УДК 517.518.244+519.21

ПОРІВНЯННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЗРОСТАННЯ ДОДАТНИХ ФУНКЦІЙ.

Я.В. Васильків, А.А. Кондратюк

Vasyl'kiv Ya., Kondratyuk A., *Comparizing of the growth characteristics of positive functions*, Matematychni Studii, **10**(1998) 23–32.

A comparative analysis of the growth characteristics at infinity (the usual upper and lower orders, the orders in the sense of Polya and Kondratyuk, the (ρ_0, μ_0)-orders) of positive monotone functions is given and the most frequently used classes of proximate orders are described.

Я.В. Васылькив, А.А. Кондратюк. *Сравнение характеристик роста положительных функций* // Математичні Студії. – 1998. – Т.10, № 1. – С.23–32.

Сделан сравнительный анализ характеристик роста на бесконечности (обычных
верхних и нижних порядков, порядков в смысле Пойа и Кондратюка, (ρ_0, μ_0)-порядков) положительных монотонных функций и описаны наиболее часто используемые классы уточненных порядков.

Добре відомо (див., наприклад, [1–4]), що більшість характеристик зростання мероморфних, субгармонійних та плюрісубгармонійних функцій є додатними і монотонними, а основні з них, окрім того, є опуклими або логарифмічно опуклими. Останнє для деякої невід'ємної на $[1, +\infty)$ функції $\lambda(r)$ означає опуклість функції $\lambda(e^x)$ на $[0, +\infty)$. Для логарифмічно опуклої неспадної функції $\lambda(r)$ через $\nu(r)$ позначимо її правосторонню логарифмічну похідну, тобто $\nu(r) = r\lambda'(r)$, де $\lambda'(r)$ означає правосторонню похідну. Зрозуміло, що $\nu(r)$ визначена всюди на $[1, +\infty)$, невід'ємна та неспадна.

Зростання на безмежності додатних логарифмічно опуклих функцій описується низкою широко вживаних характеристик, як ось: нижній і верхній порядки зростання в розумінні Пойа [5] та другого з авторів даної статті [6, с.107], [7], уточнені порядки. Порівняння різних характеристик зростання, а також швидкості зростання $\lambda(r)$ щодо $\nu(r)$, можна, наприклад, знайти у працях [5], [6], [9], [10]. Однак, ряд можливих варіантів співвідношень між характеристиками зростання залишились не виясненими до кінця. Ця стаття покликана заповнити деякі з існуючих прогалин.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 26A12,26A48.

1.

Введемо наступні поняття і позначення. Через G позначимо клас невід'ємних неперервних неспадних до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій. Функцію $\lambda\in G$ називаємо функцією зростання. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $\lambda(0)=0$, $\lambda(1)=1$. Через G_+ позначаємо підклас логарифмічно опуклих функцій зростання $\lambda\in G$. Отже, для функції $\lambda\in G_+$ маємо $\lambda(r)=\int_0^r\nu(t)t^{-1}dt$. Вживаючи позначення $\lambda_{-1}(t)\equiv$ $\equiv\nu(t)$, $\lambda_0(t)\equiv\lambda(t)$, визначимо

$$\lambda_k(r)=\int_0^r\lambda_{k-1}(t)t^{-1}dt\ \ (k\geq 0),\qquad \left.\begin{matrix}\rho_{k,j}\\ \mu_{k,j}\end{matrix}\right\}\stackrel{\text{def}}{=\!=}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\lambda_{k-1}(r)}{\lambda_j(r)},$$

а також позначимо (за [6–8])

$$\mu_0\stackrel{\text{def}}{=\!=}\mu_{0,0},\quad \mu_1\stackrel{\text{def}}{=\!=}\mu_{1,1},\quad \rho_0\stackrel{\text{def}}{=\!=}\rho_{0,0},\quad \rho_1\stackrel{\text{def}}{=\!=}\rho_{1,1},\quad \mu_2\stackrel{\text{def}}{=\!=}\sqrt{\mu_{1,2}},\quad \rho_2\stackrel{\text{def}}{=\!=}\sqrt{\rho_{1,2}}.$$

Верхнім і нижнім порядками за Пойа (див. [5]) функції $\lambda\in G$ називаємо відповідно величини

$$\rho_*=\sup\{p>0:\varlimsup_{r,A\to+\infty}\frac{\lambda(Ar)}{A^p\lambda(r)}=+\infty\}$$

та

$$\mu_*=\inf\{p>0:\varliminf_{r,A\to+\infty}\frac{\lambda(Ar)}{A^p\lambda(r)}=0\},$$

які можна також визначити, як [11, с. 14]

$$\left.\begin{matrix}\rho_*\\ \mu_*\end{matrix}\right\}=\varlimsup_{r,A\to+\infty}\frac{\log\lambda(Ar)-\log\lambda(r)}{\log A}.$$

Нехай також ρ і μ — відповідно порядок і нижній порядок функції $\lambda\in G$, тобто

$$\left.\begin{matrix}\rho\\ \mu\end{matrix}\right\}=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\lambda(r)}{\log r}.$$

Надалі, також, де це необхідно, пишемо $\rho_0[\lambda]$, $\mu_0[\lambda]$, $\rho_1[\lambda]$ і т.п. замість ρ_0, μ_0, ρ_1 і т.п.

