УДК 539.3/517.7

ПРО ДЕЯКІ МЕРОМОРФНІ ФУНКЦІЇ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В.К. Опанасович

V.K. Opanasovych. *On some meromorphic functions which occur at solving of elasticity plane problems*, Matematychni Studii, **10**(1998) 103–112.

In this paper the meromorphic functions which logically follow from solutions of double-periodic problems of the plane elasticity theory are introduced. We establish their properties and connection with known meromorphic functions. The suitable formulae for their numerical realization are also obtained.

В.Л. Опанасович. *О некоторых мероморфных функциях, появляющихся при решении плоской задачи теории упругости*// Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 1. – С.103–112.

В работе введены мероморфные функции, которые логически следуют из решения двоякопериодических задач плоской теории упругости. Исследованы их свойства и установлена взаимосвязь с известными мероморфными функциями. Приведены удобные формулы для их численной реализации.

При дослідженні напружено-деформованого стану ізотропних пластин з подвійноперіодичним характером дефектності структури доводиться користуватися функціями, які на вихідному етапі розв'язку плоскої задачі теорії пружності мають вигляд

$$V_1(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\Big(\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{z+P_{mn}}\Big), \tag{1}$$

$$V_2(z)=\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z+P_{mn}}\Big), \tag{2}$$

$$V_3(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\Big(\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\frac{\overline{P}_{mn}}{(z+P_{mn})^2}\Big), \tag{3}$$

$$V_4(z)=\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{\overline{P}_{mn}}{(z+P_{mn})^2}\Big), \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C02, 30D30.

Тут $P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ ($\omega_1 \in C$, $\omega_2 \in C$, $m \in Z$, $n \in Z$), $z = x + iy$ ($x \in R$, $y \in R$, $i^2 = -1$), $\overline{z} = x - iy$.

Наведемо вирази для дзета-функцій Вейєрштрасса $\zeta(z)$ та еліптичної функції Вейєрштрасса $\varrho(z)$ [1]:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + {\sum_{m,n}}' \Big(\frac{1}{z - P_{mn}} + \frac{1}{P_{mn}} + \frac{z}{P_{mn}^2} \Big), \tag{5}$$

$$\varrho(z) = \frac{1}{z^2} + {\sum_{m,n}}' \Big(\frac{1}{(z - P_{mn})^2} - \frac{1}{P_{mn}^2} \Big), \tag{6}$$

а також для функції $Q(z)$, введеної в статті [2] та дослідженої в монографіях [3,4]:

$$Q(z) = {\sum_{m,n}}' \Big[\frac{\overline{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^2} - \frac{2z\overline{P}_{mn}}{P_{mn}^3} - \frac{\overline{P}_{mn}}{P_{mn}^2} \Big]. \tag{7}$$

Тут ${\sum}'_{m,n}$ поширюється на всі цілі m і n, крім пари $m = n = 0$.

Як видно з (1)–(4), функції $V_j(z)$ ($j = 1,2$) мероморфні з полюсами першого порядку в точках P_{mn} комплексної площини C із головними частинами, як у відповідної дзета-функції Вейєрштрасса, а функції $V_j(z)$ ($j = 3,4$) мероморфні з полюсами другого порядку в тих же точках із протилежними за знаком головними частинами, як у відповідної функції $Q(z)$. На підставі монографії [5, ст.115] можна зробити висновок, що функції $V_j(z)$ виражаються через $\zeta(z)$ і $Q(z)$.

Для визначеності будемо вважати, що має місце нерівність

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big) > 0. \tag{8}$$

Крім того, будемо вживати позначення ${\sum}'^{\infty}_{n=0} a_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Встановимо властивості функцій $V_j(z)$ ($j = \overline{1,4}$) і їхній взаємозв'язок з відповідними мероморфними функціями.

