УДК 517.982.11.3

# БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО, ПОРОЖДЕННОЕ ВЕРХНИМ ИНТЕГРАЛОМ ДАРБУ

К.В. Желтухин

K. Zheltukhin. *Banach space generated by upper Darboux integral*, Matematychni Studii, **8**(1997) 221–226.

Banach space which is the completion of all bounded (not necessarily measurable) functions on $[0,1]$ with norm which equals the upper Darboux integral is introduced. It is proved that this space is not isomorphic to the classical Banach spaces. Some questions of its geometry are considered.

## Введение

Пространства $L_p$ интегрируемых по Лебегу функций и их аналоги лежат в числе наиболее важных и часто используемых в приложениях пространств функций. Некоторым недостатком (обеспечивающим в то же время большое удобство в работе с ними) является то, что функции наиболее общего вида (скажем, неизмеримые) не могут быть элементами таких пространств. Нас заинтересовала задача рассмотрения пространств, порожденных верхним интегралом Дарбу. Интерес был вызван именно тем, что для любой ограниченной функции, в том числе и неизмеримой, этот интеграл существует. Таким образом, возникают очень широкие пространства, нормы в которых задаются каким-то интегральным выражением.

Дадим точные определения.

Будем рассматривать пространство всех ограниченных функций на отрезке $[0;1]$, обозначим его $Z[0;1]$. Введем полунорму $p$ на $Z[0;1]$. Для $f \in Z[0;1]$ определим $p(f)$ как верхний интеграл Дарбу от функции $f$ по отрезку $[0;1]$ (см. [1, стр.100]). Проведя факторизацию по ядру полунормы $p$, получим нормированное пространство: $X[0;1] = Z[0;1] \,/\, \ker p$. Основная цель работы состоит в том, чтобы изучить пространство $X[0;1]$. В частности, мы покажем его неполноту и что пополнение не изоморфно ни одному из классических пространств $M(\Gamma), l_p, l_p(\Gamma), L_p[0;1], 1 \le p \le \infty$ (мы пользуемся терминологией и системой обозначений учебника [2]).

В §1 мы опишем ядро полунормы $p$, что позволит нам в дальнейшем свободно оперировать понятием класса эквивалентности по ядру $p$.

В дальнейшем, т.к. $X[0;1]$ не является полным пространством, будем рассматривать его пополнение $T[0;1]$.

В §2 исследуем подпространства $T[0;1]$. Найдем подпространство, изометричное $M(\Gamma)$ для множества $\Gamma$ мощности континуума. Это позволит нам утверждать, что $T[0;1]$ не может быть изоморфно $l_p, l_p(\Gamma), L_p[0;1]$ при $1 \le p < \infty$.

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 46B20.

Также найдем дополняемое подпространство, изоморфное $l_1$. Из этого будет следовать, что $T[0;1]$ не изоморфно $l_\infty(\Gamma), M(\Gamma)$.

В $T[0;1]$ можно рассматривать подпространства вида $T(Q)$, где $Q$ — счетное плотное подмножество отрезка $[0;1]$ ($T(Q)$ строится аналогично $T[0;1]$). Они интересны тем, что для любых счетных плотных подмножеств $Q_1$ и $Q_2$ отрезка $[0;1]$ пространство $T(Q_1)$ изоморфно пространству $T(Q_2)$, причем расстояние Банаха–Мазура между ними равно единице.

В §3 рассмотрим единичную сферу $T[0;1]$. Докажем, что на ней отсутствуют крайние точки. Значит, $T[0;1]$ не может быть сопряженным пространством.

## §1. Исследование ядра полунормы $p$ и полноты пространства $X[0;1]$

Отображение $p(f) = I^*(f)$ ( $I^*(f)$ — верхний интеграл Дарбу ) определено для любой функции $f \in Z[0;1]$ и, очевидным образом, для $p$ выполнены следующие свойства:

а) $p(f_1 + f_2) \leq p(f_1) + p(f_2)$;

б) $p(\alpha f) = |\alpha| p(f)$.

Т.е. $p$ является полунормой на пространстве $Z[0;1]$.

Исследуем ядро $p(\cdot)$. Для этого нам понадобится следующее равенство (см. [1, стр.106]):

$$p(f) = \lim_{d(\pi)\to 0} S(|f|, \pi),$$

где $S(|f|,\pi)$ — верхняя сумма Дарбу, $\pi$ — разбиение отрезка $[0,1]$ и $d(\pi)$ — диаметр разбиения $\pi$ .

