УДК 517.98

КРАТНІ, НЕСТАБІЛЬНІ І НУЛЬОВІ ЕЛЕМЕНТИ СПЕКТРУ В ТЕОРІЇ СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ

В. Бобочко

V. Bobochko. *Divisible, not stable and nought elements of the spectrum in theory of singular pertunbentions*, Matematychni Studii, **10**(1998) 69–78.

This work investigates an asymtotic solution of the system of singular pertubents differential equation in the case where the spectrum of the limited operator contains the divisible, not stable and idintical equal nought elementes.

В. Бобочко. *Кратные, нестабильные и нулевые элементы спектра в теории сингулярных возмущений* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 1. – С.69–78.

Построено равномерную ассимптотику решения системы сингулярно возмущенных дифференциальних уравнений в случае, когда спектр граничного оператора содержит кратные, нестабильные и тождественно равные нулю элементы.

Постановка задачі. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon W'(x,\varepsilon) - AW(x,\varepsilon) = h(x,\varepsilon), \\ &C_1 W(0,\varepsilon) + C_2 W(x_0,\varepsilon) + C_3 W(a,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\alpha + W^0, \end{aligned} \tag{1}$$

при $\varepsilon \to +0, x \in [0,a]$. Тут A — лінійний оператор, заданий в $R^n, W(x,\varepsilon)$ — невідома вектор-функція, $h(x,\varepsilon)$ — задана вектор-функція, аналітична відносно малого параметру, α і W^0 — відомі початкові вектори, C_k, $k = \overline{1,3}$ — діагональні матриці n-го порядку такі, що $C_{1ii} = 1$, $i = \overline{1;q-1}$, $C_{2qq} = 1$, $C_{3ii} = 1$, $i = \overline{q+1,n}$. Всі інші елементи цих матриць тотожньо рівні нулю.

Задачу (1) будемо вивчати за таких умов.

Умова 1^0.

$$A, h(x,\varepsilon) \in C^\infty[I]. \tag{2}$$

Умова 2^0. Оператор A є оператором простої структури і його спектр задовольняє умови:

$$\begin{gathered} \lambda_1(x) \equiv \dots \equiv \lambda_s(x) < \dots < \lambda_{q-1}(x) < \lambda_q(x) < \lambda_{q+1}(x) < \dots < \lambda_m(x); \\ \lambda_{m+1}(x) \equiv \dots \equiv \lambda_p(x) \equiv 0, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\lambda_l = (x-x_l)\widetilde{\lambda}_l(x)$, $\widetilde{\lambda}_l(x) < 0$, $l = \overline{q-1;q+1}$, $x_{q-1} = 0$, $x_q = x_0 \in (0,a)$, $x_{q+1} = a$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47A10, 47A55, 47N20.

З постановки задачі (1) бачимо наступне:

1) векторне рівняння (1) містить в собі як частинний випадок систему рівнянь (тихоновську систему)

$$\begin{cases} \varepsilon y' - A_{11}y - A_{12}Z = h_1(x), \\ Z' - A_{21}y - A_{22}Z = h_2(x); \end{cases} \tag{4}$$

2) спектр граничного оператора A_0 містить в собі кратні і прості стабільні та нестабільні елементи, а також тотожно рівні нулю елементи спектру. Отже, досліджується випадок, коли нестабільні елементи спектру оператора A_0 зливаються з тотожно рівним нулю елементом спектру у відповідних точках. А це означає, що точки $x = 0$, $x = x_0$ і $x = a$ є точками звороту для задачі (1). Хоча ці точки і є точками звороту в розумінні класичного означення, проте, в цьому частинному випадку рівномірна асимптотика розв'язку задачі (1) буде побудована в елементарних функціях.
Тому є сенс дати наступне

Означення. Точки звороту, які дозволяють побудувати рівномірну асимптотику розв'язку в елементарних функціях, називаються *елементарними точками звороту.*

Отже, точки $x = 0$, $x = x_0$ і $x = a$ — елементарні точки звороту для сингулярно збуреної задачі (СЗЗ) (1).

Вироджене рівняння

$$A_0\omega = h_0(x) \tag{5}$$

знаходиться на спектрі, при цьому розв'язок цього рівняння має розриви другого роду в елементарних точках звороту.

