УДК 519.61

ПРО ОДНУ МОДИФІКАЦІЮ МЕТОДУ ГАУССА-НЬЮТОНА

М.Я. Бартіш, А.І. Чипурко

M. Bartish, A. Chypurko. *On some modyfication of the Gauss-Newton method*, Matematychni Studii, **10**(1998) 85–92.

In this article we consider the new modification of the Gauss-Newton method for solving the nonlinear least square problem. There are formulated the conditions of convergence and given the marks of the order of convergence of one method and its difference analogous.

М.Я. Бартиш, А.И. Чипурко. *Об одной модификации метода Гаусса-Ньютона* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 1. – С.85–92.

В работе рассмотрена новая модификация метода Гаусса-Ньютона нелинейной задач наименьших квадратов. Сформулированы условия сходимости и даны оценки порядка сходимости метода и его разничных аналогов.

На практиці виникає багато задач про найкраще наближення даних експерименту чи статистичної вибірки в сенсі найменших квадратів. В даному випадку маємо m співвідношень між n параметрами процесу, причому вектор-функція $F(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ з елементами $f_1(x),\dots,f_m(x)$ нелінійна по x і $m \ge n$. Параметри цієї задачі можна знайти як розв'язок нелінійної задачі про найменші квадрати

$$f(x) = \frac{1}{2}F(x)^T F(x) \to \min. \tag{1}$$

Крім того, задача (1) представляє інтерес як така, що дає можливість знайти розв'язок системи нелінійних алгебраїчних рівнянь $F(x)=0$.

Для розв'язання (1) можна використовувати метод Ньютона [3,4,5], який є локально збіжним з квадратичною швидкістю збіжності для задач (1) з будь-якою нормою нев'язки. Однак, основним його недоліком є те, що на кожному кроці потрібно обчислювати значення складової

$$S(x) = F''(x)F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i''(x) f_i(x),$$

що є операцією трудомісткою. На практиці часто використовують метод Гаусса-Ньютона [3,4,5]

$$x_{k+1} = x_k - \left[{F'}^T(x_k)F'(x_k)\right]^{-1}{F'}^T(x_k)F(x_k), \quad k=0,1,\dots,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 49M37.

який отримаємо з методу Ньютона, якщо знехтувати складовою $S(x)$ у виразі оберненого оператора. Ця ідея грунтується на припущенні, що із збільшенням кількості ітерацій, основну частину інформації про другу похідну функціоналу $f(x)$ містить доданок $F'^T(x)F'(x)$.

Для задач з нульовою нев'язкою ($F(x^*) = 0$) у випадку коли $F'(x)$ має повний стовпцевий ранг, метод Гаусса-Ньютона збігається квадратично. Враховуючи дану властивість, а також проблему оптимізації затрат на отримання розв'язку (1), нами розглянуті деякі модифікації методу Гаусса-Ньютона , а саме

$$x_{k+1} = x_k - \left[F'(\vartheta_k)^T F'(\vartheta_k)\right] F'(\vartheta_k)^T F(x_k), \tag{2}$$

$$\vartheta_k = \alpha x_k + (1-\alpha)\Phi(x_k), \qquad 0 \le \alpha \le 1,\ k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

де $\Phi(x)$ — оператор, який породжує ітераційну формулу порядку $\tau \ge 1$, тобто

$$\|\Phi(x) - x^*\| \le L\|x - x^*\|^\tau, \qquad L = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

Для послідовності $\{x_k\}$, отриманої по (2), (3), справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\Phi(x)$ — неперервний оператор, який породжує ітераційну формулу порядку τ,
$1 \le \tau \le 2$;

2) $F(x)$ — тричі неперервно-диференційовна в області $D \subset \mathbb{R}^n$;

3) $\|F'(x)\| \le C$, $\|F''(x)\| \le M$, $\|F'''(x)\| \le N$ для всіх $x \in D$;

4) Для кожного $x \in D$ існує обернений оператор $[F'(x)^T F'(x)]^{-1}$, причому

$$\left\|[F'(x)^T F'(x)]^{-1}\right\| \le B;$$

5) в області D існує точка x^*, яка є розв'язком задачі (1), причому $F(x^*) = 0$;

6) початкове наближення $x_0 \in D$ вибране так, що виконуються умови $\|x_0 - x^*\| \le \eta_0$, $L\eta_0^{\tau-1} \le 1$, де $\eta_0 = \mathrm{const} > 0$;

7) $h_0 = K_1\eta_0 < 1$, де $K_1 = \frac{2}{3}BCN\eta_0 + \frac{3}{2}BCM$.

