УДК 512.64

СТРУКТУРА ТА ВЛАСТИВОСТІ ДІЛЬНИКІВ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

В.П. Щедрик

V. Shchedryk. *Structure and properties of divisors of matrices over commutative elementary divisors domain*, Matematychni Studii, **10**(1998) 115–120.

Constructive criteria of divisibility and associativity of rectangular matrices over commutative elementary divisor domain are proposed. On this base, the explicit form for all non-associated divisors which have a prescribed Smith normal form (S.n.f.) is indicated. The relation between S.n.f. for matrix and S.n.f. for its divisors is established. The uniquness theorem is proved.

В.П. Щедрик. *Структура и свойства делителей матриц над коммутативной областью элементарных делителей* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 2. – С.115–120.

Предложены конструктивные критерии делимости и ассоциированости прямоугольных матриц над коммутативной областью элементарных делителей. На этой базе указан явный вид всех неассоциированых делителей, которые имеют некоторую наперед заданную каноническую диагональную форму (к.д.ф.). Установлена связь между к.д.ф. матрицы и к.д.ф. ее делителей. Доказана теорема единственности.

Нехай R — комутативна область елементарних дільників [1], тобто комутативна область, над якою кожна $m \times n$ матриця A еквівалентна діагональній матриці $\Phi = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $r = \min(m, n)$, де $\alpha_i | \alpha_{i+1}$ (α_i ділить α_{i+1}) $i = 1, \dots, r-1$, яка називається канонічною діагональною формою (к.д.ф) матриці A. Будемо говорити, що матриця B асоційована справа до матриці A, якщо $B = AU$, де $U \in \mathrm{GL}_n(R)$.

Дана стаття присвячена пошуку всіх неасоційованих дільників матриць над R. В такій постановці ця задача вперше була розглянута в роботі [2] і стосувалася питання єдиності дільників неособливих матриць над комутативною областю головних ідеалів. Проте, ідеї, що були започатковані у цій роботі, не знайшли свого подальшого розвитку — основна увага дослідників була зосереджена на більш вузькі задачі пошуку регулярних дільників матриць над $\mathbb{C}[x]$ [3–5]. Проблема виділення регулярного множника із матриці над $\mathbb{C}[x]$ була розв'язана П.С. Казимірським [6], причому ним було вказано метод побудови неасоційованих дільників неособливих матриць. Пошуку неасоційованих дільників матриць над комутативною областю головних ідеалів також присвячені роботи [7–9].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A21.

В даній статті застосовано відмінний від запропонованого в [2] підхід для пошуку неасоційованих дільників матриць. Завдяки цьому вдалось вказати структуру всіх дільників, які мають наперед задану к.д.ф., поширити відомий результат про зв'язок між к.д.ф. неособливої матриці і к.д.ф. її дільників [10,11] на випадок довільних матриць. Також уточнено та поширено на особливі матриці результат роботи [2], що стосується єдиності дільника.

Надалі всюди під кільцем R розуміється комутативна область елементарних дільників. Введемо наступні позначення: $U(R)$ — група оборотних елементів кільця R, $M_{m\times n}(R)$ і $M_n(R)$ — відповідно множини $m \times n$ і $n \times n$ матриць над R, (a, b) — найбільший спільний дільник елементів a і b.

Нехай $A \in M_{m\times n}(R)$, $B \in M_{m\times p}(R)$. Тоді знайдуться такі перетворювальні матриці $P_A, P_B \in \mathrm{GL}_m(R)$, $Q_A \in \mathrm{GL}_n(R)$, $Q_B \in \mathrm{GL}_p(R)$, що $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}$, $B = P_B^{-1}\Psi Q_B^{-1}$, де Φ і Ψ к.д.ф. відповідно матриць A і B.

Теорема 1. *Для того щоб матриця B була лівим дільником матриці A, тобто $A = BC$, необхідно і досить, щоб матриця Ψ була лівим дільником матриці $(P_B P_A^{-1})\Phi$: $(P_B P_A^{-1})\Phi = \Psi S$.*

Доведення. Необхідність. Легко переконатись, що $P_B A = P_B(BC) = (P_B B)C = (\Psi Q_B^{-1})C = \Psi(Q_B^{-1}C)$. З іншого боку, $P_B A = (P_B P_A^{-1})(P_A A) = (P_B P_A^{-1})\Phi Q_A^{-1}$. Отже, $(P_B P_A^{-1})\Phi = \Psi S$, де $S = Q_B^{-1} C Q_A$.