І І $V_j(z)$ $(j = 1,2)$

Теорема 1. *Для функцій $V_1(z)$ та $V_2(z)$ справедливі рівності*

$$V_j(z) = \frac{\pi}{\omega_j} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{ctg}\, \frac{\pi(z + n\omega_{3-j})}{\omega_j} = \frac{\pi}{\omega_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{ctg}\, \frac{\pi(z + n\omega_{3-j})}{\omega_j} =$$
$$= \frac{2\pi}{\omega_j} \sin\frac{2\pi z}{\omega_j} {\sum_{n=0}^{\infty}}' \Big(\cos\frac{2\pi n\omega_{3-j}}{\omega_j} - \cos\frac{2\pi z}{\omega_j} \Big)^{-1}, \tag{9}$$

$$V_j(z + k\omega_j) - V_j(z) = 0, \tag{10}$$

$$V_j(z + k\omega_{3-j}) - V_j(z) = (-1)^j \frac{2\pi i}{\omega_j} k, \quad k \in Z, \tag{11}$$

$$V_j(z) = \zeta(z) - \frac{z}{\omega_j}\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = \zeta(z) - \frac{z}{\omega_1\omega_2}\left(\zeta\left(\frac{\omega_{3-j}}{2}\right)\omega_j - (-1)^j 2\pi i\right), \tag{12}$$

$$V_1(z) = V_2(z) - \frac{2\pi i}{\omega_1\omega_2} z. \tag{13}$$

Доведення. Оскільки

$$\sum_{n=-M}^{M} \frac{1}{z+P_{mn}} = \frac{1}{z+n\omega_2} + \sum_{m=1}^{M} \frac{2(z+n\omega_2)}{(z+n\omega_2)^2 - m^2\omega_1^2},$$

і якщо тепер врахувати залежність [1, ст. 430]

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \tag{14}$$

то приходимо до перших частин формули (9). Останню частину цієї формули одержимо, скориставшись співвідношенням $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$. Формули (10) випливають безпосередньо з співвідношень (9), враховуючи періодичність функції $\operatorname{ctg}\, \alpha x$.

Виходячи з (9), матимемо

$$\begin{aligned}
&V_1(z+\omega_2) - V_1(z) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_1} \lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{n=-N}^{N} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega_1}(z+\omega_2(n+1)) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega_1}(z+n\omega_2) \right] \right\} = \\
&= \frac{\pi}{\omega_1} \lim_{N\to\infty} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega_1}(z+\omega_2(N+1)) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega_1}(z-N\omega_2) \right] = \qquad (15) \\
&= -\frac{\pi}{\omega_1} \lim_{N\to\infty} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{\omega_1}(2N+1)\omega_2\right)}{\cos \frac{\pi}{\omega_1}\omega_2(2N+1) - \cos \frac{\pi}{\omega_1}(2z+\omega_2)} = \\
&= \frac{2\pi i}{\omega_1} \lim_{N\to\infty} \frac{\exp\left[\frac{2\pi i\omega_2}{\omega_1}(2N+1)\right] - 1}{\exp\left[\frac{2\pi i\omega_2}{\omega_1}(2N+1)\right] + 1 - 2\exp\left[\frac{2\pi i\omega_2}{\omega_1}(2N+1)\right]\cos\frac{\pi}{\omega_1}(2z+\omega_2)} = -\frac{2\pi i}{\omega_1}.
\end{aligned}$$

Оскільки виконується умова (8), то при виводі (15) враховано, що

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \exp\left[\frac{\pi i\omega_2}{\omega_1}(2N+1)\right] = \lim_{N\to\infty} e^{-\pi(2N+1)\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1}} \Big\{ \cos\Big[\pi(2N+1)\operatorname{Re}\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)\Big] + \\
+ i\sin\Big[\pi(2N+1)\operatorname{Re}\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)\Big] \Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Беручи до уваги (15), запишемо

$$V_1(z+k\omega_2) - V_1(z) = \sum_{j=1}^{k} \left[V_1(z+j\omega_2) - V_1(z+(j-1)\omega_2) \right] = -\frac{2\pi i}{\omega_1} k.$$

Як видно з (9), функціональний ряд для функцій $V_j(z)$ є абсолютно і рівномірно збіжним в основному паралелограмі періодів після виділення з нього члена, що містить полюс в точці $z = 0$. А тому, враховуючи (14), розвинення для функцій $V_1(z)$ (1) і $V_2(z)$ (2) можна почленно диференціювати.