Стосовно введених величин відомі наступні твердження.

Твердження 1 (див. [5, 11, 12]). *Для функції $\lambda\in G$: $0\leq\mu_*\leq\mu\leq\rho\leq\rho_*\leq+\infty$.*

Твердження 2 (див. [11, ст. 14]). *Для функції $\lambda\in G$: $\rho_*<+\infty\iff\lambda(2r)=O(\lambda(r))$ $(r\to+\infty)$.*

Твердження 3 (див. [6, ст. 162–163]). *Якщо $\lambda\in G$, то $\rho_*<+\infty\Longrightarrow\mu_2\leq\mu\leq\rho\leq\rho_2$. При цьому, існує функція $\lambda\in G$ така, що $\mu_2<\mu\leq\rho<\rho_2$.*

Твердження 4. *Нехай $\lambda\in G_+$. Тоді:*
1) $0\leq\mu_0\leq\mu_*\leq\rho_*\leq\rho_0\leq+\infty$,
2) $0\leq\mu_0\leq\mu_1\leq\mu_2\leq\rho_2\leq\rho_1\leq\rho_0\leq+\infty$.

Доведення п.1 цього твердження негайно випливає із рівності

$$\log\lambda(Ar)-\log\lambda(r)=\int_r^{Ar}\frac{\nu(t)}{\lambda(t)}\frac{dt}{t},$$

а п.2, з огляду на узагальнене правило Лопіталя [13, с.119], є очевидним.

Твердження 5 (див. [9, 10]).
1) Нехай $\lambda \in G$. *Тоді:*
а) $\mu_2 = 0 \Longleftrightarrow \mu_* = 0$,
б) $\mu_2 = +\infty \Longleftrightarrow \mu_* = +\infty$,
в) $\mu_* > 0 \Longrightarrow 0 < \mu_2 \le \mu_* \le \rho_* \le \rho_2$.
2) Існує $\lambda \in G$ *така, що* $0 = \mu_2 = \mu_* = \rho_2 < \rho_* = 1$.
3) Для довільних $0 < \tilde\mu \le \tilde\rho < +\infty$ *існує* $\lambda \in G$ *така, що* $\mu_* = \tilde\mu$, $\rho_* = \tilde\rho$ *та* $0 < \mu_2 < \mu_* \le \rho_* < \rho_2$.

Твердження 6. *Для функції* $\lambda(r) = \int_0^r \nu(t)t^{-1}dt$, $\nu(t) = t^\gamma(\sqrt{2} + \sin\log t)$, $1 \le \gamma < +\infty$, *маємо* $\lambda \in G_+$ *і* $0 < \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_* = \mu = \rho = \rho_* = \gamma < \rho_2 < \rho_1 < \rho_0 < +\infty$, *тобто в п.2 твердження 4 скрізь можливі строгі нерівності. При цьому,* $\mu_0 = \gamma - \gamma/\sqrt{\gamma^2+1}$, $\mu_1 = \gamma - \gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4\gamma^2+2}$, $\mu_2^2 \ge \mu_1(\gamma - \gamma^3/\sqrt{\gamma^6+6\gamma^4+6\gamma^2+2})$, $\rho_2^2 \le \rho_1(\gamma + \gamma^3/\sqrt{\gamma^6+6\gamma^4+6\gamma^2+2})$, $\rho_1 = \gamma + \gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4\gamma^2+2}$, $\rho_0 = \gamma + \gamma/\sqrt{\gamma^2+2}$.

Всі співвідношення з твердження 6 отримуються елементарними методами математичного аналізу. Тому всі ці викладки ми опускаємо.

Твердження 7. *Нехай* $\lambda \in G_+$. *Тоді:*
1) $\mu_0 = 0 \Longleftrightarrow \mu_* = 0$,
2) $\rho_0 = +\infty \Longleftrightarrow \rho_* = +\infty$.