Достатність. Оскільки $P_B A = P_B(P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}) = (P_B P_A^{-1})\Phi Q_A^{-1} = \Psi S Q_A^{-1}$, то $A = P_B^{-1}\Psi S Q_A^{-1} = (P_B^{-1}\Psi Q_B^{-1})(Q_B S Q_A^{-1}) = BC$, де $C = Q_B S Q_A^{-1}$. □

Наслідок 1. *Матриці $A = P_A^{-1}\Psi Q_A^{-1}$ і $B = P_B^{-1}\Psi Q_B^{-1}$ асоційовані справа тоді і тільки тоді, коли асоційованими справа є матриці $(P_B P_A^{-1})\Psi$ і Ψ: $(P_B P_A^{-1})\Psi = \Psi S$, $S \in \mathrm{GL}_p(R)$.* □

Таким чином, природно виникає необхідность введення і дослідження об'єктів

$$\mathbf{L}(\Phi, \Psi) = \{L \in \mathrm{GL}_m(R) \mid \exists S \in M_{p\times n}(R),\ L\Phi = \Psi S\},$$

$$G_\Psi = \{H \in \mathrm{GL}_m(R) \mid \exists S \in \mathrm{GL}_p(R),\ H\Psi = \Psi S\}.$$

Без особливих труднощів перевіряється справедливість наведених нижче властивостей цих множин.

Властивість 1. *G_Ψ є мультиплікативною групою.* □

Властивість 2. *Має місце рівність $G_\Psi \mathbf{L}(\Phi, \Psi) = \mathbf{L}(\Phi, \Psi)$.* □

Отримані результати застосуємо для описання усіх лівих дільників матриці A, які мають к.д.ф. Ψ, маючи при цьому на увазі, що пошук правих дільників матриці A зводиться до знаходження лівих дільників матриці A^T. З Теореми 1 випливає, що матриця B є лівим дільником матриці A тоді і тільки тоді, коли $P_B P_A^{-1} \in \mathbf{L}(\Phi, \Psi)$. Тобто кожна ліва перетворююча матриця P_B лівого дільника з к.д.ф. Ψ, має вигляд $P_B = LP_A$, де $L \in \mathbf{L}(\Phi, \Psi)$. Справедливим буде і обернене твердження. Тобто має місце наступне

Твердження. *Всі ліві дільники матриці $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}$ з к.д.ф. Ψ мають вигляд $(LP_A)^{-1}\Psi K$, де $L \in \mathbf{L}(\Phi, \Psi)$, $K \in \mathrm{GL}_p(R)$.* □

І отже, щоб розв'язати поставлену у вступі задачу досить серед всіх лівих дільників матриці A вибрати ті, що не є асоційованими справа. Згідно Наслідку 1, матриці є асоційованими справа тоді і тільки тоді, коли їхні ліві перетворюючі матриці відрізняються зліва на елемент групи G_Ψ. В зв'язку з цим виникає необхідність розглянути множину лівих суміжних класів множини $\mathbf{L}(\Phi, \Psi)$ по групі G_Ψ. Нехай $\mathbf{W}(\Phi, \Psi)$ — множина представників цих лівих суміжних класів.

Теорема 2. *Множина* $\big(\mathbf{W}(\Phi,\Psi)P_A\big)^{-1}\Psi$ *утворена всіма неасоційованими справа лівими дільниками матриці* A*, які мають к.д.ф.* Ψ*.* □

Тепер встановимо зв'язок між елементами матриць Φ і Ψ. Для цього нам буде потрібно наступний факт. Нехай $L = \|l_{ij}\|_1^m$ — деяка матриця з $M_m(R)$. На її елементах визначимо символ $\sigma_{ij}(L)$:

i) якщо підматриця
$$L_{ij} = \begin{Vmatrix} l_{i1} & \dots & l_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & \dots & l_{mj} \end{Vmatrix}$$
матриці L не є нульовою, то $\sigma_{ij}(L)$ дорівнює найбільшому спільному дільнику елементів матриці L_{ij};

ii) якщо $L_{ij} = \mathbf{0}$, то $\sigma_{ij}(L) = 0$.

