УДК 517.983.36

ПРО ЕНЕРГЕТИЧНІ ПРОСТОРИ ОДНОГО ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

Ю.І. Говда

Yu. Govda. *On energetic spaces of one positively defined operator*, Matematychni Studii, **10**(1998) 79–84.

Energetic spaces of one positively defined operator are described. According to this the vectorial functions spaces with generalized divergences are concerned and simple characteristics of them are formulated.

Ю.І. Говда. *Об энергетических пространствах одного положительно определенного оператора* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, 1. – С.79–84.

Описываются энергетические пространства одного положительно определенного оператора, которые отвечают заданным областям определения этого оператора. В этой связи рассматриваются пространтсва вектор-функций с обобщенными дивергенциями и формулируются простейшие их свойства.

У статті описуються енергетичні простори одного додатньо визначеного оператора, що відповідають заданим областям визначення цього оператора. У цьому зв'язку розглядаються простори вектор-функцій з узагальненими дивергенціями та формулюються деякі їх найпростіші властивості.

1. Нехай Ω — скінченна область трьохвимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, обмежена кусково-гладкою поверхнею Γ, і в $\overline{\Omega}$ визначені вектор-функції

$$\vec{U}(x) = \begin{pmatrix} \vec{u}^1(x) \\ \vec{u}^2(x) \end{pmatrix},$$

де $\vec{u}^i(x) = \big(u_1^i(x), u_2^i(x), u_3^i(x)\big)^T$, $i = 1, 2$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка простору $\mathbb{R}^3$, індекс T означає транспонування.

Введемо в розгляд лінійний диференціальний оператор $\mathrm{L}\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, визначений на вектор-функціях $\vec{U}(x)$

$$\mathrm{L}\,\vec{U} = -\begin{pmatrix} \beta\nabla^2\vec{u}^1 + \nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \end{pmatrix} + \varkappa\vec{U},$$

де $L_2(\Omega)$ — гільбертів простір вектор-функцій з інтегрованим скалярним квадратом, α, β, γ, ν, $\varkappa$ — додатні сталі, при цьому $\gamma^2 \le \alpha\nu$. За області визначення оператора L, приймемо множини: $D_1(\mathrm{L}) = \dot{C}^2(\Omega)$, $D_2(\mathrm{L}) = \big\{\vec{U} \in C^2(\overline{\Omega}) : \mathrm{G}\,\vec{U}\big|_\Gamma = 0\big\}$ та $D_3(\mathrm{L}) = \big\{\vec{U} \in C^2(\overline{\Omega}) : (\mathrm{G}\,\vec{U} + \sigma\vec{U})\big|_\Gamma = 0\big\}$. Тут

$$\mathrm{G}\,\vec{U} = \begin{pmatrix} \beta\frac{\partial\vec{u}^1}{\partial n} + \big[\vec{\nabla}\cdot(\nu\vec{u}^1 + \gamma\vec{u}^2)\big]\vec{n} \\ \big[\vec{\nabla}\cdot(\gamma\vec{u}^1 + \alpha\vec{u}^2)\big]\vec{n} \end{pmatrix},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47F05, 47B25.

σ — додатня стала, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до Γ, $\partial \vec{u}^1/\partial n$ — похідна в напрямку $\vec{n}$, $C^l(\overline{\Omega})$ — сукупність вектор-функцій, кожна компонента яких l разів неперервно диференційована в $\overline{\Omega}$, $\dot{C}^l(\Omega) = \{\vec{U} \in C^l(\overline{\Omega}) : \vec{U}$ фінітна в $\Omega\}$, $l = 0, 1, \ldots$. Неважко переконатись у тому, що оператор L є симетричним і додатньо визначеним на $D_i(\mathrm{L})$, $i = 1, 2, 3$. Енергетичний простір [1] оператора L, що відповідає області визначення $D_i(\mathrm{L})$ позначимо $H_{\mathrm{L}i}$, $i = 1, 2, 3$. Скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}i}$ в просторах $H_{\mathrm{L}i}$ визначаються так:

$$(\vec{U}, \vec{V})_{\mathrm{L}1} = I(\vec{U}, \vec{V}) + \varkappa(\vec{U}, \vec{V}), \quad (\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}2} \equiv (\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}1},$$

$$(\vec{U}, \vec{V})_{\mathrm{L}3} = (\vec{U}, \vec{V})_{\mathrm{L}1} + \sigma \int_\Gamma \vec{U} \cdot \vec{V}\, d\Gamma.$$