Врахувавши вирази для дзета-функції Вейєрштрасса (5) та еліптичної функції Вейєрштрасса (6), на основі (1) і (2) для похідних функцій $V_j(z)$ запишемо такі залежності

$$V_1''(z) = V_2''(z) = \zeta''(z) = -\varrho'(z). \tag{16}$$

Якщо проінтегрувати (16), то матимемо

$$V_1(z) = \zeta(z) + C_1 z + C, \tag{17}$$

тут C_1 і C — невідомі сталі.

Введемо позначення $\delta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right)$. Оскільки згідно з монографією [4, ст. 18] $(\forall k \in Z)$ має місце рівність $\zeta(z + \omega_j k) = \zeta(z) + k\delta_j$, то на основі (17) одержимо

$$\begin{aligned} V_1(z + \omega_1 k) &= \zeta(z + \omega_1 k) + C_1(z + \omega_1 k) + C = \\ &= \zeta(z) + C_1 z + C + k(C_1\omega_1 + \delta_1) = V_1(z) + k(C_1\omega_1 + \delta_1). \end{aligned}$$

Враховуючи (10), з попередньої рівності знаходимо

$$C_1 = -\frac{\delta_1}{\omega_1}. \tag{18}$$

Міркуючи аналогічно до того, як отримали формулу (18), на підставі (10) матимемо

$$C_1 = -\frac{1}{\omega_1\omega_2}(2\pi i + \delta_2\omega_1). \tag{19}$$

З (9) випливає, що $V_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0$. Враховуючи це і покладаючи в (17) $z = \frac{\omega_1}{2}$, отримаємо $C = 0$.

Цілком аналогічно доводяться відповідні співвідношення для функції $V_2(z)$.

Якщо прирівняти вирази для сталої C_1 (18) і (19), то приходимо до співвідношення Лежандра [4, ст. 18]

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i. \tag{20}$$

Беручи до уваги (20) та залежності (12), можемо записати

$$V_1(z) = V_2(z) + \frac{z}{\omega_1\omega_2}(\delta_2\omega_1 - \delta_1\omega_2) = V_2(z) - \frac{2\pi i}{\omega_1\omega_2}z.$$

Зауваження 1. Якщо не накладати обмеження (8), то рівності (11) набудуть вигляду

$$V_j(z + k\omega_{3-j}) - V_j(z) = (-1)^j \frac{2\pi i}{\omega_j} k \operatorname{sign}\left[\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right]. \tag{21}$$

Зауваження 2. Проробляючи відповідні викладки з використанням залежності (21), а не (11), прийдемо до співвідношення Лежандра у формі, яка наведена в монографії [6, ст. 270].

Наслідок 1. *Функції $V_j(z)$ $(j = 1, 2)$ квазіперіодичні.*

Наслідок 2. *Для дзета-функції Вейєрштрасса мають місце формули*

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{\delta_1}{\omega_1}z + \lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z+P_{mn}}\Big) = \\ &= \frac{\delta_2}{\omega_2}z + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\Big(\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{z+P_{mn}}\Big) = \frac{\delta_1}{\omega_1}z + V_1(z)\big|_{\omega_1\leftrightarrow\omega_2} = \\ &= \frac{\delta_1}{\omega_1}z + \frac{2\pi}{\omega_1}\sin\frac{2\pi z}{\omega_1}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\Big(\cos\frac{2\pi n\omega_2}{\omega_1} - \cos\frac{2\pi z}{\omega_1}\Big)^{-1}\Big|_{\omega_1\leftrightarrow\omega_2} = \\ &= \frac{\delta_1}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_1}\Big[\mathrm{ctg}\,\frac{\pi z}{\omega_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(z+n\omega_2}{\omega_1} + \mathrm{ctg}\,\frac{\pi(z-n\omega_2)}{\omega_1}\Big)\Big]\Big|_{\omega_1\leftrightarrow\omega_2},\end{aligned} \tag{22}$$

тут позначення $|_{\omega_1\leftrightarrow\omega_2}$ *означає, що має місце ще вираз, який отримується з даного заміною* $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$.

Зауваження 3. Остання залежність формули (22) збігається з виразом, що наведений у [7, ст. 934], а після перетворень передостання формула збігається з відомою формулою монографії [6, ст. 78].

