Математичні Студії. Т.10, №1 Matematychni Studii. V.10, No.1

УДК 517.956

ОБЕРНЕНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА

Г.І. Берегова

G. Beregova. *Inverse hyperbolic Stefan problem*, Matematychni Studii, **10**(1998) 41–53.

Stefan problem for general strictly hyperbolic equation of the second order with a unknown right part $f(t)$ is considered. With the help of a method characteristic and theorem Banach is proved correct solvability of a problem for small t.

Берегова Г.И. *Обратная гиперболическая задача Стефана* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 1. – С.41–53.

Рассматривается задача Стефана для общего строго гиперболического уравнения второго порядка с неизвестной правой частью $f(t)$. С помощью метода характеристик и теоремы Банаха доказана корректная разрешимость задачи для малых t.

Задачі з невідомими границями (задачі Стефана) мають важливе прикладне значення. Детальний аналіз цієї проблематики для параболічних та еліптичних рівнянь дано в праці [1]. Різні математичні моделі проблем газової динаміки, теплопровідності (коли швидкість розповсюдження тепла скінченна) приводять до розв'язування задач з невідомими границями для гіперболічних рівнянь [2,4,9,10]. Крайові задачі про знаходження розв'язку та коефіцієнтів гіперболічного рівняння чи граничних умов (обернені задачі) виникають в проблемах квантової теорії поля, атомної фізики, теорії коливань, сейсміки [6–8]. Один із фізичних процесів, математична модель якого зводиться до вивчення оберненої гіперболічної задачі Стефана наведено в [3].

В даній статті розглядається питання про знаходження розв'язку граничної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку з невідомим коефіцієнтом правої частини, причому границі області також апріорі є невідомими. Додаткова умова для визначення коефіцієнта задається в інтегральній формі, а умова на краю області є аналогом закону Ньютона для руху границі [10]. Такого вигляду прямі задачі (коефіцієнти відомі) виникають при вивченні коливань п'єзоелектричного перетворювача [11], у теорії біопопуляцій [12], в задачах про рух поршня [9,10].

За допомогою методу характеристик, використовуючи результати праць [2,4,5], поставлена задача зводиться до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду. Дослідження останньої проводиться за допомогою принципу стисних відображень.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35R30.

Нехай G — півплощина при $t>0$, $G_T\subset G$ — область, обмежена наперед невідомими кривими $\gamma_i: x=a_i(t)$, $a_i(0)=a_i^0$ $(i=1,2)$ та прямою $t=T$, a_i^0 — відомі константи. В області G_T розглянемо строго гіперболічне рівняння

$$u_{tt}+a_1(x,t)u_{xt}+a_2(x,t)u_{xx}=b_1(x,t)u_t+b_2(x,t)u_x+b(x,t)u+f(t)g(x,t), \quad (1)$$

в якому крім функції $u(x,t)$ невідомою є також і функція $f(t)$. Задамо початкові умови

$$u(x,0)=\beta_1(x), \quad u_t(x,0)=\beta_2(x), \qquad x\in[a_1^0,a_2^0], \quad (2)$$

граничні умови

$$u_x(a_1(t),t)=\nu_1(t), \quad u_x(a_2(t),t)=\nu_2(t), \qquad t\in[0,T], \quad (3)$$

додаткову умову

$$\int_{a_1(t)}^{a_2(t)}\alpha(x,t)u(x,t)\,dx=h(t), \qquad t\in[0,T], \quad (4)$$

та умови на невідомі границі

$$\begin{gathered}a_i''(t)=H_i\big(t,a_1(t),a_2(t),a_1'(t),a_2'(t),u(a_1(t),t),u(a_2(t),t)\big),\\ a_i(0)=a_i^0, \quad a_i'(0)=\alpha_i^0, \quad i=1,2.\end{gathered} \quad (5)$$

Надалі вважатимемо, що

$$\lambda_1(a_i^0,0)-\alpha_i^0>0, \quad \lambda_2(a_i^0,0)-\alpha_i^0<0, \quad i=1,2, \quad (6)$$

де λ_1,λ_2 — корені характеристичного рівняння $\lambda^2+a_1(x,t)\lambda+a_2(x,t)=0$.

Означення. Розв'язком задачі (1)–(5) назвемо функції $a_i(t)\in C^2\big([0,T]\big)$ $(i=1,2)$, та узагальнений розв'язок $\big(u(x,t),f(t)\big)\in C^{1,1}(\bar{G}_T)\times C([0,T])$ задачі (1)–(4) (зміст якого буде уточнено пізніше), які задовольняють умову (5).

Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай*

1) $a_i(x,t)\in C^{2,1}(\overline{P}_0)$, $b_i(x,t)\in C^{1,0}(\overline{P}_0)$ *$(i=1,2)$*, $b(x,t)\in C^{1,0}(\overline{P}_0)$, $g(x,t)\in C^{1,0}(\overline{P}_0)$, *де* $P_0=\{(x,t): 0<t<\varepsilon_0,\ x\in\mathbb{R}\}$ *для деякого* $\varepsilon_0\in(0,T]$;
2) $\alpha(x,t)\in C^{1,2}(\overline{P}_0)$, $h(t)\in C^2([0,\varepsilon_0])$, $\beta_i(x)\in C^{3-i}([a_1^0,a_2^0])$, $\nu_i(t)\in C^1([0,\varepsilon_0])(i=1,2)$;
3) $H_i(t,x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2)$ *визначені і неперервні в області* $P_1=[0,\varepsilon_0]\times\mathbb{R}^6$ *і задовольняють умову Ліпшиця зі сталими* L_{H_i} *за всіма змінними крім* t;
4) $\displaystyle\int_{a_1^0}^{a_2^0}\alpha(x,0)g(x,0)\,dx\neq 0$;
5) *виконуються умови узгодження нульового*

$$\beta_1'(a_i^0)=\nu_i(0), \quad i=1,2, \qquad \int_{a_1^0}^{a_2^0}\alpha(x,0)\beta_1(x)\,dx=h(0),$$

та першого порядків

$$\big(\lambda_1(a_i^0,0)-\lambda_2(a_i^0,0)\big)\big(\beta_2(a_i^0)+\nu_i'(0)-\beta_1''(a_i^0)\alpha_i^0\big)=2\beta_1'(a_i^0)\,\left(\lambda_1\lambda_{2x}'-\lambda_2\lambda_{1x}'\right)\big|_{(a_i^0,0)},$$

$$\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\alpha(a_i^0,0)\beta_1(a_i^0)\alpha_i^0+\int_{a_1^0}^{a_2^0}\big[\alpha_t(x,0)\beta_1(x)+\alpha(x,0)\beta_2(x)\big]\,dx=h'(0).$$

Тоді для деякого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ в області $\overline{G}_\varepsilon$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).