Тут
$$I(\vec{U}, \vec{V}) = \int_\Omega \Big[\beta \sum_{j=1}^{3} (\vec{\bigtriangledown} u_j^1) \cdot (\vec{\bigtriangledown} v_j^1) + \nu(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}^1)(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{v}^1) +$$
$$+ \gamma(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}^2)(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{v}^1) + \gamma(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}^1)(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{v}^2) + \alpha(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}^2)(\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{v}^2)\Big]\, dx,$$

$(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в просторі $L_2(\Omega)$. Норми в просторах $H_{\mathrm{L}i}$, породжені скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}i}$ будемо позначати $\|\cdot\|_{\mathrm{L}i}$, $i = 1, 2, 3$ відповідно. Нашою метою є конкретизація енергетичних просторів $H_{\mathrm{L}i}$, $i = 1, 2, 3$.

2. Для опису просторів $H_{\mathrm{L}i}$, $i = 1, 2, 3$, введемо в розгляд спеціальні класи вектор-функцій з узагальненими дивергенціями для випадку n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Нехай Ω — скінченна область простору $\mathbb{R}^n$, обмежена кусково-гладкою поверхнею Γ. Будемо розглядати як скалярні функції $\psi(x)$, так і вектор-функції $\vec{u}(x)$ розмірності n, визначені на $\overline{\Omega}$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка простору $\mathbb{R}^n$). Через $L_{loc}(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $W_p^1(\Omega)$, $\mathring{W}_p^1(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, [1] будемо позначати простори як скалярних функцій $\psi(x)$, так і вектор-функцій $\vec{u}(x)$, кожна компонента $u_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, яких належить відповідному простору.

Означення 1. Нехай $\vec{u}(x)$, $\psi(x) \in L_{loc}(\Omega)$ і для довільної функції $\varphi(x) \in \dot{C}^1(\Omega)$ виконується рівність

$$\int_\Omega \vec{u}(x) \cdot (\vec{\bigtriangledown} \varphi(x))\, dx = -\int_\Omega \psi(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1}$$

Тоді $\psi(x)$ будемо називати узагальненою дивергенцією функції $\vec{u}(x)$ в області Ω. Узагальнену дивергенцію будемо позначати $\psi(x) = \vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}(x)$.

Сформулюємо деякі найпростіші властивості функцій з узагальненими дивергенціями, доведення яких повоторює з доведення аналогічних властивостей функцій з узагальненими похідними [1], [2]:

1) якщо $\vec{u}(x)$ і $\vec{v}(x)$ мають узагальнені дивергенції, а c_1, c_2 — сталі, то функція $c_1\vec{u}(x) + c_2\vec{v}(x)$ має узагальнену дивергенцію $\vec{\bigtriangledown} \cdot \big(c_1\vec{u}(x) + c_2\vec{v}(x)\big) = c_1\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}(x) + c_2\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{v}(x)$;
2) узагальнена дивергенція єдина;
3) якщо $\psi(x)$ — узагальнена дивергенція функції $\vec{u}(x)$ в області Ω, то $\psi(x)$ є узагальненою дивергенцією функції $\vec{u}(x)$ в будь-якій підобласті $\Omega' \subset \Omega$.

Зауважимо, що, якщо $\vec{u}(x)$ має узагальнені похідні $\partial u_i/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $\vec{u}(x)$ має узагальнену дивергенцію $\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u} = \partial u_1/\partial x_1 + \ldots + \partial u_n/\partial x_n$. Водночас, із існування узагальненої дивергенції не випливає існування узагальнених похідних $\partial u_i/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Зауваження. У книзі [3] Г.Є. Шиловим розглядалися векторно-гладкі функції — неперервні векторні функції, що мають неперервні дивергенцію та ротор, без припущення існування у них неперервних частинних похідних.