Наслідок 3. *Оскільки* $\lim\limits_{z\to 0}\big(\zeta(z) - \frac{1}{z}\big) = 0$, *то*

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}{\sum_{n=-N,m=-M}^{N,M}}'\frac{1}{P_{mn}} = \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}{\sum_{m=-M,n=-N}^{M,N}}'\frac{1}{P_{mn}} = 0,$$

тут подвійна ${\sum}'_{n,m}$ *поширюється на всі цілі* m *і* n, *крім пари* $m = n = 0$.

Наслідок 4. *Для першої похідної функції* $V_j(z)$ *має місце залежність*

$$V_j'(z) = -\wp(z) - \frac{\delta_j}{\omega_j}. \tag{23}$$

Наслідок 5. *Еліптичну функцію Вейєрштрасса можна подати у вигляді*

$$\begin{aligned}\wp(z) &= -\frac{\delta_1}{\omega_1} + \frac{4\pi^2}{\omega_1^2}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\frac{1-\cos\frac{2\pi z}{\omega_1}\cos\frac{2\pi n\omega_2}{\omega_1}}{\big(\cos\frac{2\pi z}{\omega_1} - \cos\frac{2\pi n\omega_2}{\omega_1}\big)^2}\Big|_{\omega_1\leftrightarrow\omega_2} = \\ &= -\frac{\delta_1}{\omega_1} + \frac{\pi^2}{\omega_1^2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{cosec}^2\,\frac{\pi}{\omega_1}(z+\omega_2 n)\Big|_{\omega_1\leftrightarrow\omega_2}.\end{aligned}$$

Наслідок 6. *Якщо врахувати, що* $\lim\limits_{z\to 0}\big(\wp(z) - \frac{1}{z^2}\big) = 0$, *то*

$$\delta_1 = -\omega_1\lim_{M\to\infty}\Big(\lim_{N\to\infty}{\sum_{m=-M,n=-N}^{M,N}}'\frac{1}{P_{mn}^2}\Big) = \frac{2\pi^2}{\omega_1}\Big(\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{cosec}^2\,\frac{\pi n\omega_2}{\omega_1}\Big),$$

$$\delta_2 = -\omega_2\lim_{N\to\infty}\Big(\lim_{M\to\infty}{\sum_{n=-N,m=-M}^{N,M}}'\frac{1}{P_{mn}^2}\Big) = \frac{2\pi^2}{\omega_2}\Big(\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{cosec}^2\,\frac{\pi n\omega_1}{\omega_2}\Big).$$

Зауваження 4. Друга формула для δ_1 наведена в довіднику [8, ст. 108], якщо там зробити відповідні перетворення.

Наслідок 7. *Якщо, згідно з [6, ст. 77], функцію $\zeta(z)$ можна виразити через тета-функцію $\theta_1(z)$ за формулою*

$$\zeta(z)=\frac{\delta_1}{\omega_1}z+\frac{1}{\omega_1}\frac{\theta_1'(v)}{\theta_1(v)},\quad \Big(v=\frac{z}{\omega_1}\Big),$$

то, беручи до уваги (12), отримаємо

$$V_1(z)=\frac{d}{dz}\Big[\ln\theta_1\Big(\frac{z}{\omega_1}\Big)\Big], \tag{24}$$

тобто функція $V_1(z)$ пропорційна логарифмічній похідній від тета-функції $\theta_1(z)$. Беручи до уваги (24) і теорему 1, приходимо до відповідної властивості [8, ст. 86; 9, ст. 56] логарифмічної похідної функції $\theta_1(z)$.

Наслідок 8. *Оскільки має місце залежність $\zeta(z)=\sigma'(z)/\sigma(z)$ і співвідношення (22), то для функції Вейєрштрасса $\sigma(z)$ має місце формула*

$$\sigma(z)=z\exp\Big(\frac{\delta_2 z^2}{2\omega_2}\Big)\lim_{N\to\infty}\prod_{n=-N}^{N}{}'\lim_{M\to\infty}\prod_{m=-M}^{M}\Big(1+\frac{z}{P_{mn}}\Big)=$$
$$=z\exp\Big(\frac{\delta_1 z^2}{2\omega_1}\Big)\lim_{M\to\infty}\prod_{m=-M}^{M}{}'\lim_{N\to\infty}\prod_{n=-N}^{N}\Big(1+\frac{z}{P_{mn}}\Big),$$

тут $\prod'{}_{n=-N}^{N}a_n=\prod_{n=1}^{N}a_na_{-n}$.