Тоді послідовність наближень $\{x_k\}$, породжена методом (2)–(3), коректно визначена та збігається до розв'язку задачі (1) і справджується оцінка

$$\|x_k - x^*\| \le h_0^{2^k-1}\eta_0. \tag{5}$$

Якщо $\alpha = \frac{1}{2}$ і виконується умова

7′) $h_0^\tau = K_\tau \eta_0^\tau < 1$, де $K_\tau = \frac{2}{3}BCN\eta_0^{2-\tau} + \frac{1}{2}BCML$, то маємо оцінку

$$\|x_k - x^*\| \le h_0^{(\tau+1)^k-1}\eta_0. \tag{6}$$

Доведення. Покажемо справедливість твердження для $k = 1$. З (2) та умови 5) теореми маємо

$$x_1 - x^* = x_0 - x^* - \left[F'(\vartheta_0)^T F'(\vartheta_0)\right]^{-1} F'(\vartheta_0)^T (F(x_0) - F(x^*)) =$$
$$= \left[F'(\vartheta_0)^T F'(\vartheta_0)\right]^{-1} F'(\vartheta_0)^T \left\{F'(\vartheta_0)(x_0 - x^*) - (F(x_0) - F(x^*))\right\}.$$

Використавши формулу Тейлора та умови 3, 4 теореми, отримаємо

$$\|x_1 - x^*\| \le BC\big\|(F'(\vartheta_0) - F'(x^*))(x_0 - x^*) - \\ - \frac{1}{2}F''(x^*)(x_0 - x^*)^2\big\| + \frac{BCN}{6}\|x_0 - x^*\|^3. \quad (7)$$

Далі маємо

$$\big\|(F'(\vartheta_0) - F'(x^*))(x_0 - x^*) - \frac{1}{2}F''(x^*)(x_0 - x^*)^2\big\| \le \\ \le \Big\|(F''(x^*)(\vartheta_0 - x^*) - \frac{1}{2}F''(x^*)(x_0 - x^*) + \\ + \int_0^1 F'''(x^* + i(\vartheta_0 - x^*))(1-t)\,dt(\vartheta_0 - x^*)^2\Big\|\|x_0 - x^*\| \le \\ \le \Big\{M\big\|\vartheta_0 - x^* - \frac{1}{2}(x_0 - x^*)\big\| + \frac{N}{2}\|\vartheta_0 - x^*\|^2\Big\}\|x_0 - x^*\|$$

і

$$\big\|\vartheta_0 - x^* - \frac{1}{2}(x_0 - x^*)\big\| = \big\|\alpha x_0 + (1-\alpha)\Phi(x_0) - x^* - \frac{1}{2}(x_0 - x^*)\big\| \le \\ \le \big\|\alpha - \frac{1}{2}\big\|\,\|x_0 - x^*\| + (1-\alpha)L\|x_0 - x^*\|^\tau.$$

З (7) маємо

$$\|x_1 - x^*\| \le \frac{BCN}{2}\|\vartheta_0 - x^*\|^2\|x_0 - x^*\| + \frac{BCN}{6}\|x_0 - x^*\|^3 + \\ + BCM\Big\{\big|\alpha - \frac{1}{2}\big| + (1-\alpha)L\|x_0 - x^*\|^{\tau-1}\Big\}\|x_0 - x^*\|^2.$$

Оскільки

$$\|\vartheta_0 - x^*\| = \big\|\alpha x_0 + (1-\alpha)\Phi(x_0) - x^*\big\| \le \alpha\|x_0 - x^*\| + (1-\alpha)L\|x_0 - x^*\|^\tau \le \|x_0 - x^*\|,$$

то

$$\|x_1 - x^*\| \le \Big\{\frac{2}{3}BCN\eta_0 + \frac{3}{2}BCM\Big\}\eta_0^2 = K_1\eta_0^2 = h_0\eta_0. \quad (8)$$

Для $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо

$$\|x_1 - x^*\| \le \Big\{\frac{2}{3}BCN\eta_0^{2-\tau} + \frac{1}{2}BCML\Big\}\eta_0^\tau\eta_0 = K_\tau\eta_0^\tau\eta_0 = h_0^\tau\eta_0.$$

Отже, встановлено, що оцінки швидкості збіжності для x_1 виконуються.