Нехай $\vec{u}(x)$, $\psi(x) \in L_{loc}(\Omega)$. Введемо в розгляд середні функції [1]

$$\vec{u}_h(x) = \int_\Omega \omega_h(x-\xi)\vec{u}(\xi)\,d\xi, \qquad \psi_h(x) = \int_\Omega \omega_h(x-\xi)\psi(\xi)\,d\xi,$$

де $\omega_h(x)$ — ядро усереднення радіуса h. Якщо $\vec{u}$, $\psi \in L_p(\Omega)$, то $\vec{u}_h \to \vec{u}$, $\psi_h \to \psi$ при $h \to 0$ за нормою простору $L_p(\Omega)$ [1]. Позначимо Ω_h — сукупність точок області Ω, відстань від яких до Γ не перевищує h.

Теорема 1. *Нехай $\vec{u}(x)$ має в області Ω узагальнену дивергенцію $\psi(x)$. Тоді на відкритій множині $\Omega \setminus \Omega_h$*

$$\psi_h(x) = \vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{u}_h(x).$$

Доведення. Нехай $x \in \Omega \setminus \Omega_h$. Тоді $\omega_h(x-\xi)$ як функція від ξ належить до $\dot{C}^1(\Omega)$. З означення 1, а також із того, що ω_h залежить лише від різниці $x-\xi$, отримуємо

$$\psi_h(x) = \int_\Omega \omega_h(x-\xi)\psi(\xi)\,d\xi = -\int_\Omega \big(\vec{\bigtriangledown}_\xi \omega_h(x-\xi)\big)\cdot\vec{u}(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int_\Omega \big(\vec{\bigtriangledown}_x \omega_h(x-\xi)\big)\cdot\vec{u}(\xi)\,d\xi = \vec{\bigtriangledown}\cdot\int_\Omega \omega_h(x-\xi)\vec{u}(\xi)\,d\xi = \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{u}_h(x).$$

Теорему 1 доведено.

Введемо в розгляд множину $W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$ функцій $\vec{u} \in L_p(\Omega)$, які мають узагальнені дивергенції $\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{u} \in L_q(\Omega)$. Введемо на $W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$ норму співвідношенням

$$\|\vec{u}\|_{pq}^{\nabla} = \Big(\int_\Omega |\vec{u}|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega |\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{u}|^q\,dx\Big)^{1/q},$$

де $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$. Очевидно, що $W_r^1(\Omega) \subset W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$, де $r = \max\{p,q\}$. Аналогічно, як для випадку просторів Соболєва $W_p^1(\Omega)$ [1], можна довести наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $\vec{u}(x) \in W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$. Тоді в будь-якій строго внутрішній підобласті $\Omega' \subset \Omega$ можна побудувати таку послідовність $\{\vec{u}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}^n$ функцій, для якої $\vec{u}_n \to \vec{u}$ при $n \to \infty$ за нормою простору $W_{pq}^{\nabla}(\Omega')$.*

При $p = q$ простір $W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$ і норму $\|\cdot\|_{pq}^{\nabla}$ будемо позначати $W_p^{\nabla}(\Omega)$ і $\|\cdot\|_p^{\nabla}$. У просторі $W_p^{\nabla}(\Omega)$ можна ввести норму еквівалентну до $\|\cdot\|_p^{\nabla}$, яку будемо позначати так само

$$\|\vec{u}\|_p^{\nabla} = \Big(\int_\Omega \big[|\vec{u}|^p + |\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{u}|^p\big]\,dx\Big)^{1/p}.$$

Теорема 3. *Простір* $W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$ *з нормою* $\|\cdot\|_{pq}^{\nabla}$ *банахів. Зокрема, простір* $W_2^{\nabla}(\Omega)$ *зі скалярним добутком*

$$(\vec{u},\vec{v})_2^{\nabla} = \int_\Omega \big[\vec{u}\cdot\vec{v} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\big]\,dx$$

гільбертів.