Доведення. В просторі неперервних вектор-функцій $a(t)=\big(a_1(t),a_2(t),a_1'(t),a_2'(t)\big)\in\big[C[0,\varepsilon_1]\big]^4$, де $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0]$ виберемо множину

$$D_{\varepsilon_1}=\Big\{a(t):a(t)\in\big[C^1[0,\varepsilon_1]\big]^4\ \ \big(\text{тобто } a_i(t)\in C^2\big([0,\varepsilon_1]\big)\big),$$
$$|a_i(t)-a_i^0|\le\varepsilon_1\big(\alpha_i^0+K_i\varepsilon_1/2\big),\ \ |a_i'(t)-\alpha_i^0|\le K_i\varepsilon_1,\ \ i=1,2\Big\},$$

де K_i — сталі, які обмежують неперервні функції $H_i(\ldots)$. При цьому, за неперервністю функцій $\lambda_i(x,t)$, $a_i'(t)$ з умови (6) випливає, що можна вибрати ε_1 так, щоб для всіх $t\in[0,\varepsilon_1]$

$$\lambda_1(a_i(t),t)-a_i'(t)>0,\lambda_2(a_i(t),t)-a_i'(t)<0,\quad i=1,2.$$

Задамо на D_{ε_1} метрику

$$\varrho\left(a^1(t),a^2(t)\right)=\sum_{i=1}^{2}\Big\{\max_{t\in[0,\varepsilon_1]}|a_i^1(t)-a_i^2(t)|+\max_{t\in[0,\varepsilon_1]}|a_i^{1'}(t)-a_i^{2'}(t)|\Big\}.$$

Для кожної вектор-функції $a(t)\in D_{\varepsilon_1}$ отримаємо обернену задачу (1)–(4) (задачу про знаходження $f(t)$ та $u(x,t)$).

Зведемо рівняння (1) до системи рівнянь першого порядку в припущенні, що функція $u(x,t)$ є двічі неперервно диференційовна в $\bar{G}_{\varepsilon_1}$, а $f(t)\in C([0,\varepsilon_1])$ і справджуються рівності (1)–(4). Для цього введемо оператори

$$M_i\Big(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\Big)=\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_{3-i}(x,t)\frac{\partial}{\partial x},\quad i=1,2. \tag{7}$$

Очевидно, що головна частина рівняння (1) збігається з

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Big)M_i\big(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\big)u,\quad i=1,2.$$

Вводячи $v_i(x,t)=M_i\big(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\big)u$, після перетворень запишемо рівняння (1) у вигляді системи

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}-\lambda_i(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x}=b_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+\Big(b_2(x,t)-\frac{\partial\lambda_{3-i}}{\partial t}+\lambda_i(x,t)\frac{\partial\lambda_{3-i}}{\partial x}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+b(x,t)u+f(t)g(x,t),\qquad i=1,2. \tag{8}$$

З позначень, зокрема, випливає, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\lambda_1(x,t)-\lambda_2(x,t)}v_1(x,t) - \frac{1}{\lambda_1(x,t)-\lambda_2(x,t)}v_2(x,t),\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\lambda_1(x,t)}{\lambda_1(x,t)-\lambda_2(x,t)}v_1(x,t) - \frac{\lambda_2(x,t)}{\lambda_1(x,t)-\lambda_2(x,t)}v_2(x,t).\end{aligned} \tag{9}$$

Нехай l: $\xi = \psi(\tau;x,t)$ гладка крива, яка з'єднує довільну точку $(x,t)\in\bar{G}_{\varepsilon_1}$ з відрізком $[a_1^0, a_2^0]$, повністю лежить в $\bar{G}_{\varepsilon_1}$ і задається рівнянням

$$\psi(\tau;x,t) = a_1(\tau) + \frac{a_2(\tau)-a_1(\tau)}{a_2(t)-a_1(t)}\big(x-a_1(t)\big), \quad 0\le\tau\le t.$$

Тоді $\forall(x,t)\in\bar{G}_{\varepsilon_1}$ має місце зображення

$$u(x,t) = \beta_1(\psi(0;x,t)) + \int_0^t \sum_{j=1}^2 A_j(\psi(\tau;x,t),\tau)v_j(\psi(\tau;x,t),\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

де

$$A_j(\psi(\tau;x,t),\tau) = (-1)^{j+1}\frac{\lambda_j(\psi(\tau;x,t),\tau) + \frac{\partial\psi(\tau;x,t)}{\partial\tau}}{\lambda_1(\psi(\tau;x,t),\tau) - \lambda_2(\psi(\tau;x,t),\tau)}, \quad j=1,2.$$

Підставляючи (9) і (10) в (8), отримуємо

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda_i(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^2 a_{ij}(x,t)v_j(x,t) +$$
$$+\int_0^t \sum_{j=1}^2 B_j(\tau,x,t)v_j(\psi(\tau;x,t),\tau)\,d\tau + f(t)g(x,t) + B(x,t), \quad i=1,2. \tag{11}$$

Тут

$$a_{ij}(x,t) = (-1)^{j+1}\frac{b_1(x,t)\lambda_j(x,t) + b_2(x,t) - \frac{\partial\lambda_{3-i}(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial\lambda_{3-i}(x,t)}{\partial x}}{\lambda_1(x,t)-\lambda_2(x,t)},$$
$$B_j(\tau,x,t) = b(x,t)A_j(\psi(\tau;x,t),\tau), \quad B(x,t) = b(x,t)\beta_1(\psi(0;x,t)).$$

Використовуючи рівності (2)–(3), (7) та (9), одержимо початкові та граничні умови для системи (11):

$$v_i(x,0) = \beta_2(x) - \lambda_{3-i}(x,0)\beta_1'(x) \equiv q_i(x), \quad i=1,2, \tag{12}$$

$$v_1(a_i(t),t) - v_2(a_i(t),t) = \nu_i(t)\big(\lambda_2(a_i(t),t) - \lambda_1(a_i(t),t)\big) \equiv \gamma_i(t), \quad i=1,2. \tag{13}$$

Підставимо (10) в умову (4). Тоді

$$\int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \alpha(x,t)\int_0^t \sum_{j=1}^2 A_j(\psi(\tau;x,t),\tau)v_j(\psi(\tau;x,t),\tau)\,d\tau dx = h_1(t), \tag{14}$$

де $h_1(t) = h(t) - \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \alpha(x,t)\beta_1(\psi(0;x,t))\,dx$.