Отже, необхідно побудувати досить гладкий розв'язок СЗЗ (1), який би прямував до розривного розв'язку виродженого рівняння (5), при $\varepsilon \to +0$.

Випадок простих стабільних і нестабільних елементів спектру граничного оператора вивчено досить детально (див. [1]), а випадок стабільних елементів елементів спектру описано в монографіях [2]–[3]. Задача (1) з спектром оператора A_0 вигляду (3) раніше не досліджувалась.

Зауважимо ще наступне. Для побудови асимтотики розв'язку рівняння (1) в працях [1]–[2] використаний апарат спряжених операторів і спряжених просторів. У монографії [3] на стор. 96 сказано, що випадок кратних і тотожно рівних нулю елементів спектру привносить багато ускладнень.

На відміну від сказаного, у даній праці використана інша ідея — звідність головного оператора над просторами безрезонансних розв'язків (ПБР), яка розроблена автором і застосована для дослідження задач з точками звороту (див. [4]–[5]).

Зауважимо, що внаслідок того, що оператор A_0 є оператором простої структури, то для дослідження задачі (1) можна було би теж застосувати теорію спряжених операторів і просторів. Проте, в процесі узагальнення на оператори не простої структури, ідея звідності на думку автора значно перспективніша у порівнянні з теорією спряжених операторів і просторів.

1. Розширення збуреної задачі. Нам необхідно виділити всі істотно особливі многовиди (ІОМ), породжені особливою точкою $\varepsilon = 0$. З цією метою, поряд з незалежною змінною x, введемо в розгляд нові вектор-змінні $t = \{t_j\}$, $j = \overline{1, m}$ і $\tau = \{\tau_l\}$, $l = \overline{q-1, q+1}$ за формулами

$$t_j = \varepsilon^{-1} \int_{x(j)}^{x} \lambda_j(x)dx \equiv \varepsilon^{-1}\varphi_j(x) \equiv \Phi_j(x,\varepsilon), \tag{6}$$

$$\tau_l = \exp\{\varepsilon^{-1}\varphi_l(x)\} \int_{x(j)}^{x} \exp\{-\varepsilon^{-1}\varphi_l(x)\}dx \equiv \Psi_l(x,\varepsilon), \tag{7}$$

$$x(j) = \begin{cases} 0, & j = \overline{s, q-1}, \\ x_0, & j = q, \\ a, & j = \overline{q+1, m}. \end{cases} \tag{8}$$

Тоді замість функції $W(x,\varepsilon)$ вивчатимемо нову розширену функцію $\widetilde{W}(x,t,\tau,\varepsilon)$, при цьому розширення проводимо в такий спосіб, щоб справджувалась тотожність

$$\begin{aligned} &\widetilde{W}(x,t,\tau,\varepsilon)|_{t=\Phi(x,\varepsilon),\tau=\Psi(x,\varepsilon)} \equiv W(x,\varepsilon), \\ &\Phi(x,\varepsilon) = \{\Phi_j(x,\varepsilon), j = \overline{s,m}\}, \Psi(x,\varepsilon) = \Psi_l(x,\varepsilon), l = \overline{q-1, q+1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Визначимо повну похідну по змінній x і підставимо її значення в задачу (1). Тоді для визначення розширеної вектор-функції $\widetilde{W}(x,t,\tau,\varepsilon)$ одержимо наступну розширену задачу

$$(L_0 + \varepsilon L_1)\widetilde{W} \equiv \widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{W}(x,t,\tau,\varepsilon) = h(x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$GW \equiv C_1\widetilde{W}(M_0,\varepsilon) + C_2\widetilde{W}(M_{x_0},\varepsilon) + C_3\widetilde{W}(M_0,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\alpha + W^0 \tag{11}$$

$$L_0 = D_\lambda - A \equiv \sum_{j=s}^{m} \lambda_j(x)\partial/\partial t_j + \sum_{l=q-1}^{q+1} \lambda_l(x)\Psi_l(x,\varepsilon)\partial/\partial \tau_l - A \tag{12}$$

$$L_1 \equiv \partial/\partial x + \sum_{l=q-1}^{q+1} \partial/\partial\tau \tag{13}$$