Доведення теореми 3 є подібним до доведення повноти простору $W_p^1(\Omega)$ [1].

Теорема 4. *Нехай* $\vec{u}\in W_p^{\nabla}(\Omega)$, $\psi\in W_q^1(\Omega)$ *і* $1/p+1/q=1$. *Тоді вектор-функція* $\psi\vec{u}\in W_1^{\nabla}(\Omega)$ *і справедлива формула*

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{u}) = (\vec{\nabla}\psi)\cdot\vec{u} + \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{u}.$$

Доведення. Спосіб доведення теореми збігається зі способом доведення формули знаходження узагальненої похідної від добутку [2].

З умови теореми та з нерівності Гельдера випливає, що $\psi\vec{u}$, $(\vec{\nabla}\psi)\cdot\vec{u}+\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\in L_1(\Omega)$. Враховуючи властивості середніх функцій, в будь-якій строго внутрішній підобласті $\Omega'\subset\Omega$ будемо мати: $\psi_h\to\psi$, $\vec{\nabla}\psi_h\to\vec{\nabla}\psi$ в нормі простору $L_q(\Omega')$; $\vec{u}_h\to\vec{u}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_h\to\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ в нормі простору $L_p(\Omega')$.

Нехай функція $\varphi\in\dot{C}^1(\Omega)$ і дорівнює нулеві поза строго внутрішньою підобластю $\Omega_\varphi\subset\Omega$. Нехай $|\varphi|$, $|\vec{\nabla}\varphi|<A$, A — стала. Тоді

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega(\psi_h\vec{u}_h-\psi\vec{u})\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\,dx\Big| &< A\int_{\Omega_\varphi}\big|\psi_h(\vec{u}_h-\vec{u})+\vec{u}(\psi_h-\psi)\big|\,dx\le\\ &\le A\int_{\Omega_\varphi}|\psi_h|\,|\vec{u}_h-\vec{u}|\,dx + A\int_{\Omega_\varphi}|\vec{u}|\,|\psi_h-\psi|\,dx\le\\ &\le A\Big[\Big(\int_{\Omega_\varphi}|\psi_h|^q\,dx\Big)^{1/q}\Big(\int_{\Omega_\varphi}|\vec{u}_h-\vec{u}|^p\,dx\Big)^{1/p}+\\ &\quad+\Big(\int_{\Omega_\varphi}|\vec{u}|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_{\Omega_\varphi}|\psi_h-\psi|^q\,dx\Big)^{1/q}\Big]\to 0\end{aligned}$$

при $h\to0$, тобто

$$\int_\Omega(\psi_h\vec{u}_h)\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\,dx\to\int_\Omega(\psi\vec{u})\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\,dx$$

при $h\to0$. Аналогічно доводиться, що

$$\int_\Omega\big(\psi_h\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_h+\vec{u}_h\cdot(\vec{\nabla}\psi_h)\big)\varphi\,dx\to\int_\Omega\big(\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\psi)\big)\varphi\,dx.$$

З очевидної рівності

$$\int_\Omega(\psi_h\vec{u}_h)\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\,dx = -\int_\Omega\big(\psi_h\vec{\nabla}\cdot\vec{u}_h+\vec{u}_h\cdot(\vec{\nabla}\psi_h)\big)\varphi\,dx$$

при $h\to0$ випливає, що

$$\int_\Omega(\psi\vec{u})\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\,dx = -\int_\Omega\big(\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\psi)\big)\varphi\,dx,$$

а це означає, що $\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{u})=(\vec{\nabla}\psi)\cdot\vec{u}+\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$. Теорему 4 доведено.