Розв'язком оберненої задачі (11)–(14) назвемо трійку функцій $\big(v_1(x,t), v_2(x,t), f(t)\big) \in C^1(\bar{G}_T) \times C^1(\bar{G}_T) \times \mathrm{C}([0,T])$, яка задовольняє рівняння (11) та умови (12)–(14). Тоді пару $\big(u(x,t), f(t)\big) \in C^{1,1}(\bar{G}_T) \times C([0,T])$, де функція $u(x,t)$ подається зображенням (10), назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Отже, задача (1)–(4) про знаходження $f(t), u(x,t)$, зводиться до задачі (11)–(14) з невідомими $f(t), v_1(x,t), v_2(x,t)$. Цю задачу будемо розв'язувати методом характеристик. Введемо позначення

$$v_i(a_i(t),t) = \mu_i(t), \qquad i = 1,2. \tag{15}$$

Нехай $\varphi_i(\tau;x,t)$ — розв'язок характеристичного рівняння $d\xi\,/d\tau = -\lambda_i(\xi,\tau)$, $i=1,2$ при $\xi(t) = x$, де $(x,t) \in G_{\varepsilon_1}$, а $t_i(x,t)$ — ордината точки перетину i-ої характеристики з межею G_{ε_1}. Візьмемо $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1]$ таке, щоб характеристики, випущені з кутових точок $(a_i^0, 0)$, в області G_{ε_2} не перетиналися. Тоді ці характеристики розбивають G_{ε_2} на три підобласті: $G_{\varepsilon_2} = \bigcup_{j=0}^2 G_j$.

Інтегруючи (11) в кожній G_j вздовж характеристик [2], отримуємо

$$\begin{aligned} v_i(x,t) = \omega_i(x,t) + \int_{\chi_i(x,t)}^{t} \Big[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) v_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + B(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + \\ + \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{2} B_j(\eta,\varphi_i(\tau;x,t),\tau) v_j(\psi(\eta;\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\eta)\,d\eta + \\ + f(\tau) g(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Big] d\tau, \qquad i = 1,2, \end{aligned} \tag{16}$$

де

$$\omega_i(x,t) = \begin{cases} q_i(\varphi_i(0;x,t)), & \text{при} \quad (x,t) \in G_0 \cup G_{3-i}; \\ \mu_i(t_i(x,t)), & \text{при} \quad (x,t) \in G_i; \end{cases}$$

$$\chi_i(x,t) = \begin{cases} t_i(x,t), & \text{при} \quad (x,t) \in G_i; \\ 0, & \text{при} \quad (x,t) \in G_0 \cup G_{3-i}. \end{cases}$$

Для того, щоб функції $v_i(x,t)$ при переході з G_0 в G_1 і G_2 були неперервні необхідно, щоб

$$\lim_{\substack{(x,t)\in G_0\cup G_{3-i} \\ (x,t)\to(a_i^0,0)}} v_i(x,t) = \lim_{\substack{(x,t)\in G_i \\ (x,t)\to(a_i^0,0)}} v_i(x,t),$$

тобто

$$q_i(a_i^0) = \mu_i(a_i^0), \qquad i = 1,2. \tag{17}$$

Функції μ_i знаходимо з граничних умов (13) шляхом підстановки туди (16). В результаті одержимо

$$\begin{aligned} \mu_i(t) = q_{3-i}(\varphi_{3-i}(0;a_i(t),t)) + \int_0^t \Big[\sum_{j=1}^{2} a_{3-i,j}(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau) v_j(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau) + \\ + \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{2} B_j(\eta,\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau) v_j(\psi(\eta;\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau),\eta)\,d\eta + \\ + f(\tau) g(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau) + B(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau)\Big]\,d\tau + (-1)^{i+1}\gamma_i(t), \qquad i = 1,2. \end{aligned} \tag{18}$$

Легко переконатися в тому, що якщо виконуються умови узгодження нульового порядку пункту 5) теореми, то функції $\mu_i(t)$, виражені співвідношеннями (18), задовольняють умови (17).

В рівності (14) змінимо порядок інтегрування і зробимо заміну змінних $\psi(\tau; x, t) = y$. Причому функція $\psi(\tau; x, t)$ така, що $x = \psi(t; y, \tau)$. Тоді (14) перепишеться у вигляді

$$\int_0^t d\tau \int_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \alpha(\psi(t; y, \tau), t) \sum_{j=1}^{2} A_j(y, \tau) v_j(y, \tau) \frac{\partial \psi(t; y, \tau)}{\partial y}\, dy = h_1(t). \tag{19}$$

Тут

$$A_j(y, \tau) = (-1)^{j+1} \frac{a_1'(\tau) + \frac{a_2'(\tau) - a_1'(\tau)}{a_2(\tau) - a_1(\tau)} \big(y - a_1(\tau)\big) + \lambda_j(y, \tau)}{\lambda_1(y, \tau) - \lambda_2(y, \tau)}.$$

Співвідношення (19) двічі продиференціюємо за t. В результаті отримаємо

$$\sum_{i=1}^{2} (-1)^i \alpha(a_i(t), t) \sum_{j=1}^{2} A_j(a_i(t), t) v_j(a_i(t), t) a_i'(t) +$$
$$+ \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \sum_{j=1}^{2} C_j^1\big(y, t; a_1''(t), a_2''(t)\big) v_j(y, t)\, dy + \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \alpha(y, t) \sum_{j=1}^{2} A_j(y, t) \frac{\partial v_j(y, t)}{\partial t}\, dy +$$
$$+ \int_0^{\tau} d\tau \int_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \sum_{j=1}^{2} C_j^2\big(\tau, y, t; a_1''(t), a_2''(t)\big) v_j(y, t)\, dy = h_1''(t), \tag{20}$$