Доведення. Нехай $\mu_0 = 0$. За означенням величини μ_0, знайдеться зростаюча необмежена послідовність $\{R_k\}$ така, що

$$\nu(R_k)/\lambda(R_k) < k^{-2} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{і} \quad r_k \overset{\text{def}}{=\!=} R_k e^{-k} \nearrow +\infty \quad (k \to +\infty).$$

Тоді,

$$\lambda(R_k) = \lambda(r_k) + \int_{r_k}^{R_k} \nu(t)t^{-1}dt \le \lambda(r_k) + \nu(R_k)\log\frac{R_k}{r_k} = \\ = \lambda(r_k) + k\nu(R_k) \le \lambda(r_k) + k^{-1}\lambda(R_k),$$

або

$$\lambda(R_k) \le \frac{k}{k-1}\lambda(r_k) \quad (k \ge 2).$$

Звідси, для довільного $p > 0$ маємо

$$\frac{\lambda(R_k)}{(e^k)^p\lambda(r_k)} \le \frac{k}{e^{pk}(k-1)} \to 0 \quad (k \to +\infty),$$

і, тому $\mu_* = 0$.

Припустимо, що $\rho_0 = +\infty$, а $\rho_* < +\infty$. З огляду на твердження 2, умова $\rho_* < +\infty$ рівносильна до умови $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$ $(r \to +\infty)$. З останньої, в свою чергу, одержимо, що $\nu(r)/\lambda(r) \le \lambda(2r)(\log 2\ \lambda(r))^{-1} = O(1)$ $(r \to +\infty)$, тобто $\rho_0 < +\infty$, що суперечить припущенню.

Якщо ж $\mu_* = 0$ або $\rho_* = +\infty$, то з п.1 твердження 4 випливає, що $\mu_0 = 0$ або $\rho_0 = +\infty$ відповідно. Твердження 7 доведено.

Твердження 8. *Нехай* $\lambda \in G_+$. *Тоді:*
1) $0 < \mu_0 \le \rho_0 < +\infty \Longrightarrow \nu(2r) = O(\nu(r))\ \ (r \to +\infty)$,
2) $\nu(2r) = O(\nu(r))\ \ (r \to +\infty) \Longrightarrow \rho_0 < +\infty$.

Доведення. З огляду на твердження 7, умова $\rho_0 < +\infty$ рівносильна до умови $\lambda(2r) = O(\lambda(r))\ \ (r \to +\infty)$. З рівності $\lambda(r) = \int_0^r \nu(t)t^{-1}dt$ одержимо, що

$$\nu(2r) \le (\log 2)^{-1} \int_{2r}^{4r} \nu(t)t^{-1}dt = O(\lambda(4r)) = O(\lambda(r))\ \ (r \to +\infty).$$

З іншого боку, з умови $\mu_0 > 0$ випливає, що для кожного $\varepsilon \in (0, \mu_0) : \lambda(r) < \nu(r)(\mu_0-$
$-\varepsilon)^{-1}\ \ (r \ge r_0)$, і, тому $\nu(2r) = O(\nu(r))\ \ (r \to +\infty)$.

Обернене твердження негайно випливає із рівності $\lambda(2r) = \int_0^r \nu(2t)t^{-1}dt$.

У зв'язку з твердженням 7 виникає запитання, чи справедливі твердження:

$$\mu_0 = +\infty \Longleftrightarrow \mu_* = +\infty \quad \text{і} \quad \rho_0 = 0 \Longleftrightarrow \rho_* = 0.$$

Негативна відповідь на це запитання випливає з наступного твердження.

Твердження 9.
1) Існує $\lambda \in G_+$ *така, що* $\rho_* = 0$ *і* $\rho_0 = 1$.
2) Існує $\lambda \in G_+$ *така, що* $\mu_0 = 1$ *і* $\mu_* = +\infty$.

Доведення. Нехай $r_1 = 1$; $r_{k+1} = e^k r_k = \exp\{k(k+1)/2\},\ k \in \mathbb{N}$; $\nu(r) = 1$ для $r_1 \le r < r_2$; $\lambda(r_1) = 1$ і $\nu(r) = \lambda(r_k)$ для $r_k \le r < r_{k+1},\ k \ge 2$. Очевидно, що $\lambda(r) = \lambda(r_k)(1 + \log\frac{r}{r_k})$ для $r_k \le r < r_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$, і $\lambda(r_{k+1}) = \lambda(r_k)(k+1) = (k+1)!$. Далі, згідно з побудовою,

$$\frac{1}{1+k} < \frac{\nu(r)}{\lambda(r)} = \frac{\lambda(r_k)}{\lambda(r_k)(1 + \log r/r_k)} \le 1$$

для $r_k \le r < r_{k+1}$ і $\nu(r_{k+1}) = \lambda(r_{k+1})$. Тому $\rho_0[\lambda] = 1$.