Позначимо $\widetilde{W}_{pq}^{\nabla}(\Omega)$ — банахів простір, утворений замиканням в нормі $\|\cdot\|_{pq}^{\nabla}$ множини $C^1(\overline{\Omega})$. Очевидно, що $\widetilde{W}_{pq}^{\nabla}(\Omega)\subset W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$. Як і у випадку просторів Соболєва $W_p^1(\Omega)$ [4] доводиться наступне твердження.

Теорема 5. *Якщо область Ω є зірковою, то $\widetilde{W}_{pq}^{\nabla}(\Omega) = W_{pq}^{\nabla}(\Omega)$.*

Введемо в розгляд банахів простір $\overset{\circ}{W}{}_{pq}^{\nabla}(\Omega)$, який утворений замиканням за нормою $\|\cdot\|_{pq}^{\nabla}$ множини $\dot{C}^1(\Omega)$. Справедлива така необхідна умова належності функції до простору $\overset{\circ}{W}{}_{pq}^{\nabla}(\Omega)$.

Теорема 6. *Якщо $\vec{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_{pq}^{\nabla}(\Omega)$, то $\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, dx = 0$.*

Доведення. За означенням простору $\overset{\circ}{W}{}_{pq}^{\nabla}(\Omega)$ існує послідовність $\{\vec{u}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ функцій з $\dot{C}^1(\Omega)$, така що $\|\vec{u} - \vec{u}_m\|_{pq}^{\nabla} \to 0$ при $m \to \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, dx\Big| = \Big|\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, dx - \int_\Gamma \vec{u}_m \cdot \vec{n}\, d\Gamma\Big| = \Big|\int_\Omega \big[\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_m\big]\, dx\Big| \le \\ \le c\Big(\int_\Omega |\vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_m|^q\, dx\Big)^{1/q} \le c\|\vec{u} - \vec{u}_m\|_{pq}^{\nabla}, \end{aligned} \tag{2}$$

де c — додатня стала, що залежить лише від Ω та q. Твердження теореми випливає з того, що права частина нерівності (2) прямує до 0 при $m \to \infty$. Теорему 6 доведено.

Розглянемо банахів простір $W_{pqr}^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$, $1 \le r < \infty$, з нормою

$$\|\vec{u}\|_{pqr}^{\nabla,\Gamma} = \|\vec{u}\|_{pq}^{\nabla} + \Big(\int_\Gamma |\vec{u}|^r\, d\Gamma\Big)^{1/r},$$

утворений замиканням у вказаній нормі множини $C^1(\overline{\Omega})$. При $p = q = r$ простір $W_{pqr}^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$ і норму $\|\cdot\|_{pqr}^{\nabla,\Gamma}$ будемо позначати $W_p^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$ і $\|\cdot\|_p^{\nabla,\Gamma}$. Зауважимо, що простір $W_2^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$ зі скалярним добутком

$$(\vec{u}, \vec{v})_2^{\nabla,\Gamma} = (\vec{u}, \vec{v})_2^{\nabla} + \int_\Gamma \vec{u} \cdot \vec{v}\, d\Gamma$$

гільбертів.

Теорема 7. *Для функцій $\vec{u}(x)$ з простору $W_{pqr}^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$ справедлива формула Остроградського*

$$\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, dx = \int_\Gamma \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\Gamma. \tag{3}$$

Доведення. Очевидно, що інтеграли з рівності (3) існують. Нехай $\{\vec{u}_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ — послідовність функцій з $C^1(\overline{\Omega})$, яка збігається до $\vec{u}(x)$ в нормі $\|\cdot\|_{pqr}^{\nabla,\Gamma}$. Оскільки для $\vec{u}_m(x)$ справедлива формула Остроградського, то

$$\Big|\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u}\, dx - \int_\Gamma \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\Gamma\Big| = \lim_{m\to\infty}\Big|\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_m\, dx - \int_\Gamma \vec{u}_m \cdot \vec{n}\, d\Gamma\Big| = 0.$$

Теорему 7 доведено.

3. Перейдемо тепер до конкретизації енергетичних просторів $H_{\mathrm{L}i}$, $i = 1, 2, 3$, для області Ω простору $\mathbb{R}^3$, обмеженої кусково-гладкою поверхнею Γ.