2. Біортогональна система розв'язків. Нехай $f_i(x) \equiv b_i(x)$, $i = \overline{s+1, m-1}$ — власні вектори, що відповідають простим власним значенням $\lambda_i(x)$. Оскільки оператор A є оператором простої структури, то кратному елементу $\lambda_s(x)$ теж відповідає фундаментальна система розв'язків (ФСР). Аналогічно можно сказати і про фундаментальну систему розв'язків (ФСР), що відповідає кратному нульовому елементу $\lambda_m(x) \equiv 0$. Отже, маємо повний набір лінійно незалежних векторів $f_i(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Нехай $f_i^*(x)$, $i = \overline{1,n}$ — фундаментальна система розв'язків оператора $A^* = A'$, спряженого до оператора A.

Виберемо ці дві системи векторів так, щоб вони утворювали біортогональну систему векторів, тобто $(f_i, f_k^*) = \delta_{ik}$, де δ_{ik} — символ Кронекера. Оскільки оператор A є оператором простої структури, то цього завжди можна досягти (див. [6], стор. 218).

3. Простір безрезонансних розв'язків. Розглянемо множини (підпростори) функцій

$$\begin{aligned} &Y_{rij} = \{f_i(x)\alpha_{rij}(x)\exp t_j\}, \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{s,m}, \\ &V_{ril} = \{f_i(x)g_{ril}(x)\tau_l\}, \quad l = \overline{q-1, q+1}, \\ &X_{r_i} = \{f_i(x)\omega_{ri}(x)\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тут

$$\alpha_{rij}(x),\ g_{ril}(x),\ \omega_{ri}(x) \in C^{\infty}[I] \tag{14}$$

З цих підпросторів складемо новий простір вигляду

$$Y_r = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_{ri} = \bigoplus_{i=1}^{n}\Big[\bigoplus_{j=s}^{m} Y_{rij} \bigoplus_{l=q-1}^{q+1} V_{ril} \bigoplus X_{ri}\Big] \tag{15}$$

Елемент простору безрезонансних розв'язків (15) має вигляд

$$W_r(x,t,\tau) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x) W_{ri}(x,t,\tau) \equiv \sum_{i=1}^{n} \widetilde{W}_{ri}(x,t,\tau), \tag{16}$$

де

$$W_{ri}(x,t) = \sum_{j=s}^{m} \alpha_{rij}(x) \exp t_j + \sum_{l=q-1}^{q+1} g_{ril}(x)\tau_l + \omega_{ri}(x). \tag{17}$$

4. Інваріантність ПБР. Вивчимо дію розширеного оператора $\widetilde{L}_{\varepsilon}$ на елементи з ПБР (15). Маємо

$$L_0 W_r(x,t,\tau) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\{\sum_{j=s}^{m}[\lambda_j(x) - \lambda_i(x)]\alpha_r ij(x) \exp t_j + \\ + \sum_{l=q-1}^{q+1}[\lambda_l(x) - \lambda_i(x)] g_{ril}(x)\tau_l - \lambda_i(x)\omega_{ri}(x)\}. \tag{18}$$

Враховуючи розвинення $f_i'(x) = \sum_{k=1}^{n}(f_i'(x), f_k^*(x)) f_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}(x) f_k(x)$, одержуємо

$$L_1 W_r(x,t,\tau) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\Big\{\sum_{j=s}^{m} \widetilde{\alpha}_{rij}(x) \exp t_j + \\ + \sum_{l=q-1}^{q+1} \widetilde{g}_{ril}(x)\tau_l + \widetilde{\omega}_{mi}(x) + \sum_{p=q-1}^{q+1} g_{ril}(x)\Big\}, \tag{19}$$

де

$$\widetilde{\Theta}_{ri}(x) \equiv \Theta_{ri}'(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{\nu i}(x)\Theta_{r\nu}(x), \qquad \Theta_{ri} = \{\alpha_{rij}(x), : g_{ri}(x), : \omega_{ri}(x)\}. \tag{20}$$

Аналізуючи одержані тотожності (18)–(20), отримуємо наступні висновки.

Висновки. *1. Простори Y_r інваріантні відносно операторів L_0 і L_1, а отже і відносно розширеного оператора $\widetilde{L}_{\varepsilon}$.*

2. Оператор L_0 є головним оператором розширеного оператора $\widetilde{L}_{\varepsilon}$ в просторі безрезонансних розв'язків (15).