Наслідок 9. *Оскільки має місце залежність [7, ст. 934]*

$$\sigma(u)=u\exp\Big(\int_0^u\Big(\zeta(z)-\frac{1}{z}\Big)\,dz\Big),$$

то, враховуючи вираз для функцій $\zeta(z)$ (22), після перетворень знаходимо

$$\sigma(u)=\frac{\omega_j}{\pi}e^{\frac{\delta_j u^2}{2\omega_j}}\sin\frac{\pi u}{\omega_j}\prod_{n=1}^{\infty}\Bigg(\frac{1-\cos\frac{2\pi u}{\omega_j}\cos^{-1}\frac{2\pi n\omega_{3-j}}{\omega_j}}{1-\cos^{-1}\frac{2\pi n\omega_{3-j}}{\omega_j}}\Bigg).$$

Наслідок 10. *Для квадратної решітки, тобто коли $\omega_1=d,\omega_2=id$, як видно з (9), має місце рівність*

$$V_j(iz)=-iV_{3-j}(z),$$

а з співвідношення (13) залежність

$$V_j(iz)=(-1)^j iz\frac{2\pi}{d^2}-iV_j(z).$$

і і $V_j(z)$ $(j = 3,4)$

Введемо функції

$$D_m(z) = -\frac{2\pi^2 i}{\omega_m}\,\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega_{3-m}}{\omega_m}\Big)\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} n\,\mathrm{cosec}^2\,\frac{\pi(z+n\omega_{3-m})}{\omega_m} =$$

$$= \frac{8\pi^2 i}{\omega_m}\,\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega_{3-m}}{\omega_m}\Big){\sum_{n=0}^{\infty}}' \frac{n\sin\frac{2\pi z}{\omega_m}\sin\frac{2\pi n\omega_{3-m}}{\omega_m}}{\big(\cos\frac{2\pi n\omega_{3-m}}{\omega_m}-\cos\frac{2\pi z}{\omega_m}\big)^2}, \quad (m=1,2). \quad (25)$$

Функції $D_m(z)$ непарні і для них мають місце рівності

$$D_m(z+k\omega_m) - D_m(z) = 0,$$

$$D_m(z+k\omega_{3-m}) - D_m(z) = -2i\omega_m k\,\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega_{3-m}}{\omega_m}\Big)V_m'(z), \quad (26)$$

тобто функції $D_m(z)$ $(m=1,2)$ квазіперіодичні.

Перша група співвідношень (26) випливає з періодичності функцій $\mathrm{cosec}^2\,\alpha z$, а друга група цих співвідношень доводиться подібно до того, як це зроблено в теоремі 1.

Теорема 2. *Для функцій $V_3(z)$ і $V_4(z)$ справедливі рівності*

$$V_j(z) = \frac{\overline{\omega}_{j-2}}{\omega_{j-2}}\Big\{\frac{d}{dz}\,[zV_{j-2}(z)] + D_{j-2}(z)\Big\} = \frac{2\pi\overline{\omega}_{j-2}}{\omega_{j-2}^2}{\sum_{n=0}^{\infty}}'\Bigg[\frac{\sin\frac{2\pi z}{\omega_{j-2}}}{\cos\frac{2\pi n\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}-\cos\frac{2\pi z}{\omega_{j-2}}} -$$

$$-\Big(\frac{2\pi z}{\omega_{j-2}}\Big(1-\cos\frac{2\pi z}{\omega_{j-2}}\cos\frac{2\pi n\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}\Big) -$$

$$-4\pi\,i\,n\,\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}\Big)\sin\frac{2\pi z}{\omega_{j-2}}\sin\frac{2\pi n\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}\Big)\Big(\cos\frac{2\pi n\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}-\cos\frac{2\pi z}{\omega_{j-2}}\Big)^{-2}\Bigg], \quad (27)$$

$$V_j(z+k\omega_{j-2}) - V_j(z) = \overline{\omega}_{j-2}kV_{j-2}'(z), \quad (28)$$

$$V_j(z+k\omega_{5-j}) - V_j(z) =$$

$$= \frac{k\overline{\omega}_{j-2}}{\omega_{j-2}}\Big\{\Big[\omega_{5-j} - 2i\omega_{j-2}\,\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}\Big)\Big]V_{j-2}'(z) + (-1)^j\,\frac{2\pi i}{\omega_{j-2}}\Big\} =$$