Позначимо $g(t) = \log\lambda(e^t)$, $K_t^* = k_t(k_t - 1)/2$, де $k_t = E[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+8t})]$, $E(x)$ — ціла частина числа x. Для довільних $t > 0$, $x > 0$, маємо $K_{t+x}^* \ge K_t^*$, $K_t^* \le t$ і $K_{t+x}^* \le t + x$. Тоді,

$$g(t+x) - g(t) = \log(k_{t+x})! + \log(1 + t + x - K_{t+x}^*) - \log(k_t)! - \log(1 + t - K_t^*) <$$
$$< (k_{t+x} - k_t - 1)\log k_{t+x} + \log\left(1 + \frac{x + K_t^* - K_{t+x}^*}{1 + t - K_t^*}\right) < \frac{\sqrt{1+8(t+x)} - \sqrt{1+8t}}{2} \times$$
$$\times \log\frac{1 + \sqrt{1+8(t+x)}}{2} + \log(1+x) < \frac{4x}{\sqrt{1+8(t+x)}} \log\frac{1 + \sqrt{1+8(t+x)}}{2} + \log(1+x),$$

і, тому

$$\rho_*[\lambda] = \lim_{t,x\to+\infty} \frac{g(t+x) - g(t)}{x} = 0. \tag{1}$$

Позначимо через $r = \tilde{\lambda}(R)$ функцію обернену до побудованої вище функції $R =$
$= \lambda(r)$. Приймемо $R_k = k!,\ k \in \mathbb{N}$. Тоді, згідно з побудовою,

$$\tilde{\lambda}(R) = \exp\left\{\frac{k(k-1)}{2}\right\} \exp\left\{\frac{R}{R_k} - 1\right\}$$

для $R_k \le R \le R_{k+1}$. Очевидно, що функція

$$\tilde{\nu}(R) \stackrel{\text{def}}{=\!=} R\tilde{\lambda}'(R) = \frac{R}{R_k}\tilde{\lambda}(R)$$

строго зростає на проміжках $[R_k, R_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, і

$$\tilde{\nu}(R_k+0) = \exp\left\{\frac{k(k-1)}{2}\right\}, \quad \tilde{\nu}(R_{k+1}-0) = (k+1)\exp\left\{\frac{k(k-1)}{2}\right\},$$
$$\nu(R_{k+1}+0) = \exp\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}.$$

Тому [14, с.63], функція $\tilde{\lambda}(R)$ логарифмічно опукла.

Далі, оскільки $\tilde{\nu}(R)/\tilde{\lambda}(R) = R/R_k \ge 1$ для $R_k \le R < R_{k+1}$ і $\tilde{\nu}(R_k) = \tilde{\lambda}(R_k)$, то $\mu_0[\tilde{\lambda}] = 1$. Приймемо $B(A,R) = \tilde{\lambda}(AR)/\tilde{\lambda}(R)$. Тоді, $AR = \lambda[B(A,R)\tilde{\lambda}(R)] = \lambda[B(A,R)r]$, і, тому $\log\lambda[B(A,R)r] - \log\lambda(r) = \log A$ та $\log\tilde{\lambda}(AR) - \log\tilde{\lambda}(R) = \log B(A,R)$. Окрім того, оскільки $\mu[\tilde{\lambda}] \le \rho_*[\tilde{\lambda}]$ і $\mu[\tilde{\lambda}] = 1/\rho[\lambda] = +\infty$, то $\rho_*[\tilde{\lambda}] = +\infty$, і, тому $B(A,R) \to +\infty \ \ (R \to +\infty)$.

Враховуючи сказане вище та існування границі (1), дістанемо

$$\mu_*[\tilde{\lambda}] = \left\{\varlimsup_{R,A\to+\infty} \frac{\log\lambda[B(A,R)r] - \log\lambda(r)}{\log B(A,R)}\right\}^{-1} = +\infty,$$

що завершує доведення твердження 9.

Наступне твердження вказує на те, що умова $\lambda \in G_+$ ($\Longleftrightarrow \nu(r) = r\lambda'(r)$ — невід'ємна неспадна) є істотною в умовах твердження 7.

Твердження 10. *Нехай* $\lambda(r) = \exp\left\{\int_1^r \beta(t)t^{-1}dt\right\}$, *де* $\beta(t) = t(1+\cos\log t)$,$r = \tilde{\lambda}(R)$ *— функція обернена до функції* $R = \lambda(r)$. *Тоді:*
1) $\mu_0[\lambda] = 0, \mu_*[\lambda] = +\infty$ *і* $\lambda \notin G_+$,
2) $\rho_0[\tilde{\lambda}] = +\infty, \rho_*[\tilde{\lambda}] = 0$ *і* $\tilde{\lambda} \notin G_+$.

Доведення цього твердження отримується елементарними методами математичного аналізу. Тому всі ці викладки ми опускаємо.

І, нарешті, наступне твердження показує, що умова $\mu_0 > 0$ є істотною в п.1 твердження 8.

Твердження 11. *Існує* $\lambda \in G_+$ *така, що* $\mu_0 = 0$, $\rho_0 < +\infty$, $\nu(2r) \ne O(\nu(r))$ $(r \to +\infty)$ *і* $\lambda(2r) = O(\lambda(r)) \ \ (r \to +\infty)$.