3. З попередніх висновків випливає, що розширена задача(10) регулярно залежить від малого параметру в ПБР (15).

Отже, ми провели регуляризацію сингулярно збуреної задачі (1).

5. Формалізм побудови розв'язку розширеної задачі. Оскільки розширена задача (10) регулярна відносно малого параметру в ПБР (15), то асимптотику розв'язку цієї задачі шукаємо у вигляді ряду

$$\widetilde{W}(x,t,\tau,\varepsilon) = \sum_{r=1}^{+\infty} \varepsilon^r W(x,t,\tau), : W_r(x,t,\tau) \in Y_r \tag{21}$$

Для визначення коефіцієнтів цього ряду одержимо наступну систему рекурентних задач:

$$L_0 W_{-1}(x,t,\tau) = 0, \quad GW_{-1} = \alpha \tag{22,}$$

$$L_0 W_0(x,t,\tau) = h(x) - L_1 W_{-1}(x,t,\tau), \quad GW_0 = W^0, \tag{23}$$

$$L_0 W_0(x,t,\tau) = -L_1 W_{r-1}(x,t,\tau), \quad GW_r = 0. \tag{24}$$

6. Структура розв'язку виродженого рівняння. Побудуємо і дослідимо розв'язок виродженого рівняння (5). Оскільки спектр оператора A_0 містить кратний елемент $\lambda_{m+1}(x) \equiv 0$, то rang $A_0 = m$, тобто, існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння (5) вигляду

$$\omega_{\text{з.о.}}(x) = \sum_{i=m+1}^{n} c_i(x) f_i(x) \tag{25}$$

і відповідного спряженого рівняння — $A^* w^*(x) = 0$.

Тоді, за третьою теоремою Фредгольма, для того, щоб існував розв'язок неоднорідного рівняння (5) потрібно, щоб права частина цього рівняння була ортогональна до ядра спряженого оператора A^*, тобто, до системи векторів $\{f_i^*(x)\}$, $i = \overline{m+1, n}$.

Запишемо праву частину рівняння (5) у вигляді

$$h_0(x) = \sum_{i=1}^{n} (h_0(x), f_i^*(x)) f_i(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} h_{0i}(x) f_i(x). \tag{26}$$

У відповідності з третьою теоремою Фредгольма, ми повинні вимагати, щоб

$$h_{0i}(x) \equiv 0, \quad i = \overline{m+1, n}.$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай: 1) виконуються умови* 1^0 *і* 2^0*; 2)* $h_0(x) = \sum_{i=1}^{m} h_{0i}(x) f_i(x)$*; 3)* $h_{0l}(x_l) = 0$, $l = \overline{q-1, q+1}$.

Тоді існує досить гладкий розв'язок неоднорідного рівняння (5) для $x \in I$ *вигляду*

$$\omega(x) = \sum_{i=m+1}^{n} c_i(x) f_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{-1}(x) h_{0i}(x) f_i(x), \tag{27}$$

де $c_i(x)$, $i = \overline{m+1, n}$ *— довільні, досить гладкі функції для всіх* $x \in I$.

7. Ўснування розв'язку ітераційного рівняння. Вивчимо питання існування в ПБР (15) розв'язку ітераційного рівняння

$$L_0 W_r(x,t,\tau) = H_r(x,t,\tau). \tag{28}$$

Оскільки ПБР (15) інваріантний відносно оператора L_0, то з необхідністю права частина ітераційного рівняння (28) повинна належати до ПБР (15). Нехай

$$H_r(x,t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\Big\{\sum_{j=s}^{m} \beta_{rij}(x)\exp t_j + \sum_{l=q-1}^{q+1} m_{ril}(x)\tau_l + S_{ri}(x)\Big\}, \tag{29}$$

де $\beta_{rij}(x), m_{ril}(x), S_{ri}(x)$ — відомі, досить гладкі функції для всіх $x \in I$.

Нехай невідома вектор-функція $W_r(x,t,\tau)$ записана формулою (16), коефіцієнти якої підлягають визначенню.