$$= \frac{k\overline{\omega}_{j-2}}{\omega_{j-2}}\Big\{\delta_{5-j} - \varrho(z)\Big[\omega_{5-j} - 2i\omega_{j-2}\,\mathrm{Im}\Big(\frac{\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}\Big)\Big] - -2\delta_{j-2}\,\mathrm{Re}\Big(\frac{\omega_{5-j}}{\omega_{j-2}}\Big)\Big\}, \quad (29)$$

$$V_j(z) = -Q(z) + \frac{2Q\left(\frac{\omega_{j-2}}{2}\right) - \overline{\omega}_{j-2}\,\varrho\left(\frac{\omega_{j-2}}{2}\right) - \delta_{j-2}\frac{\overline{\omega}_{j-2}}{\omega_{j-2}}}{\omega_{j-2}}\,z, \quad (30)$$

$$V_3(z) = V_4(z) + \frac{\big(1+\frac{\overline{\omega}_2}{\omega_2}\,\frac{\omega_1}{\overline{\omega}_1}\big)\big(\delta_2\omega_1\frac{\overline{\omega}_2}{\omega_2} - \delta_1\omega_2\big)}{\omega_1\omega_2}\,z. \quad (31)$$

Доведення. Як видно з (4), функцію $V_4(z)$ можна записати так

$$V_4(z) = \lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\Big\{\frac{m\overline{\omega}_1}{(z+m\omega_1)^2} +$$

$$+ \lim_{N\to\infty}\Big\{\frac{2}{\omega_2^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\big[\big(\frac{z+m\omega_1}{\omega_2}\big)^2+n^2\big]m\omega_1 - 2n^2(z+m\omega_1)\frac{\overline{\omega}_2}{\omega_2}}{\big[\big(\frac{z+m\omega_1}{\omega_2}\big)^2-n^2\big]^2}\Big\}\Big\}. \quad (32)$$

З врахуванням (14) і залежності [1, ст. 431; 7, ст. 50]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(z^2+k^2)}{(z^2-k^2)^2}=\pi^2\operatorname{cosec}^2\pi z-\frac{1}{z^2},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z^2-k^2)^2}=\frac{1}{z^2}\Big(\frac{\pi^2}{4}\operatorname{cosec}^2\pi z+\frac{\pi}{4z}\operatorname{ctg}\pi z-\frac{1}{2z^2}\Big)$$

рівність (32) набуде вигляду

$$V_4(z)=\frac{\pi\overline{\omega}_2}{\omega_2^2}\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\Big\{\operatorname{ctg}\frac{\pi(z+m\omega_1)}{\omega_2}-$$
$$-\frac{\pi}{\omega_2}\Big[z+2im\omega_2\operatorname{Im}\Big(\frac{\omega_1}{\omega_2}\Big)\Big]\operatorname{cosec}^2\frac{\pi(z+m\omega_1)}{\omega_2}\Big\}. \quad (33)$$

Беручи до уваги (25) і (9), попереднє співвідношення запишемо так

$$V_4(z)=\frac{\overline{\omega}_2}{\omega_2^2}\big[V_2(z)+zV_2'(z)+D_2(z)\big]=\frac{\overline{\omega}_2}{\omega_2^2}\Big[\frac{d}{dz}(zV_2(z))+D_2(z)\Big],$$

тобто приходимо до першої частини залежності (27). Якщо скористатись відповідними тригонометричними формулами, то після перетворення на підставі (33), приходимо до другої частини формули (27). Доведення для функцій $V_3(z)$ цілком аналогічне.

На підставі першої рівності (27) можемо записати

$$V_3(z+k\omega_1)-V_3(z)=\frac{\overline{\omega}_1}{\omega_1}\Big\{\frac{d}{dz}\big[(z+\omega_1)V_1(z+k\omega_1)-zV_1(z)\big]+D_1(z+k\omega_1)-D_1(z)\Big\}.$$

Якщо врахувати (26) і (10), то попередню рівність можна подати так

$$V_3(z+k\omega_1)-V_3(z)=\overline{\omega}_1kV_1'(z),$$

тобто отримали залежність (28) для функції $V_3(z)$. Цілком аналогічно доводиться вона для функцій $V_4(z)$, а проробивши подібні викладки, отримаємо (29).