тут $a_i''(t)$ входять в C_j^k лінійно. Підставимо в останню рівність перетворену за допомогою (10) праву частину формули (5), а саме,

$$a_i''(t) = \tilde{H}_i\big(t, a_1(t), a_2(t), a_1'(t), a_2'(t), v(a_1(\tau), \tau), v(a_2(\tau), \tau)\big), \qquad i = 1, 2, \tag{21}$$

де $v = (v_1, v_2)$, а функції $\tilde{H}_i$ зберігають всі властивості H_i, тобто $\tilde{H}_i$ неперервні в області визначення і задовольняють умову Ліпшиця за всіма змінними крім t.

Враховуючи (15), з (20) отримаємо

$$-\alpha(a_1(t), t) \Big[A_1(a_1(t), t) \mu_1(t) + A_2(a_1(t), t) \big(\mu_1(t) - \gamma_1(t)\big) \Big] a_1'(t) +$$
$$+ \alpha(a_2(t), t) \Big[A_1(a_2(t), t) \big(\mu_2(t) + \gamma_2(t)\big) + A_2(a_1(t), t) \mu_2(t) \Big] a_2'(t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{a_1(t)}^{\varphi_i(t; a_i^0, 0)} C_i^1\big(y, t; \tilde{H}_1, \tilde{H}_2\big) v_i(y, t)\, dy + \sum_{i=1}^{2} \int_{\varphi_i(t; a_i^0, 0)}^{a_2(t)} C_i^1\big(y, t; \tilde{H}_1, \tilde{H}_2\big) v_i(y, t)\, dy +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{a_1(t)}^{\varphi_i(t; a_i^0, 0)} \alpha(y, t) A_i(y, t) \frac{\partial v_i(y, t)}{\partial t}\, dy + \sum_{i=1}^{2} \int_{\varphi_i(t; a_i^0, 0)}^{a_2(t)} \alpha(y, t) A_i(y, t) \frac{\partial v_i(y, t)}{\partial t}\, dy +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \sum_{j=1}^{2} C_j^2\big(\tau, y, t; \tilde{H}_1, \tilde{H}_2\big) v_j(y, t)\, dy = h_1''(t).$$

З урахуванням (16), (18) цей вираз перепишеться так:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\alpha(a_i(t),t)a_i'(t)\Big[q_{3-i}(\varphi_{3-i}(0;a_i(t),t))+\\
&\quad+\int_0^t\Big[\sum_{j=1}^{2}a_{3-i,j}(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau)v_j(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau)+\\
&\qquad+\int_0^\tau\sum_{j=1}^{2}B_j(\eta,\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau)v_j(\psi(\eta;\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau),\eta)\,d\eta+\\
&\qquad+f(\tau)g(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau)+B(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau)\Big]\,d\tau+(-1)^{i+1}\gamma_i(t)\Big]+\\
&+\sum_{i=1}^{2}\alpha(a_i(t),t)a_i'(t)A_{3-i}(a_i(t),t)\gamma_i(t)+\\
&+\sum_{i=1}^{2}\int_{a_1(t)}^{a_2(t)}\alpha(y,t)A_i(y,t)\Big(\sum_{j=1}^{2}a_{ij}(y,t)v_j(y,t)+f(t)g(y,t)+B(y,t)+\\
&\qquad+\int_0^\tau\sum_{j=1}^{2}B_j(\eta,y,t)v_j(\psi(\eta;y,t),\eta)d\eta\Big)\,dy+\\
&+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_{a_i(t)}^{\varphi_i(t;a_i^0,0)}\alpha(y,t)A_i(y,t)\times\\
&\times\Big[\int_0^{t_i(y,t)}\Big\{\sum_{j=1}^{2}\Big(\frac{\partial a_{3-i,j}(x,\tau)}{\partial x}v_j(x,\tau)+\\
&\quad+\int_0^\tau\Big\{\frac{\partial B_j(\eta,x,\tau)}{\partial x}v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)+B_j(\eta,x,\tau)\frac{\partial v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)}{\partial x}\frac{\partial\psi(\eta;x,\tau)}{\partial x}\Big\}\,d\eta+\\
&\qquad+a_{3-i,j}(x,\tau)\frac{\partial v_j(x,\tau)}{\partial x}\Big)+f(\tau)\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x}+\\
&\qquad+\frac{\partial B(x,\tau)}{\partial x}\Big\}\Big|_{x=\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t))}\times\Big(\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial y}a_i'+\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t}\Big)\frac{\partial t_i(y,t)}{\partial t}\,d\tau+\\
&\quad+\int_{t_i(y,t)}^{t}\Big\{\sum_{j=1}^{2}\Big(\frac{\partial a_{ij}(x,\tau)}{\partial x}v_j(x,\tau)+a_{ij}(x,\tau)\frac{\partial v_j(x,\tau)}{\partial x}+\\
&\quad+\int_0^\tau\Big\{\frac{\partial B_j(\eta,x,\tau)}{\partial x}v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)+B_j(\eta,x,\tau)\frac{\partial v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)}{\partial x}\frac{\partial\psi(\eta;x,\tau)}{\partial x}\Big\}d\eta\Big)+\\
&\qquad+f(\tau)\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x}+\frac{\partial B(x,\tau)}{\partial x}\Big\}\Big|_{x=\varphi_i(\tau;y,t)}\times\frac{\partial\varphi_i(\tau;y,t)}{\partial t}\,d\tau+\\
&\quad+\frac{\partial t_i(y,t)}{\partial t}\Big(\frac{\partial q_{3-i}\big(\varphi_{3-i}(0;a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t))\big)}{\partial y}\Big(\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial y}a_i'+\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t}\Big)+\\
&\qquad+(-1)^{i+1}\frac{\partial\gamma_i\big(t_i(y,t)\big)}{\partial t}\Big)\Big]\,dy+
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_{\varphi_i(t;a_i^0,0)}^{a_{3-i}(t)}\alpha(y,t)A_i(y,t)\Bigg[\frac{\partial q_i\big(\varphi_i(0;y,t)\big)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i(0;y,t)}{\partial t}+$$