З тотожності (18) бачимо, що оператор L_0 звідний над ПБР (15) (див. монографію [7], стор. 36). А це означає, що він однозначно визначається своїми складовими L_{0i}, тобто, справедливе зображення

$$L_0 = \bigoplus_{i=1}^{n} L_{0i}, \tag{30}$$

де оператори L_{0i} в їх дії на елементи з ПБР (15) легко виписати з тотожності (18).

Тоді векторне рівняння (28) можна замінити n скалярними рівняннями

$$L_{0i}\widetilde{W}_{ri}(x,t,\tau) = \widetilde{H}_{ri}(x,t,\tau), \tag{31}$$

де

$$H_{ri}(x,t,\tau) = \sum_{j=s}^{m} \beta_{rij}(x)\exp t_j + \sum_{l=q-1}^{q+1} m_{ril}(x)\tau_l + S_{ri}(x). \tag{32}$$

Зафіксуємо індекс $i = \overline{1,n}$ і продовжимо дослідження скалярних рівнянь (31) для двох груп індексів.

Для кожного з скалярних рівнянь (31) відповідний оператор L_{0i} звідний над відповідним підпростором Y_{ri}. В цьому випадку, за аналогією з попереднім, ми прийдемо до простіших алгебраїчних рівнянь, з яких однозначно визначимо невідомі коефіцієнти функції $\widetilde{W}_{ri}(x,t,\tau)$ вигляду

$$\begin{aligned} &\alpha_{rij}(x) = [\lambda_j - \lambda_i]^{-1}\beta_{rij}(x), \qquad j = \overline{s,m},\ i \neq j,\\ &g_{ril}(x) = [\lambda_l - \lambda_i]^{-1} m_{ril}(x), \qquad l = \overline{q-1,q+1},\ l \neq i,\\ &\omega_{ri}(x) = -\lambda_i^{-1}(x) S_{ri}(x), \qquad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{33}$$

Розглянемо скалярні рівняння (31) у випадку, коли $i = \overline{m+1,n}$. У даному випадку коефіцієнти $\alpha_{rij}(x)$ і $g_{ril}(x)$ теж будуть визначатись за формулами (33). Оскільки $\lambda_i(x) \equiv 0$ для $i = \overline{m+1,n}$, то в тотожності (18), а отже і в лівих частинах скалярних рівнянь (31) відсутні доданки $\lambda_i(x)\omega_{ri}(x)$ для $i = \overline{m+1,n}$.

Отже, ми повинні вимагати, щоб праві частини відповідних рівнянь не містили доданків $S_{ri}(x)$, $i=\overline{m+1,n}$.

З тотожності (18) легко виписати елементи ядра оператора L_0:

$$\operatorname{Ker} L_0 = \big\{ f_i(x)\exp t_s,\ i=\overline{1,s},\ f_i(x)\exp t_i,\ i=\overline{s+1,m},\ f_l(x)\tau_l,\ l=\overline{q-1,q+1},\\ f_i(x),\ i=\overline{m+1;n}\big\}.$$

Бачимо, що ми однозначно визначили всі коефіцієнти функції $W_r(x,t,\tau)$, окрім коефіцієнтів $\alpha_{ris}(x)\equiv\alpha_{rii}(x)$; $i=\overline{1,s}$; $\alpha_{rii}(x)$, $i=\overline{s+1,m}$, $\omega_{ri}(x)$, $i=\overline{m+1;n}$, $g_{rll}(x)$, $l=\overline{q-1;q+1}$.

Запишемо одержані результати у вигляді наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай: 1) виконуються умови* 1^0 *і* 2^0*; 2)* $H_r(x,t,\tau)\in Y_r$*; 3) права частина рівняння (28) не містить елементів ядра оператора* L_0*; 4)* $S_{rl}(x_l)=0$, $l=\overline{q-1;q+1}$.