Якщо врахувати вирази для функцій $V_3(z)$ (3), $V_4(z)$ (4) і $Q(z)$ (7), то можемо записати

$$V_3''(z)=V_4''(z)=-Q''(z).$$

Інтегруючи попередню рівність, знаходимо

$$V_3(z)=-Q(z)+C_1z+C_2, \quad (34)$$
$$V_4(z)=-Q(z)+C_3z+C_4.$$

тут C_i $(i=\overline{1,4})$ — невідомі сталі.

Оскільки згідно з монографією [4, ст. 23] $Q(0)=0$, крім того, як видно з рівностей (27) $V_3(0)=V_4(0)=0$, тому

$$C_2=C_4=0. \quad (35)$$

Враховуючи (35), на основі (34) запишемо

$$V_3(z+\omega_1) = -Q(z+\omega_1) + C_1(z+\omega_1). \tag{36}$$

Але для функції $Q(z)$ має місце залежність [4, ст. 24]

$$Q(z+\omega_m) = Q(z) + \omega_m \varrho(z) + \gamma_m \quad (m=1,2) \tag{37}$$

де

$$\gamma_m = 2Q\left(\frac{\omega_m}{2}\right) - \overline{\omega}_m \varrho\left(\frac{\omega_m}{2}\right), \quad (m=1,2).$$

Беручи тепер до уваги (37), (28), (29) і (23), рівність (36) запишемо так

$$V_3(z) + \overline{\omega}_1 V_1'(z) = V_3(z) + \overline{\omega}_1\Big(-\varrho(z) - \frac{\delta_1}{\omega_1}\Big) = -Q(z) - \overline{\omega}_1\varrho(z) - \gamma_1 + C_1 z + \omega_1 C_1.$$

Звідки знаходимо

$$C_1 = \frac{\gamma_1 - \frac{\delta_1\overline{\omega}_1}{\omega_1}}{\omega_1}. \tag{38}$$

Проробивши подібні викладки з другою рівністю (34), матимемо

$$C_3 = \frac{\gamma_2 - \frac{\delta_2\overline{\omega}_2}{\omega_2}}{\omega_2}. \tag{39}$$

На підставі (39), (38), (35), з (34) приходимо до (30).

Враховуючи залежність [4, ст. 24] $\gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2 = \delta_1\overline{\omega}_2 - \delta_2\overline{\omega}_1$, з (30) після перетворень отримаємо (31).

Наслідок 11. *Як видно з (30), для прямокутної решітки періодів* $V_3(z) = V_4(z)$.

Наслідок 12. *Беручи до уваги (27), (30), (12), функції* $D_1(z)$ *і* $D_2(z)$ *зв'язані залежністю*

$$\begin{aligned} D_1(z) &= \frac{d}{dz}\big[z(\beta V_2(z) - V_1(z))\big] + \beta D_2(z) + z(1+\overline{\beta})(\delta_2\beta\overline{\omega}_1 - \delta_1\omega_2) = \\ &= \frac{d}{dz}\Big\{z\Big[(\beta-1)\zeta(z) - z\Big(\frac{\beta\delta_2}{\omega_2} - \frac{\delta_1}{\omega_1}\Big)\Big]\Big\} + \beta D_2(z) + z(1+\overline{\beta})(\delta_2\beta\overline{\omega}_1 - \delta_1\omega_2), \end{aligned}$$

де $\beta = \frac{\overline{\omega}_2}{\omega_2}\frac{\omega_1}{\overline{\omega}_1}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736с.
2. Натанзон В.Я. *О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке* Математ. сб. – 1935. – Т.42, №5. – С.616–636.

3. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Периодические кусочно-однородные упругие структуры. – М.: Наука, 1992. – 287с.
4. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556с.
5. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648с.
6. Ахиезер Н.И. Элементы теории элиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304с.
7. Градштейн И.С., Рижик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1100с.
8. Журавский А.М. Справочник по элиптическим функциям. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1941.
9. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1967. – Т.3, 300с.

Львівський державний університет ім. І. Франка

Надійшло 15.04.1997