$$+\int_0^t\Bigg\{\sum_{j=1}^{2}\Bigg(\frac{\partial a_{ij}(x,\tau)}{\partial x}v_j(x,\tau)+a_{ij}(x,\tau)\frac{\partial v_j(x,\tau)}{\partial x}+$$

$$+\int_0^\tau\Big\{\frac{\partial B_j(\eta,x,\tau)}{\partial x}v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)+B_j(\eta,x,\tau)\frac{\partial v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)}{\partial x}\frac{\partial\psi(\eta;x,\tau)}{\partial x}\Big\}d\eta\Bigg)+$$

$$+f(\tau)\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x}+\frac{\partial B(x,\tau)}{\partial x}\Bigg\}\Bigg|_{x=\varphi_i(\tau;y,t)}\times\frac{\partial\varphi_i(\tau;y,t)}{\partial t}\,d\tau\Bigg]dy+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_{a_i(t)}^{\varphi_i(t;a_i^0,0)}C_i^1\big(y,t;\tilde H_1,\tilde H_2\big)\Bigg[q_{3-i}\big(\varphi_{3-i}(0;a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t))\big)+$$

$$+\int_0^{t_i(y,t)}\Bigg\{\sum_{j=1}^{2}\Big(a_{3-i,j}(x,\tau)v_j(x,\tau)+\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)d\eta\Big)+$$

$$+f(\tau)g(x,\tau)+B(x,\tau)\Bigg\}\Bigg|_{x=\varphi_{3-i}\left(\tau;a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t)\right)}d\tau+$$

$$+\int_{t_i(y,t)}^{t}\Bigg\{\sum_{j=1}^{2}\Big(\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)d\eta+a_{ij}(x,\tau)v_j(x,\tau)\Big)+$$

$$+f(\tau)g(x,\tau)+B(x,\tau)\Bigg\}\Bigg|_{x=\varphi_i(\tau;y,t)}d\tau+(-1)^{i+1}\gamma_i\big(t_i(y,t)\big)\Bigg]dy+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_{\varphi_i(t;a_i^0,0)}^{a_{3-i}(t)}C_i^1\big(y,t;\tilde H_1,\tilde H_2\big)\Bigg[q_i\big(\varphi_i(0;y,t)\big)+$$

$$+\int_0^t\Bigg\{\sum_{j=1}^{2}\Big(a_{ij}(x,\tau)v_j(x,\tau)+\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)\,d\eta\Big)+$$

$$+f(\tau)g(x,\tau)+B(x,\tau)\Bigg\}\Bigg|_{x=\varphi_i(\tau;y,t)}d\tau\Bigg]dy+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{a_i(t)}^{\varphi_i(t;a_i^0,0)}\alpha(y,t)A_i(y,t)\sum_{j=1}^{2}v_j\big(a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t)\big)\big(a_{2j}\big(a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t)\big)-$$

$$-a_{1j}\big(a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t)\big)\big)\frac{\partial t_i(y,t)}{\partial t}\,dy+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)}\sum_{j=1}^{2}C_j^2\big(\tau,y,t;\tilde H_1,\tilde H_2\big)v_j(y,t)\,dy=h_1''(t),$$

В останньому співвідношенні проведемо наступні перетворення [5]: в подвійних і потрійних інтегралах змінюємо порядок інтегрування з метою отримання доданків типу Вольтерра, а потім, де потрібно, у внутрішніх інтегралах від змінної y переходимо до x шляхом заміни змінних $x=\varphi_{3-i}\big(\tau;a_i(t_i(y,t)),t_i(y,t)\big)$ або $x=\varphi_i(\tau;y,t)$. У передостанньому доданку робимо заміну змінних $\tau=t_i(y,t)$.

Після цих перетворень отримаємо рівняння типу Вольтерра 2-го роду стосовно $f(t)$, в яке, також, входять невідомі функції v_j та $\frac{\partial v_j}{\partial x}$ $(j=1,2)$

$$
\begin{aligned}
&f(t)\int_{a_1(t)}^{a_2(t)}\alpha(y,t)g(y,t)\,dy=\\
&=\int_0^t f(\tau)\Bigg[\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\alpha(a_i(t),t)a_i'(t)g\big(\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t),\tau\big)+\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i}\int_{a_i(\tau)}^{\varphi_i(\tau;a_{3-i}(t),t)}\alpha(\varphi_i(t;x,\tau),t)A_i(\varphi_i(t;x,\tau),t)\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i(t;x,\tau)}{\partial x}\times\\
&\qquad\qquad\times\left.\frac{\partial\varphi_i(\tau;y,t)}{\partial t}\right|_{y=\varphi_i(t;x,\tau)}dx+\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\int_{a_i(\tau)}^{\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t)}\alpha(\rho_i(\tau,t,x),t)A_i(\rho_i(\tau,t,x),t)\frac{\partial g(x,\tau)}{\partial x}\times\\
&\qquad\qquad\times\Big(\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial y}a_i'+\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t}\Big)\left.\frac{\partial t_i(y,t)}{\partial t}\right|_{y=\rho_i(\tau,t,x)}\times\frac{\partial\rho_i(\tau,t,x)}{\partial x}\,dx\Bigg]d\tau+\\
&+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i}\int_0^t\Bigg[\int_{a_i(\tau)}^{\varphi_i(\tau;a_{3-i}(t),t)}\alpha(\varphi_i(t;x,\tau),t)A_i(\varphi_i(t;x,\tau),t)\times\\
&\qquad\times\sum_{j=1}^{2}\bigg(a_{ij}(x,\tau)\frac{\partial v_j(x,\tau)}{\partial x}+\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)\frac{\partial v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)}{\partial x}\frac{\partial\psi(\eta;x,\tau)}{\partial x}d\eta\bigg)\times\\
&\qquad\qquad\times\frac{\partial\varphi_i(t;x,\tau)}{\partial x}\left.\frac{\partial\varphi_i(\tau;y,t)}{\partial t}\right|_{y=\varphi_i(t;x,\tau)}dx-\\
&\qquad-\int_{a_i(\tau)}^{\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t)}\alpha(\rho_i(\tau,t,x),t)A_i(\rho_i(\tau,t,x),t)\Big(\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial y}a_i'+\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t}\Big)\times\\
&\qquad\qquad\times\left.\frac{\partial t_i(y,t)}{\partial t}\right|_{y=\rho_i(\tau,t,x)}\frac{\partial\rho_i(\tau,t,x)}{\partial x}\times\\
&\qquad\times\bigg(a_{3-i,j}(x,\tau)\frac{\partial v_j(x,\tau)}{\partial x}+\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)\frac{\partial v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)}{\partial x}\frac{\partial\psi(\eta;x,\tau)}{\partial x}d\eta\bigg)dx\Bigg]d\tau+\\
&+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i}\int_0^t\Bigg[-\int_{a_i(\tau)}^{\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t)}\bigg(\alpha(\rho_i(\tau,t,x),t)A_i(\rho_i(\tau,t,x),t)\left.\frac{\partial t_i(y,t)}{\partial t}\right|_{y=\rho_i(\tau,t,x)}\times\\
&\qquad\qquad\times\Big(\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial y}a_i'+\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t}\Big)\times\\
&\qquad\times\bigg\{\frac{\partial a_{3-i,j}(x,\tau)}{\partial x}v_j(x,\tau)+\int_0^\tau\frac{\partial B_j(\eta,x,\tau)}{\partial x}v_j\big(\psi(\eta;x,\tau),\eta\big)d\eta\bigg\}+\\
&\qquad\qquad+C_i^1\big(\rho_i(\tau,t,x),t;\tilde H_1,\tilde H_2\big)\times\\
&\qquad\times\bigg\{a_{3-i,j}(x,\tau)v_j(x,\tau)+\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)v_j\big(\psi(\eta;x,\tau),\eta\big)d\eta\bigg\}\bigg)\frac{\partial\rho_i(\tau,t,x)}{\partial x}+
\end{aligned}
$$