Нехай твердження теореми виконуються для послідовності наближень $x_2, \dots, x_k$. Тоді справедлива оцінка $\|x_k - x^*\| \le h_0^{2^k-1}\eta_0$, і аналогічно попередньому, маємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le \\ \le \Big\{\frac{2}{3}BCN\|x_k - x^*\| + BCM\Big(\big|\alpha - \frac{1}{2}\big| + (1-\alpha)L\|x_k - x^*\|^{\tau-1}\Big)\Big\}\|x_k - x^*\|^2 \le \\ \le \Big\{\frac{2}{3}BCN\eta_0 + \frac{3}{2}BCM\Big\}h_0^{2(2^k-1)}\eta_0^2 = K_1\eta_0 h_0^{2^{k+1}-2}\eta_0 \le h_0^{2^{k+1}-1}\eta_0. \quad (9)$$

Для $\alpha = \frac{1}{2}$, $\|x_k - x^*\| \le h_0^{(\tau+1)^k-1}\eta_0$ і за аналогією з (9) маємо

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\| &\le \Big\{\frac{2}{3}BCN\|x_k - x^*\|^{2-\tau} + \frac{1}{2}BCML\Big\}\|x_k - x^*\|^{\tau+1} \le \\ &\le \Big\{\frac{2}{3}BCN\eta_0^{2-\tau} + +\frac{1}{2}BCML\Big\}h_0^{((\tau+1)^k-1)(\tau+1)}\eta_0^{\tau+1} = \\ &= K_\tau\eta_0^\tau h_0^{(\tau+1)^{k+1}-\tau-1}\eta_0 \le h_0^{(\tau+1)^{k+1}-1}\eta_0.\end{aligned} \tag{10}$$

Отже, оцінки (5) та (6) виконуються для x_{k+1}.

Перейдемо в (9) та (10) до границі при $k \to \infty$. Отримаємо

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{k+1} - x^*\| = 0 \qquad \forall\alpha \in [0,1].$$

Теорему доведено.

Можна довести також, що твердження Теореми 1 залишиться в силі, якщо умову на $F'''(x)$ замінити умовою $\|F''(x) - F''(y)\| \le K\|x-y\|^{\tau-1}$, $K = \mathrm{const} > 0$. При цьому сталі K_1 та K_2 матимуть складніший вигляд.

На практиці не завжди маємо аналітичний вираз $F(x)$, або є суттєві труднощі в обчисленні $F'(x)$, тому доцільно користуватися різницевим аналогом методу (2), (3), а саме

$$x_{k+1} = x_k - \big[F(x_k,\vartheta_k)^T F(x_k,\vartheta_k)\big]F(x_k,\vartheta_k)^T F(x_k), \tag{11}$$

$$\vartheta_k = \alpha x_k + (1-\alpha)\Phi(x_k), \qquad 0 \le \alpha \le 1,\ k = 0,1,\ldots, \tag{12}$$

де $F(x,y)$ — перша поділена різниця [6]. Для послідовності $\{x_k\}$, отриманої по (11), (12) справедлива

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $\Phi(x)$ — неперервний оператор, який породжує ітераційну формулу порядку τ,
$1 \le \tau 2$;

2) $F(x)$ неперервна в області $D \subset \mathbb{R}^n$;

3) $\|F(x,y)\| \le C$ для всіх $x,y \in D$;

4) $\|F(x,y,z)\| \le M$ для всіх $x,y,z \in D$, де $F(x,y,z)$ — друга поділена різниця [6];

5) Для кожних $x,y \in D$ існує обернений оператор $[F(x,y)^T F(x,y)]^{-1}$, прицьому

$$\big\|[F(x,y)^T F(x,y)]^{-1}\big\| \le B;$$

6) в області D існує точка $*$, яка є розв'язком задачі (1), прицьому $F(x^*) = 0$;

7) початкове наближення $x_0 \in D$ вибрано так, що $\|x_0 - x^*\| \le \eta_0$, $\eta_0 = \mathrm{const} > 0$, $L\eta_0^{\tau-1} \le 1$;

8) $h_0 = K_1\eta_0 < 1$, де $K_1 = BCM$.