Тоді в просторі Y_r *існує розв'язок ітераційного рівняння (28) вигляду*

$$W_r(x,t,\tau)=Z_r(x,t,\tau)+y_r(x,t,\tau). \tag{35}$$

Тут

$$Z_r(x,t,\tau)\equiv\sum_{i=1}^{s} f_i(x)\alpha_{ris}(x)\exp t_s+\sum_{l=q-1}^{q+1} f_l(x)g_{rl}(x)\tau_l+\\ +\sum_{i=s+1}^{m} f_i(x)\alpha_{rii}(x)\exp t_i+\sum_{i=m+1}^{n} f_i(x)\omega_{ri}(x)), \tag{36}$$

де $\alpha_{ris}(x)$, $\alpha_{rii}(x)$, $g_{rl}(x)$, $\omega_{ri}(x)$ *— довільні, досить гладкі функції для* $x\in I$*, функція* $y_r(x,t,\tau)$ *визначається однозначно за формулою*

$$y_r(x,t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=s+1,j\neq i}^{m} f_i(x)\alpha_{rij}(x)\exp t_j+\\ +\sum_{i=s+1}^{n} f_i(x)\alpha_{ris}(x)\exp t_s+\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\omega_{ri}(x), \tag{37}$$

коефіцієнти якої визначаються з формул (33).

8. Побудова головного члена асимптотики розв'язку. Скориставшись теоремами 1 і 2, перейдемо до поступового розв'язку рекурентної системи рівнянь (22)–(24).

Функція $W_{-1}=Z_{-1}(x,t,\tau)$ є розв'язком однорідного рівняння (22) (див. формулу (35)).

Обчислимо праву частину наступного ітераційного рівняння (23) скориставшись для цього тотожністю (19). Для того, щоб для цього рівняння виконувалась умова 3) теореми 2, скористаємось довільністю коефіцієнтів розв'язку рівняння (22). В результаті цього, одержимо диференціальні рівняння ($r=-1$).

$$\begin{aligned} D_j\alpha_{rjj}(x)&\equiv\alpha'_{rjj}(x)+\gamma_{jj}\alpha_{rjj}(x)=0, \qquad j=\overline{s+1,m},\\ D_l g_{rl}(x)&=0, \qquad l=\overline{q-1,q+1}, \end{aligned} \tag{38}$$

та систему диференціальних рівнянь

$$\alpha'_{rs}(x) + P_{1s}(x)\alpha_{rs}(x) \equiv 0, \tag{39}$$

де $\alpha_{rs}(x) = (\alpha_{r1s}, \dots, \alpha_{rss})$, а $P_{1s}(x)$ матриця вигляду

$$P_{1s}(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{s1} \\ \gamma_{1s} & \dots & \gamma_{ss} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

При такому виборі невідомих коефіцієнтів, права частина рівняння (22) матиме вигляд

$$\begin{aligned} h_0(x,t,\tau) \equiv {} & \sum_{i=1}^{m} h_i(x) f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \sum_{\nu=q-1,\nu\neq i}^{q+1} \alpha_{(-1)\nu\nu}(x)\gamma_{\nu i}(x)\tau_\nu - \\ & - \sum_{i=s+1}^{n} f_i(x) \sum_{\nu=1}^{s} \gamma_{\nu i}(x)\alpha_{(-1)\nu\nu}(x) \exp t_s - \\ & - \sum_{l=q-1}^{q+1} g_{(-1)ll}(x) f_l(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \sum_{\nu=s+1,\nu\neq 1}^{m} \alpha_{(-1)\nu\nu}(x)\gamma_{\nu i}(x) \exp t_\nu, \end{aligned} \tag{41}$$

З рівності (41) бачимо, що права частина рівняння (22) вже не містить елементів ядра оператора L_0, тобто, виконується умова 3) теореми 2.

Оскільки на праву частину рівняння (1) накладена умова 2) теореми 1, то умова 4) теореми 2 також виконується.

Нам залишилося ще задовольнити умову 4) теореми 2. Скористаємося довільністю функцій $g_{(-1)ll}(x)$, $l = \overline{q-1, q+1}$. Виберемо початкові значення для цих функцій у вигляді:

$$g_{(-1)ll}(x_l) = h_l(x_l) \equiv h(x_l) b_l^*(x_l) \tag{42}$$

При виконанні вищеназваних умов, в просторі Y_0, згідно теореми 2, існує розв'язок ітераційного ріняння (23), зображений формулами (36)–(37).