$$+\int_{a_i(\tau)}^{\varphi_i(\tau;a_{3-i}(t),t)}\left(\alpha(\varphi_i(t;x,\tau),t)A_i(\varphi_i(t;x,\tau),t)\times\left.\frac{\partial\varphi_i(\tau;y,t)}{\partial t}\right|_{y=\varphi_i(t;x,\tau)}\times\right.$$

$$\times\left\{\frac{\partial a_{ij}(x,\tau)}{\partial x}v_j(x,\tau)+\int_0^\tau\frac{\partial B_j(\eta,x,\tau)}{\partial x}v_j\big(\psi(\eta;x,\tau),\eta\big)\,d\eta\right\}+$$

$$+C_i^1\big(\varphi_i(t;x,\tau),t;\tilde H_1,\tilde H_2\big)\times$$

$$\left.\times\left\{a_{ij}(x,\tau)v_j(x,\tau)+\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)v_j\big(\psi(\eta;x,\tau),\eta\big)d\eta\right\}\right)\frac{\partial\varphi_i(t;x,\tau)}{\partial x}dx\Bigg]d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^2\int_0^t d\tau\int_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)}\alpha_i(\psi(t;x,\tau),t)A_i(\psi(t;x,\tau),t)\sum_{j=1}^2 B_j(\tau,\psi(t;x,\tau),t)v_j(x,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial\psi(t;x,\tau)}{\partial x}dx+\sum_{i=1}^2(-1)^{i+1}\alpha(a_i(t),t)a_i'(t)\times$$

$$\times\int_0^t\sum_{j=1}^2\left.\left(a_{3-i,j}(x,\tau)v_j(x,\tau)+\int_0^\tau B_j(\eta,x,\tau)\ v_j(\psi(\eta;x,\tau),\eta)d\eta\right)\right|_{x=\varphi_{3-i}(\tau;a_i(t),t)}d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^2\int_{a_1(t)}^{a_2(t)}\alpha(y,t)A_i(y,t)\sum_{j=1}^2 a_{ij}(y,t)v_j(y,t)dy-\sum_{i=1}^2\int_0^t\alpha(\varsigma_i(\tau,t),t)A_i(\varsigma_i(\tau,t),t)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^2\big[a_{2j}\big(a_i(\tau),\tau\big)-a_{1j}\big(a_i(\tau),\tau\big)\big]\lambda_i(\varsigma_i(\tau,t),\tau)v_j\big(a_i(\tau),\tau\big)d\tau-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)}\sum_{j=1}^2 C_j^2\big(\tau,y,t;\tilde H_1,\tilde H_2\big)v_j(y,t)dy+\tilde G\big(t;a,q_1,q_2,B,\gamma_1,\gamma_2\big)+h_1''(t), \tag{22}$$

де $\tilde G(t;a,q_1,q_2,B,\gamma_1,\gamma_2)$ — вираз, який складається із заданих гладких функцій. Для визначення v_j маємо два рівняння (16) типу Вольтерра. Щоб отримати замкнену систему інтегральних рівнянь стосовно невідомих $f(t)$, v_j та $\frac{\partial v_j}{\partial \mathrm{x}}\equiv z_j$ продиференціюємо (16) за x

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x}=\Omega_i(x,t)+$$

$$+\int_0^{\chi_i(x,t)}\left[\sum_{j=1}^2\left(\frac{\partial a_{3-i,j}(y,\tau)}{\partial y}v_j(y,\tau)+a_{3-i,j}(y,\tau)\frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau\left\{\frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y}v_j(\psi(\eta;y,\tau),\eta)+B_j(\eta,y,\tau)\frac{\partial v_j(\psi(\eta;y,\tau),\eta)}{\partial y}\frac{\partial\psi(\eta;y,\tau)}{\partial y}\right\}d\eta\right)+$$

$$\left.\left.+f(\tau)\frac{\partial g(y,\tau)}{\partial y}+\frac{\partial B(y,\tau)}{\partial y}\right]\right|_{y=\varphi_{3-i}\left(\tau;a_i(t_i(x,t)),t_i(x,t)\right)}\times\left(\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial x}a_i'+\frac{\partial\varphi_{3-i}}{\partial t}\right)\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\,d\tau+$$