Лема. *Виконуються наступні рівності* $\det L = \sigma_{ii}(L)l_i$, $l_i \in R$, $i = 1, \dots, m$. □

Доведення легко проводиться індукцією за порядком матриці.

Наслідок 2. *Якщо матриця* L *оборотна, то* $\sigma_{ii}(L) \in U(R)$, $i = 1, \dots, m$. □

Теорема 3. *Для того щоб з матриці* A*, яка має к.д.ф.* $\Phi = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$, $\alpha_k \neq 0$*, можна було виділити дільник з к.д.ф.* $\Psi = \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_t, 0, \dots, 0)$, $\beta_t \neq 0$*, необхідно і досить, щоб* $t \geq k$ *і* $\beta_i | \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$.

Доведення. Необхідність. Згідно Теореми 1, в $\mathrm{GL}_m(R)$ знайдеться така матриця $L = \|l_{ij}\|_1^m$, що $L\Phi = \Psi S$, $S = \|s_{ij}\|_1^{p,n} \in M_{p\times n}(R)$. Таким чином, має місце рівність
$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 l_{11} & \dots & \alpha_k l_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 l_{t1} & \dots & \alpha_k l_{tk} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 l_{t+1\,1} & \dots & \alpha_k l_{t+1\,k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 l_{m1} & \dots & \alpha_k l_{mk} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \beta_1 s_{11} & \dots & \beta_1 s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_t s_{t1} & \dots & \beta_t s_{tn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Звідси випливає, що
$$\begin{Vmatrix} l_{t+1\,1} & \dots & l_{t+1\,k} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{m1} & \dots & l_{mk} \end{Vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Тоді, згідно Наслідку 2, елемент l_{t+1k} повинен знаходитись під головною діагоналлю, тобто має виконуватись нерівність $t+1 > k$. Отже, $t \geq k$. З рівності (1) також випливає, що $\beta_i | \alpha_j l_{ij}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, k$. Однак α_i ділиться лише на (β_i, α_j). Тому елемент l_{ij} повинен ділитись на $\frac{\beta_i}{(\beta_i, \alpha_j)} = f_{ij}$, тобто $l_{ij} = f_{ij} l'_{ij}$. Таким чином, матриця L має такий вигляд:

$$L = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\beta_1}{(\beta_1,\alpha_1)} l'_{11} & \dots & \frac{\beta_1}{(\beta_1,\alpha_k)} l'_{1k} & l_{1\,k+1} & \dots & l_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\beta_t}{(\beta_t,\alpha_1)} l'_{t1} & \dots & \frac{\beta_t}{(\beta_t,\alpha_k)} l'_{tk} & l_{t\,k+1} & \dots & l_{tm} \\ 0 & \dots & 0 & l_{t+1\,k+1} & \dots & l_{t+1\,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & l_{t+1\,k+1} & \dots & l_{t+1\,m} \end{array} \right\|. \tag{2}$$

Зауваживши, що

$$f_{i+r\,j-l} = f_{ij} \frac{\left(\beta_{i+r}, \frac{\beta_{i+r}}{\beta_i}\alpha_j\right)}{(\beta_{i+r}, \alpha_{j-l})}, \quad l < j,$$

приходимо до висновку, що $f_{ij}|\sigma_{ij}(L)$. Тоді знову ж таки з Наслідку 2 випливає, що $f_{ii} \in U(R)$, $i = 1, \dots, k$. Тобто $\frac{\beta_i}{(\beta_i,\alpha_i)} \in U(R)$, $i = 1, \dots, k$. Це означає, що $\beta_i|\alpha_i$, $i = 1, \dots, k$.