На даному етапі ми однозначно визначили функції $g_{(-1)ll}(x)$, $l = \overline{q-1, q+1}$ як розв'язки диференціальних рівнянь з початковими умовами (42), функції $\alpha_{(-1)jj}(x)$, $j = \overline{s+1, m}$ і $\alpha_{(-1)is}(x)$, $i = \overline{1, s}$ будуть теж визначені однозначно, якщо матимемо відповідні початкові значення для цих функцій.

Розв'язок рівняння (22) містить m довільних сталих, одержаних від інтегрування диференціальних рівнянь (38) та системи диференціальних рівнянь (39) у випадку $r = -1$. Для визначення цих сталих, підставимо одержаний розв'язок $W_{-1}(x,t) \equiv Z_{-1}(x,t)$ в крайові умови (22). В результаті цієї підстановки одержимо наступну систему n алгебраїчних рівнянь $(r = -1)$:

$$\Delta(\varepsilon) C_r = \Gamma_r. \tag{43}$$

Тут

$$C_{-1} = colon(\alpha^0_{(-1)1s}, \dots, \alpha^0_{(-1)mm}, 0, \dots, 0), \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{-1} = colon\big(&\alpha_1 - \psi_{(-1)1}(0,\tau(0)), \dots, \alpha_{q-1} - \psi_{(-1)(q-1)}(0,\tau(0)), \alpha_q - \psi_{(-1)q}(x_0,\tau(x_0)), \\ &\alpha_{q+1} - \psi_{(-1)(q+1)}(a,\tau(a)), \dots, \alpha_n - \psi_{(-1)n}(a,\tau(a))\big), \end{aligned} \tag{45}$$

де
$$\psi_{(-1)i}(x,\tau) \equiv \sum_{l=q-1}^{q+1} f_{li}(x) g_{(-1)l}(x)\tau_l, \tag{46}$$
α_s — s-та компонента вектора α.

Вектор C_{-1} містить нульові компоненти. Тоді система (43) при $r=-1$ має тільки $s<n$ невідомих. На наступних ітераційних етапах таке не спостерігається. Ми хочемо побудувати асимтотику розв'язку при $\varepsilon \to +0$. Проведені дослідження показують наступне. Виберемо компоненти вектора α у вигляді:
$$\begin{aligned} &\alpha_i = \psi_{(-1)i}(0,\tau(0)), \qquad i=\overline{1,q-1},\\ &\alpha_q = \psi_{(-1)q}(x_0,\tau(x_0)),\\ &\alpha_i = \psi_{(-1)i}(a,\tau(a)), \qquad i=\overline{q+1,n}. \end{aligned} \tag{47}$$

За таких умов розв'язком однорідної системи (43) буде тотожньо нульовий вектор C_{-1}. А це означає, що розв'язком першої ітераційної задачі (22) є вектор-функція
$$W_{-1}(x,t) \equiv \psi_{-1}(x,\tau) \equiv \sum_{l=q-1}^{q+1} f_l(x) g_{(-1)l}(x)\tau_l, \tag{48}$$
при цьому доданок $\varepsilon^{-1}W_{-1}(x,t)$ обмежений при $\varepsilon \to +0$ на довільному компакті з відрізку $[0;a]$, що не містить точок $x=0$, $x=x_0$, $x=a$.

Перейдемо до наступного циклу, тобто до розв'язання в просторі Y_1 задачі (24) при $r=1$. Обчислимо праву частину цього рівняння і будемо вимагати, щоб вона не містила елементів ядра оператора L_0. Тоді знову одержимо диференціальні рівняння (38) і систему диференціальних рівнянь (39) при $r=0$.

Але окрім цього ми ще одержимо і систему диференціальних рівнянь (див. тотожність (19))
$$\omega_0'(x) + P_{(q+1)n}(x)\omega_0(x) = a_0(x), \tag{49}$$
де $a_0(x)$ — відомий вектор, а
$$\omega_0(x) = colon(\omega_{0(m+1)}(x),\ldots,\omega_{0n}(x)). \tag{50}$$
Для визначення відповідних сталих одержимо систему n алгебраїчних рівнянь (43), де
$$C_0 = colon(\alpha^0_{01s},\ldots,\alpha^0_{0mm},\omega^0_{0(m+1)},\ldots,\omega^0_{0n}). \tag{51}$$
Якщо $\det\Delta(\varepsilon) \neq 0$, то з даної системи рівнянь однозначно визначимо вектор C_0, при цьому його компоненти є величинами порядку $O(1)$ при $\varepsilon \to +0$.