Доведення. Нехай $r_1 = 1$, $r_{k+1} = r_k e^{\sqrt{k}}$ $(k \ge 1)$, $\nu(r_1) = \lambda(r_1) = 1$, а для $r \in [r_k, r_{k+1})$: $\nu_{-1}(r) = \sqrt{k}\,k!$, $\nu(r) = \int_1^r \nu_{-1}(t)t^{-1}dt$. Зауважимо, що $\nu(r_k) = \nu(r_{k-1}) +$
$+ \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} \nu_{-1}(t)t^{-1}dt = \nu(r_{k-1}) + (k-1)!\,(k-1) = \sum\limits_{j=2}^{k}(j-1)!\,(j-1) = k! = k^{-1/2}\nu_{-1}(r_k)$. Тому $\rho_0[\nu] = +\infty$ і за п.2 твердження 7, застосованим до $\nu(r)$, маємо $\rho_*[\nu] = +\infty$, що за п.2 твердження 8 дає $\nu(2r) \ne O(\nu(r)) \ \ (r \to +\infty)$.

Якщо тепер показати, що $\rho_0 \equiv \rho_0[\lambda] < +\infty$, то за п.2 твердження 4 $\rho_*[\lambda] < +\infty$ і, отже, за твердженням 2 $\lambda(2r) = O(\lambda(r)) \ \ (r \to +\infty)$. Зауважимо, що

$$\lambda(r_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k!\,\sqrt{k}\left(1+\frac{k}{2}\right) \ge n!\frac{\sqrt{n}}{4} \quad (n \ge 1),$$

а для $r \in [r_n, r_{n+1})$: $\lambda(r) = \lambda(r_n) + n! \log(r/r_n) + 2^{-1} n! \sqrt{n} \log^2(r/r_n)$, а також $\nu(r) = n! + n! \sqrt{n} \log(r/r_n)$, і, тому

$$\frac{\nu(r)}{\lambda(r)} \leq \frac{1 + \sqrt{n} \log \frac{r}{r_n}}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log^2 \frac{r}{r_n}\right) \sqrt{n}} \leq \frac{4}{\sqrt{n}} + 4 \quad (n \geq 1).$$

Звідси, отримуємо $\rho_0[\lambda] < +\infty$. Твердження 11 встановлено.

2. Уточнені порядки.

Нехай G_j — клас j разів диференційовних функцій $\lambda \in G$. Зберігаючи попередні позначення, позначимо також для $\lambda \in G$ $\rho(r) = \log \lambda(r) / \log r$, а для $\lambda \in G_1$
$\beta(r) = \nu(r)/\lambda(r) = r\lambda'(r)/\lambda(r)$. Зауважимо, що для $\lambda \in G_1$

$$\lambda(r) = r^{\rho(r)} = \exp\left\{\int_1^r \frac{\beta(t)}{t}\, dt\right\}, \tag{2}$$

$$\beta(r) = \rho(r) + \rho'(r) r \log r, \tag{3}$$

а для $\lambda \in G_2$

$$r\beta'(r) = \frac{r\nu'(r)}{\lambda(r)} - \beta^2(r) = \rho''(r) r^2 \log r - \left(1 + \frac{2}{\log r}\right) \rho'(r) r \log r. \tag{4}$$

Через $G[\rho]$ позначимо підклас G_1, в який входять функції $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$ такі, що

$$(\exists\, \rho_\lambda) : \; \rho(r) \to \rho_\lambda \in [0, +\infty), \quad r\rho'(r) \log\, r \to 0 \quad (r \to +\infty);$$

$G^*[\rho]$ підклас $G_2 \cap G[\rho]$ таких функцій $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$, що $\rho''(r) r^2 \log\, r \to 0 \quad (r \to +\infty)$; $G_0^*[\rho]$ підклас $G^*[\rho]$, в який входять функції з $\rho_\lambda > 0$. Зауважимо, що $\rho_\lambda = \rho[\lambda] = \mu[\lambda]$ — порядок і нижній порядок функції $\lambda(r) \in G[\rho]$ збігається з ρ_λ.

Слідуючи за [8], неперервно диференційовну функцію $\rho(r)$ називають уточненим (ρ_0, μ_0)-порядком, якщо $0 < \mu_0 \leq \rho_0 < +\infty$, де (див. (3))

$$\left.\begin{matrix} \rho_0 \\ \mu_0 \end{matrix}\right\} = \overline{\underline{\lim}}_{r \to +\infty} \beta(r).$$

Твердження 12. *Нехай $\lambda \in G$. Тоді:*
1) $\lambda \in G[\rho] \Longleftrightarrow 0 \leq \mu_0 = \rho_0 < +\infty$,
2) $\lambda \in G^*[\rho] \Longleftrightarrow 0 \leq \mu_0 = \rho_0 < +\infty$ і $r\beta'(r) \to 0 \quad (r \to +\infty)$. При цьому, якщо $\lambda \in G[\rho]$, то $\mu_0 = \rho_0 = \rho_\lambda$.