Розглянемо гільбертові простори $W_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^\nabla(\Omega)$, $W_2 = W_2^1(\Omega) \times \widetilde{W}{}_2^\nabla(\Omega)$, $W_3 = W_2^1(\Omega) \times W_2^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$, елементами яких є вектор-функції $\vec{U}(x)$, такі що $\vec{u}^1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ і $\vec{u}^2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^\nabla(\Omega)$, $\vec{u}^1 \in W_2^1(\Omega)$ і $\vec{u}^2 \in \widetilde{W}{}_2^\nabla(\Omega)$, $\vec{u}^1 \in W_2^1(\Omega)$ і $\vec{u}^2 \in W_2^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$ відповідно. Скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_i$ в просторах W_i, $i = 1,2,3$, визначимо так:

$$(\vec{U},\vec{V})_1 = (\vec{u}^1,\vec{v}^1)_2^1 + (\vec{u}^2,\vec{v}^2)_2^\nabla, \quad (\cdot,\cdot)_2 \equiv (\cdot,\cdot)_1,$$
$$(\vec{U},\vec{V})_3 = (\vec{U},\vec{V})_1 + \int_\Gamma \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 \, d\Gamma,$$

де $(\cdot,\cdot)_2^1$ — скалярний добуток в просторі $W_2^1(\Omega)$. Неважко переконатись в еквівалентності норми $\|\cdot\|_i$ простору W_i і норми $\|\cdot\|_{\mathrm{L}i}$ простору $H_{\mathrm{L}i}$, $i = 1,2$. Якщо додатково припускати, що Ω справджує умову конуса [5], то з еквівалентних нормувань простору $W_2^1(\Omega)$ [1] випливатиме еквівалентність норм $\|\cdot\|_3$ та $\|\cdot\|_{\mathrm{L}3}$.

Можемо сформулювати остаточний результат про опис енергетичних просторів $H_{\mathrm{L}i}$, $i = 1,2,3$, оператора L.

Теорема 8. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — скінченна область, обмежена кусково-гладкою поверхнею Γ. Тоді*

1) $H_{\mathrm{L}1} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^\nabla(\Omega)$.

Якщо Ω належить до класу $C^{0,1}$ [5], то

2) $H_{\mathrm{L}2} = W_2^1(\Omega) \times \widetilde{W}{}_2^\nabla(\Omega)$;

3) $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^\nabla(\Omega) \subset H_{\mathrm{L}3} \subset W_2^1(\Omega) \times W_2^{\nabla,\Gamma}(\Omega)$.

Доведення. З еквівалентності норм $\|\cdot\|_i$ та $\|\cdot\|_{\mathrm{L}i}$, $i = 1,2,3$, випливає, що енергетичні простори $H_{\mathrm{L}i}$ співпадають із замиканнями в нормах $\|\cdot\|_i$ областей визначення $D_i(\mathrm{L})$, $i = 1,2,3$, оператора L. Звідси безпосередньо випливає твердження 1). Умова 2) отримується з відомих результатів про множини щільні в $W_2^1(\Omega)$ [6],[7] та з того, що норма $\|\cdot\|_2^1$ простору $W_2^1(\Omega)$ сильніша за норму $\|\cdot\|_2^\nabla$ простору $W_2^\nabla(\Omega)$. Твердження 3) випливає з того, що $D_1(\mathrm{L}) \subset D_3(\mathrm{L}) \subset C^2(\overline{\Omega})$ і, що замикання множини $\dot{C}^2(\Omega)$ в нормах $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_3$ співпадають. Теорему 8 доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336с.
3. Шилов Г.Е. Лекции по векторному анализу. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 140с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.V. – М.: Физматгиз, 1959. – 656с.
5. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. – Л.: Изд. Ленинград. ун-та, 1985. – 416с.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408с.
7. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800с.

Львівський університет, мех.-мат. ф-т.

Надійшло 10.07.1997