$$+\int_{\chi_i(x,t)}^t\left\{\sum_{j=1}^2\left(\frac{\partial a_{ij}(y,\tau)}{\partial y}v_j(y,\tau)+a_{ij}(y,\tau)\frac{\partial v_j(y,\tau)}{\partial y}+\right.\right.$$

$$+\int_0^\tau \left\{\frac{\partial B_j(\eta,y,\tau)}{\partial y} v_j(\psi(\eta;y,\tau),\eta) + B_j(\eta,y,\tau)\frac{\partial v_j(\psi(\eta;y,\tau),\eta)}{\partial y}\frac{\partial \psi(\eta;y,\tau)}{\partial y}\right\} d\eta\Bigg)+$$
$$+ f(\tau)\frac{\partial g(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial B(y,\tau)}{\partial y}\Bigg\}\Bigg|_{y=\varphi_i(\tau;x,t)} \times \frac{\partial \varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}\, d\tau, \qquad i=1,2, \tag{23}$$

де

$$\Omega_i(x,t) = \frac{\partial q_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i(0;x,t)}{\partial x}, \quad \text{якщо} \quad (x,t)\in G_0\cup G_{3-i}; \quad \text{і}$$
$$\Omega_i(x,t) = \frac{\partial q_{3-i}\big(\varphi_{3-i}(0;a_i(t_i(x,t)),t_i(x,t))\big)}{\partial x}\Big(\frac{\partial \varphi_{3-i}}{\partial x}a_i' + \frac{\partial \varphi_{3-i}}{\partial t}\Big)\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}+$$
$$+(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{2}\Big(a_{2j}\big(a_i(t_i(x,t)),t_i(x,t)\big) - a_{1j}\big(a_i(t_i(x,t)),t_i(x,t)\big)\Big)\times$$
$$\times v_j\big(a_i(t_i(x,t)),t_i(x,t)\big)\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}, \quad \text{якщо} \quad (x,t)\in G_i.$$

Для того, щоб функції $\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x}$ при переході з G_0 в G_1 і G_2 були неперервні необхідно, щоб

$$\lim_{\substack{(x,t)\in G_0\cup G_{3-i}\\ (x,t)\to(a_i^0,0)}} \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} = \lim_{\substack{(x,t)\in G_i\\ (x,t)\to(a_i^0,0)}} \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x}, \qquad i=1,2.$$

Підставивши сюди (23), отримаємо умову, яка співпадає з першою з умов узгодження першого порядку пункту 5) теореми.

Отже, для визначення функцій $f(t), v_1, v_2$, z_1 та z_2 одержуємо систему інтегро-функціональних рівнянь типу Вольтерра (16), (22), (23), яку, враховуючи умову 4) теореми, запишемо в функціонально-операторній формі

$$\begin{cases} v(x,t) = \Omega^1(x,t) + (G^1 f)(x,t) + (K^1 v)(x,t), \\ z(x,t) = \Omega^2(x,t) + (G^2 f)(x,t) + (K^2 v)(x,t) + \big(D^1 z(x,t) + (Pv)(x,t), \\ f(t) = \Omega^3(t) + (G^3 f)(t) + (K^3 v)(t) + (Nv)(t) + (Qv)(t) + \big(D^2 z(t), \end{cases} \tag{24}$$

де $z=(z_1,z_2)$, а G^l, K^l, D^k ($l=\overline{1,3}$, $k=1,2$) — лінійні інтегральні оператори типу Вольтерра; Q — лінійний інтегральний оператор; N — нелінійний інтегральний оператор типу Вольтерра, який задовольняє умову Ліпшиця за v; P — оператор зсуву; Ω^l ($l=\overline{1,3}$) — відомі величини, побудовані з коефіцієнтів та вільних членів рівнянь (16), (22), (23).

Розглянемо простір $C(\bar G_{\varepsilon_2})$ вектор-функцій $\omega = \mathrm{col}(v_1,v_2,z_1,z_2)$, в яких перші чотири координати визначені і неперервні в області $\bar G_{\varepsilon_2}$, а остання — на відрізку $[0,\varepsilon_2]$. Введемо також вектор $\Omega_0 = \mathrm{col}\big(\Omega^1,\Omega^2,\Omega^3\big)$. В $C(\bar G_{\varepsilon_2})$ розглянемо оператор B, компоненти якого визначаються відповідними доданками в співвідношенні (24) (за винятком Ω^l, $l=\overline{1,3}$) [6]. Тоді система (24) набуває вигляду

$$\omega = \Omega_0 + B\omega. \tag{25}$$

Оскільки B — вольтеррівський, то можна вибрати таке $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$, що відображення, визначене правою частиною (25), в просторі $C(\bar G_{\varepsilon_2})$ є стисним [8, с.43–46]. Тому за теоремою Банаха існує єдиний неперервний розв'язок системи (25).

З (11) і того, що $\frac{\partial v_j}{\partial x} \equiv z_j \in C(\bar{G}_{\varepsilon_2})$, $j=1,2$ випливає, що $v_j(x,t) \in C^1(\bar{G}_{\varepsilon_2})$. Отже, для кожної фіксованої вектор-функції $a(t) \in D_{\varepsilon_2}$ ми знайшли єдиний розв'язок задачі (11)–(14) $v_1(x,t), v_2(x,t), f(t)$. Тоді за формулою (10) знаходимо $u(x,t)$. Оскільки він залежить від вибору $a(t) \in D_{\varepsilon_2}$, то позначимо $u(x,t) = U(x,t;a)$, а також $f(t) = F(t;a)$. Залишається зі всієї множини допустимих вектор-функцій $a(t)$ вибрати ту, для якої виконується умова (5).