Достатність. Якщо $\alpha_i = \beta_i\lambda_i$, $i = 1, \dots, k$, то $\Phi = \Psi\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$. Згадавши, що $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}$, маємо $A = (P_A^{-1}\Psi)\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)Q_A^{-1}\big)$, що і потрібно було довести. $\square$

Наслідок 3. *Множина* $\mathbf{L}(\Phi, \Psi)$ *складається з усіх оборотних матриць вигляду*

$$L = \left\| \begin{array}{cc} L_1 & * \\ L_2 & * \\ 0 & * \end{array} \right\|, \tag{3}$$

де

$$L_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} l_{11} & l_{12} & \dots & & l_{1\,k-1} & l_{1k} \\ \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} l_{21} & l_{22} & \dots & & l_{2\,k-1} & l_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\beta_k}{(\beta_k,\alpha_1)} l_{k1} & \dots & \dots & & \frac{\beta_k}{(\beta_k,\alpha_{k-1})} l_{k\,k-1} & l_{kk} \end{array} \right\|,$$

$$L_2 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\beta_{k+1}}{(\beta_{k+1},\alpha_1)} l_{k+1\,1} & \dots & \frac{\beta_{k+1}}{(\beta_{k+1},\alpha_k)} l_{k+1\,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\beta_t}{(\beta_t,\alpha_1)} l_{t1} & \dots & \frac{\beta_t}{(\beta_t,\alpha_k)} l_{tk} \end{array} \right\|.$$

Доведення. Як випливає із доведення Теореми 3, необхідною умовою виконання рівності $L\Phi = \Psi S$ є те, що $t \geq k$ і $\beta_i|\alpha_i$, $i = 1, \dots, k$, причому матриця L повинна мати вигляд (2). Зваживши тепер на той факт, що $\frac{\beta_i}{(\beta_i,\alpha_{i+j})} \in U(R)$, $j = 0, \dots, k-i$, приходимо до висновку, що на елементи $l_{i\,i+j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 0, \dots, k-i$, ніякі обмеження не накладаються. Отже, матриця L має вигляд (3).

Навпаки, якщо матриця L має вигляд (3), то буде виконуватись рівність $L\Phi = \Psi S$, де

$$S = \left\| \begin{matrix} M_1 & * \\ M_2 & * \\ 0 & * \end{matrix} \right\|,$$

$$M_1 = \left\| \begin{matrix} \frac{\alpha_1}{\beta_1} l_{11} & \frac{\alpha_2}{\beta_1} l_{12} & \cdots & \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_1} l_{1\,k-1} & \frac{\alpha_k}{\beta_1} l_{1k} \\ \frac{\alpha_1}{(\beta_2,\alpha_1)} l_{21} & \frac{\alpha_2}{\beta_2} l_{22} & \cdots & \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_2} l_{2\,k-1} & \frac{\alpha_k}{\beta_2} l_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha_1}{(\beta_k,\alpha_1)} l_{k1} & \cdots & \cdots & \frac{\alpha_{k-1}}{(\beta_k,\alpha_{k-1})} l_{k\,k-1} & \frac{\alpha_k}{\beta_k} l_{kk} \end{matrix} \right\|,$$

$$M_2 = \left\| \begin{matrix} \frac{\alpha_1}{(\beta_{k+1},\alpha_1)} l_{k+1\,1} & \cdots & \frac{\alpha_k}{(\beta_{k+1},\alpha_k)} l_{k+1\,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\alpha_1}{(\beta_t,\alpha_1)} l_{t1} & \cdots & \frac{\alpha_k}{(\beta_t,\alpha_k)} l_{tk} \end{matrix} \right\|. \quad \square$$

Скориставшись цим наслідком, ми можемо так переформулювати Теорему 1.

Теорема 4. *Для того щоб матриця $B = P_B^{-1}\Psi Q_B^{-1}$ була лівим дільником матриці $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1}$, тобто $A = BC$, необхідно і досить, щоб матриця $P_B P_A^{-1}$ мала вигляд (3).* $\square$

Наслідок 4. *Група G_Ψ складається з усіх оборотних матриць вигляду $L = \left\| \begin{smallmatrix} L_1 & * \\ \mathbf{0} & N \end{smallmatrix} \right\|$, де*

$$L_1 = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1\,t-1} & l_{1t} \\ \frac{\beta_2}{\beta_1} l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2\,t-1} & l_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\beta_t}{\beta_1} l_{t1} & \frac{\beta_t}{\beta_2} l_{t2} & \cdots & \frac{\beta_t}{\beta_{t-1}} l_{t\,t-1} & l_{tt} \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

$N \in \mathrm{GL}_{m-t}(R)$. $\square$

Доведення випливає із Наслідку 3.