Тоді послідовність наближень $\{x_k\}$, породжена методом (11)–(12), коректно означена, збігається до розв'язку задачі (1) і справджується оцінка

$$\|x_k - x^*\| \le h_0^{2^k-1}\eta_0. \tag{13}$$

Якщо $\alpha = 0$ і виконується умова

8′) $h_0^\tau = K_\tau \eta_0^\tau < 1$, *де* $K_\tau = BCML$, *то маємо оцінку*

$$\|x_k - x^*\| \le h_0^{(\tau+1)^k - 1}\eta_0. \tag{14}$$

Доведення. Покажемо справедливість твердження для $k = 1$. Використовуючи (11), запишемо

$$x_1 - x^* = \left[F(x_0,\vartheta_0)^T F(x_0,\vartheta_0)\right]^{-1} F(x_0,\vartheta_0)^T \left\{F(x_0,\vartheta_0)(x_0 - x^*) - F(x_0)\right\}.$$

Скориставшись аналогом інтерполяційної формули Ньютона [6], та враховуючи умову 6 теореми, можемо записати $F(x_0) = F(x_0, x^*)(x_0 - x^*)$. Тоді

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= \left[F(x_0,\vartheta_0)^T F(x_0,\vartheta_0)\right]^{-1} F(x_0,\vartheta_0)^T \big(F(x_0,\vartheta_0) - F(x_0,x^*)\big)(x_0 - x^*) = \\ &= \left[F(x_0,\vartheta_0)^T F(x_0,\vartheta_0)\right]^{-1} F(x_0,\vartheta_0)^T F(x_0,\vartheta_0,x^*)(\vartheta_0 - x^*)(x_0 - x^*) \end{aligned}$$

та

$$\|x_1 - x^*\| \le BCM\|\vartheta_0 - x^*\|\,\|x_0 - x^*\|. \tag{15}$$

Оскільки $\vartheta_0 - x^* = \alpha x_0 + (1-\alpha)\Phi(x_0) - x^* = \alpha(x_0 - x^*) + (1-\alpha)(\Phi(x_0) - x^*)$, то

$$\|\vartheta_0 - x^*\| \le \alpha\|x_0 - x^*\| + (1-\alpha)L\|x_0 - x^*\|^\tau. \tag{16}$$

З (15), (16) отримаєм

$$\begin{aligned} &\|x_1 - x^*\| \le BCM\Big\{\alpha\|x_0 - x^*\| + (1-\alpha)L\|x_0 - x^*\|^\tau\Big\}\|x_0 - x^*\| = \\ &= BCM\big\{\alpha + (1-\alpha)L\|x_0 - x'\|^{\tau-1}\big\}\|x_0 - x'\|^2 \le BCM\|x_0 - x'\|^2 \le h_0\eta_0. \end{aligned} \tag{17}$$

При $\alpha = 0$, маємо

$$\|x_1 - x^*\| \le BCML\|x_0 - x^*\|^{\tau+1} \le K_\tau\eta_0^\tau\eta_0 = \eta_0^\tau\eta_0. \tag{18}$$

Отже, ми довели, що оцінки швидкості збіжності для x_1 є справедливими.