Продовжуючи далі ітераційний процес, за допомогою методу математичної індукції можна показати, що серія задач (22)–(24) асимптотично коректна в ПБР (15).

10. Оцінка залишкового члену асимптотики розв'язку. Запишемо розв'язок розширеної задачі (1) у вигляді
$$W(x,t,\tau,\varepsilon) = \widetilde{W}_p(x,t,\tau,\varepsilon) + \widetilde{\xi}_{p+1}(x,t,\tau,\varepsilon), \tag{52}$$
де $\widetilde{W}_{\varepsilon p}(x,t,\tau,\varepsilon) \equiv \sum_{r=-1}^{p} \varepsilon^r W_r(x,t,\tau)$ — часткова сума ряду (21), а $\widetilde{\xi}_{p+1}(x,t,\tau,\varepsilon)$ — залишковий член цього ряду.

Проведемо звуження тотожності (52) при $t = \Phi(x, \varepsilon)$, $\tau = F(x, \varepsilon)$. Одержимо

$$W(x, \varepsilon) \equiv W_{\varepsilon p}(x, \Phi, F, \varepsilon) + \xi_{p+1}(x, \Phi, F, \varepsilon). \tag{53}$$

Застосовуючи методику праць [1], [4–5], можна показати, що для залишкового члена асимптотики розв'язку збуреної задачі (1) справедлива оцінка

$$||| \, \xi_{p+1}(x, \Phi, F, \varepsilon) \, |||_{C[I]} \leq K\varepsilon^{p+1}, \tag{54}$$

де постійна K не залежить від $x \in I$ і малого параметру $\varepsilon > 0$.

Сформулюємо у вигляді загальної теореми одержані результати.

Теорема 3. *Нехай: 1) виконуються умови* 1^0 *і* 2^0*; 2)* $\det \Delta_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2$; $f_{qq}(x_0) \neq 0$*; 3)* $h_0(x) = \sum_{i=1}^{m} h_0 i(x) f_i(x)$.

Тоді для досить малих значень параметру $\varepsilon > 0$*: а) ввівши нові вектор змінні* t *і* τ *згідно формул (6) і (7), за описаним алгоритмом сингулярно збуреній задачі (1) поставлена у відповідність розширена задача (10); б) в просторі безрезонансних розв'язків (15) розширена задача (10) регулярна відносно малого параметру* $\varepsilon > 0$*; в) для розв'язку розширеної задачі (10) в ПБР єдиним чином можна побудувати асимптотичний ряд (21); г) звуження ряду (21) для* $t = \Phi(x, \varepsilon)$ *і* $\tau = F(x, \varepsilon)$*, тобто, ряд*

$$W(x, \varepsilon) \equiv \sum_{r=-1}^{+\infty} \varepsilon^r W_r(x, \Phi(x, \varepsilon), F(x, \varepsilon), \varepsilon)$$

є асимптотичним рядом розв'язку СЗЗ (1); д) для залишкового члену ряду розв'язку СЗЗ (1) справедлива оцінка (54); є) на довільному компакті відрізка I, який не містить нестабільних точок $x = 0$, $x = x_0$ *і* $x = a$ *справедлива гранична рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \omega(x, \varepsilon) = \omega(x), \tag{55}$$

де $\omega(x)$ *— розв'язок виродженого векторного рівняння (5).*

ЛІТЕРАТУРА

1. Бобочко В.М., Маркуш І.І. Асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь із нестабільним спектром граничного оператора. – Київ: ІСДО, 1993. – 216с.
2. Ломов С.А. Введение в теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400с.
3. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений. – Киев: Высшая школа, 1989. – 236с.
4. Бобочко В.Н. *Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота* Диф. Уравн. – 1991. – Т.27, №9. – С.1505–1515.
5. Бобочко В.М. *Точка звороту в ситемі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором* Укр. матем. ж. – 1996. – Т.48, №2. – С.147–160.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Изд-ство техн.-теор. лит., 1953. – 492с.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740с.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

Шевченка 1, Кіровоград 316050.

Надійшло 10.06.1996