Доведення твердження 12 з огляду на співвідношення (3) і (4) є елементарним.

Позначимо

$$\beta_{-1}(r) = \frac{r\nu'(r)}{\nu(r)}, \quad \beta_{-2}(r) = \frac{r\nu'(r)}{\lambda(r)}, \quad \left.\begin{matrix} \rho_k \\ \mu_k \end{matrix}\right\} = \overline{\underline{\lim}}_{r \to +\infty} \beta_k(r), \; k = -1, -2,$$

де $\lambda \in G_2$.

Твердження 13. *Нехай $\lambda \in G_2$. Тоді, якщо $r\beta'(r) \to 0$ $(r \to +\infty)$, то:*
1) $\lambda \in G_0^*[\rho] \Longleftrightarrow 0 < \mu_{-1} = \rho_{-1} < +\infty$,
2) $\lambda \in G_0^*[\rho] \Longleftrightarrow 0 < \mu_{-2} = \rho_{-2} < +\infty$.

Доведення. З рівностей (4) маємо $\beta_{-1}(r) = \beta(r) + r\beta'(r)/\beta(r)$. Якщо $\lambda \in G_0^*[\rho]$, то за твердженням 12 $\rho_0 = \mu_0 = \lim\limits_{r\to+\infty} \beta(r) = \rho_\lambda \in (0, +\infty)$. Звідси, $\mu_{-1} = \rho_{-1} = \rho_\lambda$.

Навпаки, якщо $\mu_{-1} = \rho_{-1} \in (0, +\infty)$, то, оскільки з рівності $\nu(r) = \int_0^r \nu(t)\beta_{-1}(t)t^{-1}dt$ елементарно випливає $\mu_{-1} \le \mu_0 \le \rho_0 \le \rho_{-1}$, негайно маємо $\mu_0 = \rho_0 = \mu_{-1} = \rho_{-1}$, що завдяки умові $r\beta'(r) \to 0$ $(r \to +\infty)$ за твердженням 12 послідовно дає $\lambda \in G^*[\rho]$, а отже $\rho_\lambda = \rho_{-1} \in (0, +\infty)$ і п.1 доведено.

Доведемо п.2. З огляду на узагальнене правило Лопіталя [13, с.119], $\mu_{-2} \le \mu_2^2 \le$
$\le \rho_2^2 \le \rho_{-2}$. Якщо $\lambda \in G_0^*[\rho]$, то за твердженням 12 і рівністю (4)

$$\lim_{r\to+\infty} \beta_{-2}(r) = \lim_{r\to+\infty} \beta^2(r) = \lim_{r\to+\infty} \rho^2(r) = \rho_\lambda^2,$$

тобто $\rho_{-2} = \mu_{-2} = \rho_\lambda^2 \in (0, +\infty)$.

Навпаки, якщо $0 < \mu_{-2} = \rho_{-2} < +\infty$, то $\mu_2 = \rho_2 = \rho_{-2}$, і, з огляду на лему 8.8 [6, с.116], функція $\lambda \in G[\rho]$. Залишилось зауважити, що

$$\rho''(r)r^2 \log r = \beta_{-2}(r) - \beta^2(r) - \left(1 + \frac{2}{\log r}\right)\rho'(r) r \log r.$$

Через S позначимо клас невід'ємних неперервно диференційовних на $[1, +\infty)$ функцій $\gamma(t)$ таких, що $t\gamma'(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$. Скажемо, що функція $\lambda \in G_1$ належить до G_S, якщо

$$\lambda(r) = L(r) \exp\left\{\int_1^r \frac{\gamma(t)}{t} dt\right\},$$

де $\gamma \in S$, а L — диференційовна повільно змінна функція, тобто $rL'(r)/L(r) \to 0$
$(r \to +\infty)$. Клас G_S може виявитись вдалою модифікацією поняття гнучкого уточненого порядку в розумінні Д. Дрейсіна [15], тобто класу таких функцій $\lambda \in G$, що

$$\lambda(r) \sim \exp\left\{\int_1^r \frac{\gamma(t)}{t} dt\right\} \quad (r \to +\infty),$$

де $t\gamma'(t) \to 0$ $(t \to +\infty \notin \mathcal{D}$ — дискретна множина), а γ — неперервно диференційовна при $t \notin \mathcal{D}$.

Твердження 14. *Нехай $\lambda \in G_1$. Тоді:*

$$\lambda \in G_S \Longleftrightarrow \lim_{r\to+\infty} \max_{r \le t \le Ar} |\beta(t) - \beta(r)| = 0, \quad 1 < A < +\infty.$$

При цьому $\mu_0 = \mu_*$ і $\rho_0 = \rho_*$.