Нехай твердження теореми виконуються для послідовності наближень $x_2, \ldots, x_k$. Тоді має місце оцінка $\|x_k - x^*\| \le h_0^{2^k - 1}\eta_0$ і, аналогічно попереднім викладкам, маємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le BCM\|x_k - x^*\|^2 \le K_1 h_0^{2^{k+1} - 2}\eta_0^2 = h_0^{2^{k+1} - 1}\eta_0. \tag{19}$$

При $\alpha = 0$ $\|x_k - x^*\| \le h_0^{(\tau+1)^k - 1}\eta_0$ і по аналогії до (18), маємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le BCML\|x_k - x^*\|^{\tau+1} \le K_\tau h_0^{((\tau+1)^{k+1} - 1)(\tau+1)}\eta_0^{\tau+1} = h_0^{(\tau+1)^{k+1} - 1}\eta_0. \tag{20}$$

Отже, оцінки (13) та (14) виконуються для x_{k+1}.

Перейдемо в (19) та (20) до границі, коли $k \to \infty$, отримаєм

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{k+1} - x^*\| = 0 \qquad \forall\alpha \in [0,1].$$

Теорему доведено.

У випадку, коли $\|F(x^*)\| \neq 0$, розглянуті методи втрачають свою ефективність. Хоча, у випадку коли $\|F(x^*)\| \le \varepsilon$, де ε — достатньо мала величина, справедлива

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1–4 теореми 1, причому в області D існує точка x^*, яка є розв'язком задачі (1) і $\|F(x^*)\| \le \varepsilon$. Початкове наближення x_0 вибране так, що $\|x_0 - x^*\|\eta_0$, де $\eta_0 = \mathrm{const} > 0$, $h_0^\tau = K_\tau \eta_0^\tau < 1$, де $K_\tau = \frac{1}{2}BCML + \frac{2}{3}BCN\eta_0^{2-\tau} + BM\gamma$. Крім того, $L\eta_0^{\tau-1} \le 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Для деякого натурального $m \ge 0$, виконується нерівність $\gamma\|x_{m+1} - x^*\|^\tau < \varepsilon \le \gamma\|x_m - x^*\|^\tau$, де x_m, x_{m+1} — два послідовні наближення, отримані по (2),(3), $\gamma = \mathrm{const} > 0$.*

Тоді послідовність наближень $\{x_k\}$, породжена методом (2)–(3), коректно визначена та збігається до розв'язку задачі (1) і мають місце оцінки

$$\|x_k - x^*\| \le h_0^{(\tau+1)^k - 1}\eta_0, \quad k = 1, 2, \ldots, m+1, \tag{21}$$

$$\|x_{m+p} - x^*\| \le h_0^{(p\tau+1)(\tau+1)^m - 1}\eta_0, \quad p = 2, 3, \ldots. \tag{22}$$

Доведення. Аналогічно попереднім викладкам легко отримати оцінку

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le \left\{\frac{1}{2}BCML\|x_k - x^*\|^\tau + \frac{2}{3}BCN\|x_k - x^*\|^2 + BM\varepsilon\right\}\|x_k - x^*\|.$$

Тоді для $k \le m$ маємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le \left\{\frac{1}{2}BCML + \frac{2}{3}BCN\|x_k - x^*\|^{2-\tau} + BM\gamma\right\}\|x_k - x^*\|^{\tau+1}.$$

Звідси

$$\|x_1 - x^*\| \le K_\tau \eta_0^{\tau+1} \le h_0^\tau \eta_0.$$

Отже, оцінка (21) виконується для першого наближеня. Використовуючи метод математичної індукції для $k \le m$, отримаємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le K_\tau\|x_k - x^*\|^{\tau+1} \le K_\tau\big(h_0^{(\tau+1)^k - 1}\big)^{\tau+1}\eta_0^{\tau+1} = h_0^{(\tau+1)^{k+1} - 1}\eta_0. \tag{23}$$

У випадку $k > m$ можемо записати нерівність

$$\begin{aligned}\|x_{m+p} - x^*\| \le &\left\{\frac{1}{2}BCML + \frac{2}{3}BCN\|x_m - x^*\|^{2-\tau} + BM\gamma\right\}\times\\ &\times \|x_m - x^*\|^\tau\|x_{m+p-1} - x^*\| \le\\ &\le K_\tau\|x_m - x^*\|^\tau\|x_{m+p-1} - x^*\| \le h_0^{\tau(\tau+1)^m}\|x_{m+p-1} - x^*\|.\end{aligned}$$

Отже,

$$\|x_{m+p} - x^*\| \le h_0^{(p\tau+1)(\tau+1)^m - 1}\eta_0, \quad p = 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

Перейдемо в (23) та (24) до границі при $k \to \infty$. Отримаємо

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{k+1} - x^*\| = 0.$$

Теорему доведено.