Теорема 5. *Матриця A з к.д.ф. $\Phi = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_k \neq 0$, має лише один, з точністю до асоційованості, дільник з к.д.ф. $\Psi = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_t, 0, \ldots, 0)$, $\beta_t \neq 0$, тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*
i) $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \cdots = \beta_t$,
ii) $(\beta_t, \alpha_j) = \beta_j$, для всіх $j = 1, \ldots, t-1$, деякі α_j можуть бути нулями.

Доведення. Згідно Теореми 2 матриця A має лише один дільник тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{W}(\Phi, \Psi) = \{I\}$, тобто коли $\mathbf{L}(\Phi, \Psi) = G_\Psi$. Порівнявши структуру матриць із $\mathbf{L}(\Phi, \Psi)$ та G_Ψ (Наслідки 3 і 4), бачимо, що для виконання цієї рівності необхідно, щоб $\frac{\beta_{k+2}}{\beta_{k+1}}, \frac{\beta_{k+3}}{\beta_{k+2}}, \ldots, \frac{\beta_t}{\beta_{t-1}} \in U(R)$, тобто має виконуватись умова i), а також $\frac{\beta_i}{(\beta_i,\alpha_j)} = \frac{\beta_i}{\beta_j}$, $2 \le i \le t$, $j < i$. За умовою нашого твердження $(\beta_t, \alpha_j) = \beta_j$, $j = 1, \ldots, t-1$. І отже, для завершення доведення необхідно переконатись, що $(\beta_i, \alpha_j) = \beta_j$ для всіх $i < t$, $j < i$. Оскільки $\left(\frac{\beta_t}{\beta_j}, \frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = 1$, то $\left(\frac{\beta_i}{\beta_j}, \frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = 1$, $j < i < t$. Тому і $(\beta_i, \alpha_j) = \beta_j \left(\frac{\beta_i}{\beta_j}, \frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = \beta_j$. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V.66. – P.464–491.
2. Боревич З.И. *О факторизации матриц над кольцом главных идеалов* Тезисы сообщ. III Всесоюзн. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Тарту. – 1976. – С.19.
3. Лопатинский Я.Б. *Разложение полиномиальной матрицы на множители* Научн. зап. Львов. политех. ин-та, сер. физ.-мат. – 1957. – Т.38, №2. – С.3–7.
4. Малышев А.Н. *Факторизация матричных полиномов* Сиб. матем. ж. – 1982. – Т.23, №3. – С.136–146.
5. Gochberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. – New York: Academic Press, 1982. – 409p.
6. Казимирский П.С. *Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена* Укр. матем. ж. – 1980. – Т.32, №4. – С.483–498.
7. Щедрик В.П. *Нахождение делителей с одним инвариантным множителем для матриц над кольцом главных идеалов* Докдады АН УССР, Сер.А. – 1991. – №12. – С.12–14.
8. Shchedryk V.P. *Complete description of all divisors having one invariant factor for the matrices over principal ideal ring* Препринт №8-94, Львів, Ін-т прикл. пробл. мех. і матем. – 1994. – 34с.
9. Щедрик В.П. *Описання дільників, які мають канонічну діагональну форму* $\mathrm{diag}(1, \phi, \ldots, \phi)$ *для матриць над комутативною областю головних ідеалів* Доповіді НАН України, Сер.А. – 1995. – №9. – С.5–7.
10. Newman M. *On the Smith normal form* J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1971. – V.75. – P.81–84.
11. Забавский Б.В., Казимирский П.С. *Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований* Укр. матем. ж. – 1984. – Т.36, №2. – С.256–258.

Інститут прикладних проблем механіки і математики

Надійшло 8.02.1998
Після переробки 12.08.1998