Залежність $U(a_j(t),t;a)$ $(j=1,2)$ в метриці рівномірного відхилення від a як елемента $\big[C[0,\varepsilon_3]\big]^4$, $\varepsilon_3 \in (0,\varepsilon_0]$ задовольняє умову Ліпшиця $\exists L_u \geq 0$ $\forall a^1, a^2 \in D_{\varepsilon_3}$

$$\max_{t\in[0,\varepsilon_3]} \big|U(a_j^1(t),t;a^1) - U(a_j^2(t),t;a^2)\big| \leq L_u \varrho(a^1,a^2). \tag{26}$$

Щоб перевірити співвідношення (26) зауважимо, що з (10) та (24) легко отримати апріорні оцінки для розв'язку та його похідних через задані функції, з яких, зокрема, випливає, що для $(x,t) \in \bar{G}_{\varepsilon_3}$, $a \in D_{\varepsilon_3}$

$$\big|U(x,t;a)\big| \leq U_0,\ \ \big|U'_x(x,t;a)\big| \leq U_1,\ \ \big|U'_t(x,t;a)\big| \leq U_2, \quad \text{де } U_l \text{ — const},\ l=\overline{1,3}.$$

Оскільки всі оператори в (24) задовольняють за $a(t)$ умову Ліпшиця, то залежність розв'язку рівнянь типу Вольтерра (24) від функціонального параметру a задовольняє умову Ліпшиця, звідки і випливає (26).

Виберемо ε_3 таким, щоб виконувалась умова

$$\varepsilon_3\big(1+\varepsilon_3/2\big)(L_{H_1}+L_{H_2})\max\{1,L_u\} < 1. \tag{27}$$

Розглянемо на D_{ε_3} оператор $A\colon a \to Aa$, який діє за формулою

$$\big(Aa_i\big)(t) = a_i^0 + \alpha_i^0 t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau H_i\big(\eta, a(\eta), U(a_1(\eta),\eta;a), U(a_2(\eta),\eta;a)\big)d\eta.$$

Оператор A переводить множину D_{ε_3} в себе і є стиском. Справді

$$\big|\big(Aa_i\big)'(t) - \alpha_i^0\big| \leq \Big|\int_0^t H_i\big(\tau, a(\tau), U(a_1(\tau),\tau;a), U(a_2(\tau),\tau;a)\big)\,d\tau\Big| \leq K_i\varepsilon_3;$$

$$\begin{aligned}\big|\big(Aa_i\big)(t) - a_i^0\big| &\leq \Big|\alpha_i^0 t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau H_i\big(\eta, a(\eta), U(a_1(\eta),\eta;a), U(a_2(\eta),\eta;a)\big)\,d\eta\Big| \leq \\ &\leq \alpha_i^0\varepsilon_3 + K_i\varepsilon_3^2/2 = \varepsilon_3(\alpha_i^0 + K_i\varepsilon_3/2).\end{aligned}$$

Отже $AD_{\varepsilon_3} \subset D_{\varepsilon_3}$. Покажемо, що при вибраному ε_3 оператор A є стиском:

$$\begin{aligned}\max_t \big|\big(Aa_i^1\big)'(t) - \big(Aa_i^2\big)'(t)\big| &\leq \Big|\int_0^t \big|H_i\big(\eta, a^1(\eta), U(a_1^1(\eta),\eta;a^1), U(a_2^1(\eta),\eta;a^1)\big) - \\ &- H_i\big(\eta, a^2(\eta), U(a_1^2(\eta),\eta;a^2), U(a_2^2(\eta),\eta;a^2)\big)\big|d\eta d\tau\Big| \leq \\ &\leq \varepsilon_3 L_{H_i} \max\big\{\varrho(a^1,a^2); \max_t |U(a_j^1(t),t;a^1) - U(a_j^2(t),t;a^2)|\big\} \leq \\ &\leq \varepsilon_3 L_{H_i}\max\{1,L_u\}\varrho(a^1,a^2).\end{aligned}$$

Подібно

$$\max_t \left|\left(Aa_i^1\right)(t) - \left(Aa_i^2\right)(t)\right| \le \frac{\varepsilon_3^2}{2} L_{H_i} \max\{1, L_u\} \varrho(a^1, a^2).$$

Отже, враховуючи умову (27), отримаємо

$$\varrho(Aa^1, Aa^2) \le \varepsilon_3 \big(1 + \frac{\varepsilon_3}{2}\big)(L_{H_1} + L_{H_2}) \max\{1, L_u\} \varrho(a^1, a^2) < \varrho(a^1, a^2).$$

Тому A — стиск і за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка оператора A, тобто існує єдина вектор-функція $a(t) \in D_{\varepsilon_3}$, яка задовольняє рівняння (5) і яку можна знайти методом послідовних наближень. За відомою вже вектор-функцією $a(t)$ при $t \in [0, \varepsilon]$ $\big(\varepsilon = \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}\big)$ вибираємо $u(x,t) = U(x,t;a)$, подібно визначаємо $f(t) = F(t;a)$. Отже, ми знайшли єдиний розв'язок задачі (1)–(5).

Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Данилюк И.И. *Задача Стефана* Успехи мат. наук. – 1985. – Т.4, №5. – С.133–185.
2. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой* Дифференц. уравнения. – 1991. – Т.27, №3. – С.497–501.
3. Крутиков В.С. *Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами* Прикл. мех. и мат. – 1991. – Т.55, №6. – С.1058–1062.
4. Мельник З.О. *Змішана задача з невідомою границею для загального двовимірного гіперболічного рівняння другого порядку* Доп. АН УРСР. – 1982. – №8. – С.13–15.
5. Мельник З.О. *Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем на прямой* Дифференц. уравнения. – 1985. – Т.21, №2. – С.246–253.
6. Орловский Д.Г. *К задаче определения правой части гиперболической системы* Дифференц. уравнения. – 1983. – Т.19, №8. – С.137–146.
7. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М., 1984. – 263с.
8. Функциональные методы в задачах математической физики Сборник научных трудов под ред. А.И. Прилепко. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 76с.
9. D'Acunto B. *On the piston problem in gosdynamics* Mech. Res. Commun. – 1984. – V.11, №6. – P.401–407.
10. Hill C.D. *A hyperbolic free boundary problem* J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – V.31, №1, P.117–129.
11. Sinha D.R. *A note on mechanicall response in a piesoelectric transducer to an impulsive voltage input* Proc. Nat. Inst., India – 1966. – A 31, №4. – P.395–402.
12. Sond I. *Some Developments in mathematical demography and their application to the People's Republic of China* Theor. Popul. Biol. – 1982. – V.22, №3.

Львівський університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 25.06.1997
Після переробки 19.02.1998