У випадку, коли ε — велике число, методи (2),(3) та (11),(12) можуть не збігатися навіть для доброго початкового наближення і тут доцільно використовувати градієнтні методи та методи типу Бройдена [3,4,5], які , як показали практичні дослідження, працюють досить ефективно. Частинним випадком (2),(3) є метод

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \left[F'(\vartheta_k)^T F'(\vartheta_k)\right]^{-1} F'(\vartheta_k)^T F'(x_k), \\ \vartheta_{k+1} &= x_{k+1} - \frac{1}{2}\left[F'(\vartheta_k)^T F'(\vartheta_k)\right]^{-1} F'(\vartheta_k)^T F'(x_{k+1}), \\ &\vartheta_0 = x_0 \text{ — початкове наближення,} \qquad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{25}$$

та його різницевий аналог

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \left[F'(x_k, \vartheta_k)^T F'(x_k, \vartheta_k)\right]^{-1} F'(x_k, \vartheta_k)^T F'(x_k), \\ \vartheta_{k+1} &= x_{k+1} - \left[F'(x_k, \vartheta_k)^T F'(x_k, \vartheta_k)\right]^{-1} F'(x_k, \vartheta_k)^T F'(x_{k+1}), \\ &x_0 \text{ — початкове наближення, } \vartheta_0 = \overline{x}_0 \text{ близьке до } x_0, \qquad k = 0, 1, \dots. \end{aligned} \tag{26}$$

У випадку $m = n$ метод (25) досліджено в [1].

Можна показати, що послідовності, отримані за схемами (25) та (26) при виконанні відповідних умов, збігаються до розв'язку задач (1) із швидкістю збіжності порядку $1 + \sqrt{2}$, що робить дані методи більш ефективними, ніж метод Гаусса-Ньютона та його різницевий аналог, порядок швидкості збіжності яких становить 2, оскільки трудомісткість однієї ітерації запропонованих методів не набагато більша, ніж класичних. Тут на кожному кроці додатково необхідно розв'язувати лінійну систему рівнянь $ABx = c$, де A, B трикутні, уже обчислені матриці.

Треба відзначити, що методи (25) та (26) мають ширшу область застосування, ніж методи типу Ньютона, оскільки оператор $F'(x)^T F'(x)$ додатновизначений. Однак, якщо $F'(x)$ не має повного стовпцевого рангу, то в цьому випадку доцільно використовувати алгоритм

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \left[F'(\vartheta_k)^T F'(\vartheta_k) + \gamma_k I\right]^{-1} F'(\vartheta_k)^T F'(x_k), \\ \vartheta_{k+1} &= x_{k+1} - \frac{1}{2}\left[F'(\vartheta_k)^T F'(\vartheta_k) + \gamma_k I\right]^{-1} F'(\vartheta_k)^T F'(x_{k+1}), \end{aligned} \tag{27}$$

де $\gamma_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, та його різницевий аналог. Збіжність даного методу аналогічна збіжності схеми (2), (3), що неважко показати аналогічно до того, як це робилося в [2].

З метою перевірки властивостей запропонованих методів, проводився широкий чисельний експеримент на задачах з нульовими та ненульовими нормами нев'язки. Чисельні результати тестування підтверджують теоретично отримані оцінки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бартіш М.Я. *Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь* ДАН УРСР. Сер. А. – 1968. – №5. – С.387–391.
2. Бартіш М.Я., Шахно С.М.*Деякі методи розв'язання нелінійное задачі найменших квадратів* Вісник Львівського університету. сер. мех-мат. – 1993. – Т.39. – С.3–7.
3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509с., ил.

4. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988.
5. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.
6. Ульм С.Ю. *Об обобщенных разделенных разностях, I* Изд. АН ЭССР. Физика. Матем. – 1967. – Т.16, №1. – С.13–26.

Львівський університет, факультет прикладної математики

Надійшло 1.03.1997
Після переробки 24.02.98