Доведення. Оскільки, при умові $\lambda \in G_S$, маємо $\beta(x) = xL'(x)/L(x) + \gamma(x)$, а функція $e^{\gamma(x)}$ є диференційовна повільно змінна функція, то для неї [16, с.10] рівномірно по $a \in [1, A]$ виконується $\exp\big(\gamma(ax) - \gamma(x)\big) \to 1 \quad (x \to +\infty)$ і в сторону неробхідності твердження доведено.

Якщо ж, $\lim\limits_{r\to+\infty} \max\limits_{r\le t\le Ar} |\beta(t) - \beta(r)| = 0$, то функція $e^{\beta(x)}$ є повільно змінна, тобто для кожного $a \in (0, +\infty)$, $\exp\big(\beta(ax) - \beta(x)\big) \to 1 \quad (x \to +\infty)$. Тому знайдуться [16, с.10] неперервні функції $\gamma_1(t) \to 0$ і $a(t) \to 1 \quad (t \to +\infty)$ такі, що

$$e^{\beta(r)} = a(r)\exp\left\{\int_0^r \frac{\gamma_1(t)}{t}dt\right\}.$$

Звідси,

$$\log \lambda(r) = \int_0^r \frac{\beta(t)}{t}dt = \int_0^r \frac{\log a(t)}{t}dt + \int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{\gamma_1(x)}{x}dx,$$

і, тому необхідне зображення $\lambda(r)$ отримуємо негайно. Рівності $\mu_* = \mu_0$, $\rho_* = \rho_0$ отримуємо з наступної нерівності

$$|\log \lambda(Ar) - \log \lambda(r) - \beta(r)\log A| = \left|\int_r^{Ar} \frac{\beta(t) - \beta(r)}{t}dt\right| \le \max_{r\le t\le Ar} |\beta(t) - \beta(r)|.$$

Елементарно переконуємось у справедливості наступних тверджень.

Твердження 15. *Якщо $\lambda \in G_S$, то рівномірно по $a \in [1, A]$, $1 < A < +\infty$, $\lambda(ar)\left[a^{\beta(r)}\lambda(r)\right]^{-1} \to 1 \quad (r \to +\infty)$.*

Нехай G_L підклас функцій $\lambda(r) = r^{\rho(r)} \in G_1$ таких, що $\rho'(r) r \log r \to 0 \quad (r \to +\infty)$.

Твердження 16 (порівн. [15]). *$G_L \subset G_S$.*

Для доведення твердження 16 досить взяти $L(r) = \exp\left\{\int_1^r \rho'(t)\log t\, dt\right\}$ та $\gamma(r) = \rho(r)$.

Позначимо $G_L^* = \{\lambda \in G_L \cap G_2 : \ \rho''(r) r^2 \log r \to 0 \quad (r \to +\infty)\}$.

Твердження 17. *Нехай $\lambda \in G_2$. Тоді: $(\lambda \in G_L \Longrightarrow \lambda \in G_L^*) \Longleftrightarrow r\beta'(r) \to 0$ $(r \to +\infty)$.*

Твердження 18. *1) $G^*[\rho] \subset G[\rho]$; 2) $G_L^* \subset G_L$; 3) $G[\rho] \subset G_L \subset G_S \subset G$. При цьому всі включення є строгими [17].*

Твердження 19. *1) $G_0^*[\rho] \subset G_+$; 2) $G_L^* \subset G_+$ при $0 < \mu \le \rho$, де G_+ — клас логарифмічно опуклих функцій.*

Зауваження 1. Клас G_L містить функції, які не є логарифмічно опуклими.

Твердження 20 (див. [18]). *Кожна функція $\lambda \in G_L$, для якої $0 < \mu \le \rho < +\infty$, ${\rho \atop \mu}\Big\} = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\ \rho(r)$, еквівалентна логарифмічно опуклій функції $h(r) = \int_0^r \lambda(t)\rho(t)\frac{dt}{t}$ з G_L.*

Твердження 21. *Якщо $\lambda \in G_L$, то рівномірно по $a \in [1, A]$, $1 < A < +\infty$*

$$\lambda(ar)\left[a^{\rho(r)}\lambda(r)\right]^{-1} \to 1 \quad (r \to +\infty).$$

Твердження 21, завдяки рівності $a^{\rho(r)} = a^{\beta(r)}a^{-\rho'(r)r\log r}$ випливає з твердження 15.

