. Тоді в першому випадку

$$\exp\{\eta(c_{44}|\lambda_n|)\}\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n} \leqslant \exp\{\eta(c_{45}|\lambda_n|)-\eta(c_{45}|\lambda_n|)+1\} = e. \quad (52)$$

Розглянемо другий випадок. Оскільки функція η є зростаючою, то для деякої сталої c_{46}

$$\exp\{\eta(c_{44}|\lambda_n|)\} \leqslant \exp\{\eta(c_{46}|z|)\}. \quad (53)$$

Тому, аналогічно, як і при доведенні достатньої частини теореми 1, отримуємо

$$\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{s_n} \leqslant \left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\eta(c_{44}|\lambda_n|)} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\geqslant 0}\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|t|^2}}\right)^{\eta(c_{44}|t|)} \leqslant \exp\{\eta(c_{47}(|z|+1))\}. \quad (54)$$

Отже, із (51), враховуючи (52), (53) і (54), знаходимо, що для деякої сталої c_{48}

$$|\Phi_n(z)| \leqslant c_{48}\exp\{\eta(c_{48}(|z|+1))\}\{\exp(-\kappa_{n+1}(z)) - \exp(-\kappa_n(z))\}.$$

Тому отримуємо, що для довільного $m \in \mathbb{N},\ m > 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n F(z)\varphi_n(z)}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m}|\Phi_n(z)| \leqslant$$
$$\leqslant c_{48}\exp\{\eta(c_{48}(|z|+1))\}\{\exp(-\kappa_{m+1}(z)) - \exp(-\kappa_1(z))\} \leqslant c_{49}\exp\{\eta(c_{49}(|z|+1))\}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність ряду (45) на компактах із $\mathbb{C}_+$ і належність f до класу B_η. Теорему 2 доведено.

Автор вдячний проф. Б.В. Винницькому за постановку задачі.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Carleson L., *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.

[2] Трошин Г.Д., *Об интерполировании функций, аналитических в угле*, Матем. сб. **39** (**81**) (1970), 239–252.

[3] Левин Б.Я., Уен Н.Т., *Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка*, Теория функций, функциональный анализ и их прил. **22** (1975), 77–85.

[4] Уен Н.Т., *Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа*, Теория функций, функциональный анализ и их прил. **24** (1975), 106–127.

[5] Уен Н.Т., *Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка*, Теория функций, функциональный анализ и их прил. **29** (1978), 109–117.

[6] Уен Н.Т., *Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа*, Теория функций, функциональный анализ и их прил. **31** (1979), 119–129.

[7] Малютін К.Г., *Інтерполяція правильних множин у верхній півплощині*, Доповіді АН УРСР **5** (1981), 16–19.

[8] Малютин К.Г., *Интерполирование в полуплоскости обобщёнными произведениями*, Теория функций, функциональный анализ и их прил. **45** (1986), 84–96.

[9] Малютин К.Г., *Интерполяция функциями конечного порядка в полуплоскости:* Дисс. ... докт. физ.-мат. наук, Суми, 1986, pp. 217.

[10] Абанина Т.И., *Интерполяционная задача в пространствах целых функций сколь угодно быстрого роста*, Деп. ВИНИТИ, № 5440–88, Москва, 1988, pp. 45.

[11] Абанина Т.И., *Интерполяционная задача в пространствах целых функций сколь угодно быстрого роста*, Изв. вузов, сер. математика **4** (1990), 72–74.

[12] Винницкий Б.В., *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент*, Укр. мат. ж. **45** (1994), №2, 484–500.

[13] Гольдберг А.А., Островский И.И., *Распределение значений мероморфных функций*, Москва, Наука, 1970.

[14] Говоров Н.В., *Краевая задача Римана с бесконечним индексом*, Москва, Наука, 1986.

[15] Привалов И.И., *Граничные свойства аналитических функций.*, М;Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.

[16] Гришин А.Ф., *О регулярности роста субгармонических функций, III*, Теория функций, функциональный анализ и их прил. **7** (1968), 59–84.

[17] Гофман К., *Банаховы пространства аналитических функций.*, М.: ИЛ, 1963.

[18] Jones P., *Carleson measures and the Fefferman-Stein decomposition of BMO*($\mathbb{R}$), Ann. Math. **111** (1980), 197–208.

Дрогобицький державний педінститут ім. І. Франка, фізико–математичний факультет,

293720, Львівська обл, м.Дрогобич, вул Стрийська, 3

Надійшло 11.12.1997