Твердження 22. *Нехай $\lambda \in G_1$, $0 < \mu \le \rho < +\infty$. Тоді: $\lambda \in G_L \iff \lambda \in G_S$ і $\lim\limits_{r\to+\infty}(\log r)^{-1}\int_1^r \gamma'(t)\log t\,dt = 0$, де $\gamma(t) \in S$.*

Доведення. Нехай $\lambda \in G_L$. З огляду на твердження 16, для доведення необхідності досить встановити, що

$$\lim_{r\to+\infty}(\log r)^{-1}\int_1^r \gamma'(t)\log t\,dt = \lim_{r\to+\infty}(\log r)^{-1}\int_1^r \frac{\gamma(r)-\gamma(t)}{t}dt = 0. \qquad (5)$$

З урахуванням умови $\mu > 0$, із співвідношення (3) одержимо

$$\beta(r)/\rho(r) = 1 + \rho'(r)r\log r/\rho(r) \to 1 \quad (r \to +\infty).$$

Тоді, застосувавши правило Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\lambda(r)}{h(r)} = \lim_{r\to+\infty}\frac{r\lambda'(r)}{\lambda(r)\rho(r)} = \lim_{r\to+\infty}\frac{\beta(r)}{\rho(r)} = 1,$$

де $h(r) = \int_0^r \lambda(t)\rho(t)t^{-1}dt$. Приймемо $L(r) = \lambda(r)/h(r)$. Враховуючи, що $L(r) \to 1$ $(r \to +\infty)$, а також співвідношення (3) та умову $\rho < +\infty$, дістаємо

$$\frac{rL'(r)}{L(r)} = \beta(r) - \rho(r)L(r) = \rho(r)(1 - L(r)) + \rho'(r)r\log r \to 0 \quad (r \to +\infty).$$

Поряд з цим $\beta^*(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{rh'(r)}{h(r)} = \frac{\lambda(r)\rho(r)}{h(r)} = L(r)\rho(r)$, і, тому виходячи з (2), одержимо

$$h(r) = \exp\left\{\int_1^r \rho(t)L(t)t^{-1}dt\right\}, \quad \text{тобто} \quad \lambda(r) = L(r)\exp\left\{\int_1^r \gamma(t)t^{-1}dt\right\}, \qquad (6)$$

де $\gamma(t) = \rho(t)L(t)$. Але, з одного боку (див. (3)), маємо

$$\beta(r) - \rho(r) = \rho'(r)r\log r \to 0 \quad (r \to +\infty),$$

а з іншого, з огляду на (6) та означення функцій $\beta(r)$ і $\rho(r)$, відповідно

$$\beta(r) - \rho(r) = \frac{rL'(r)}{L(r)} - \frac{\log L(r)}{\log r} + (\log r)^{-1}\int_1^r \frac{\gamma(r)-\gamma(t)}{t}dt.$$

Звідси негайно випливає потрібне співвідношення (5) з $\gamma(t) = \rho(t)L(t)$.

Доведення достатньої частини твердження 22 є очевидним.

Зауваження 2. Якщо $\lambda \in G_L$, то $\mu_0 = \mu$ і $\rho_0 = \rho$.

Автори висловлюють щиру подяку проф. О.Б. Скасківу за істотні зауваження і поради змістовного та редакційного характеру, а також за вагому допомогу при оформленні остаточного варіанту цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.
3. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции.– М.: Мир, 1980. – 304 с.
4. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. –М.: Мир, 1989. – 350 с.
5. Drasin D., Shea D.F. *Palya peaks and the oscillation of positive functions* Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – V.34, №2. – P.403–411.
6. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища школа, 1988. – 195 с.
7. Калинець Р.З.,Кондратюк А.А. *Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в* $L^p[0,2\pi]$*-метриці* Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, № 7. (в друці)
8. Братищев А.В.,Коробейник Ю.Ф. *О некоторых характеристиках роста субгармонических функций* Матем. сб. – 1978. – Т. 106, № 1. – С.44–65.
9. Шапиро А.С. *Пики Пойа монотонных функций* Дипломная раб. под. рук. Еременко А.Э. – Харьковский госуниверситет, 1985 г.
10. Гольдберг А.А.,Шейхет И.Е. *Сравнение характеристик роста функций в смысле Пойа и Кондратюка* Динамические системы и комплексный анализ. — Киев, 1992. — С.54–63.
11. Гольдберг А.А.,Левин Б.Я.,Островский И.В. Целые и мероморфные функции. – Итоги наук и техн. Соврем. проблемы мат. Фундам. напр. ВИНИТИ, 1990. – С.5–186.
12. Гольдберг А.А.,Ткач И.М. *Замечание о пиках Пойа* Изв. вузов. Матем. – 1990. – № 6. С.25–26.
13. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 319 С.
14. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. (Элементарная теория). — М.: Наука, 1965. – 424 с.
15. Drasin D. *A flexible proximate order* Bull. London Math. Soc. – 1974. – V.6, № 2. – P.129–135.
16. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. – 141 с.
17. Строчик Н.Н. Рост различных величин, характеризующих асимптотические свойства мероморфных функций – Канд. диссерт. – Львов, 1991. – 84 с.
18. Братищев А.В. *Об обращении правила Лопиталя* Механика сплошной среды. – Ростов н./Д., 1985. – С.28–42.

Львівський університет, механіко-математичний факультет.

Надійшло 15.06.1997