**Теорема 1.1.** *Функция $f \in Z[0;1]$ принадлежит ядру полунормы $p$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ замыкание множества $M_\varepsilon = \{x \in [0;1] : |f(x)| > \varepsilon\}$ имеет меру Лебега нуль, т.е. $\mu(\overline{M}_\varepsilon) = 0$.*

*Доказательство.* Пусть для любого $\varepsilon > 0$ $\quad \mu(\overline{M}_\varepsilon) = 0$. Покажем, что существует такое разбиение $\pi = \{0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1\}$ отрезка $[0;1]$, что $S(|f|,\pi) < 2\varepsilon$. Т.к. $\mu(\overline{M}_\varepsilon) = 0$, то существует счетное покрытие $\overline{M}_\varepsilon$ интервалами, сумма длин которых меньше любого наперед заданного $\delta > 0$. Как замкнутое подмножество компакта (отрезка $[0;1]$), множество $\overline{M}_\varepsilon$ — компакт, и из счетного покрытия $\overline{M}_\varepsilon$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть $\overline{M}_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^m (\alpha_i,;\beta_i)$ и $\sum_{i=1}^m |\alpha_i - \beta_i| < \delta$. Построим разбиение $\pi$ так, чтобы отрезки $[\alpha_i;\beta_i]$ $\quad (i = 1\ldots m)$ входили в него $\pi = \{0 = x_0 \leq x_1 \ldots \leq x_n = 1\}$. Обозначим через $\xi_i$ величину $\sup_{[x_i;x_{i+1}]} |f|$.

Тогда $S(|f|,\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i |x_i - x_{i+1}|$. Разобьем множество индексов суммирования на два подмножества: $A = \{i : \xi_i \leq \varepsilon\}$ и $B = \{i : \xi_i > \varepsilon\}$. Тогда

$$p(f) = \sum_{i\in A} \xi_i |x_i - x_{i+1}| + \sum_{i \in B} \xi_i |x_i - x_{i+1}| \leq$$
$$\leq \varepsilon \sum_{i\in A} |x_i - x_{i+1}| + \sup_{[0;1]} |f| \sum_{i\in B} |x_i - x_{i+1}| \leq \varepsilon + \delta \sup_{[0;1]} |f|.$$

Т.к. $\varepsilon$ и $\delta$ можно выбрать произвольными, то для любого $\tau > 0$ существует разбиение $\pi$ отрезка $[0;1]$ такое, что $\sigma(|f|,\pi) < 2\tau$. Ввиду монотонного убывания величины $S(|f|,\pi)$ при измельчении разбиения имеем $p(f) = 0$.

Обратное утверждение. Пусть существует $\varepsilon_0$ такое, что $\mu(\overline{M}_{\varepsilon_0}) = a > 0$. Тогда для любого разбиения отрезка $[0;1]$ сумма длин отрезков разбиения, покрывающих $\overline{M}_{\varepsilon_0}$, больше или равна $a$. Поэтому $p(f) \geq a\varepsilon_0$. $\square$

На пространстве $Z[0;1]$ $p$ является полунормой с непустым ядром. Рассмотрим фактор-пространство $Z[0;1]\,/\,\ker p = X[0;1]$. Стандартным образом на $X[0;1]$ введем норму, которую мы будем обозначать также $p$.

**Теорема 1.2.** $X[0;1]$ — *не бочечное и, следовательно, неполное нормированное пространство.*

*Доказательство.* Наделим пространство $Z[0;1]$ новой нормой $\|f\| = \sup_{[0;1]} |f|$ (так называемое пространсво $M[0,1]$) и введем на пространстве $X[0,1]$ фактор-норму $\|\cdot\|_1$ нормы $\|\cdot\|$.

Рассмотрим множество $A \subset X[0,1]$, являющееся единичным шаром пространства $X[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_1$. Множество $A$ — абсолютно выпуклое и поглощающее . Проверим, что $A$ замкнуто в $X[0,1]$ с нормой $p$. Допустим, $A$ не является замкнутым, т.е. существует элемент $x \notin A$, существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ и $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Т.к. $x \notin A$, то существуют $\varepsilon > 0$ и подмножество $M$ отрезка $[0,1]$ такие, что $|x(t)| > 1+\varepsilon$ при $t \in M$ и $\mu(\overline{M}) \neq 0$.

Оценим $p(x - x_n)$ для любого $n$: $p(x - x_n) = I^*(|x(t) - x_n(t)|) \geq I^*(|x(t) - x_n(t)|\chi_{\overline{M}}) \geq \varepsilon\mu(\overline{M})$, так как $|x(t)| \leq 1$ для любого $t \in [0,1]$.

Имеем противоречие с тем, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Значит, $A$ — замкнутое, абсолютно выпуклое, поглощающее множество. Следовательно, $A$ — бочка. Множество $A$ не может содержать ни одного шара пространства $X[0,1]$ с нормой $p$, т.к. в любом шаре есть функции со сколь угодно большим супремумом модуля. Мы доказали, что $X[0,1]$ не бочечное и, поэтому, неполное нормированное пространство (любое полное нормированное пространство бочечно). Теорема доказана. □

Теперь наряду с пространством $X[0;1]$, будем рассматривать его пополнение — пространство $T[0;1]$.

## §2 Подпространства $T[0;1]$. Неизоморфность $T[0;1]$ классическим пространствам

**Теорема 2.1.** *Для множества* $\Gamma$ *мощности континуума пространство* $M(\Gamma)$ *изометрически вкладывается в* $X[0;1]$.

*Доказательство.* Напомним, что $M(\Gamma)$ — банахово пространство всех ограниченных функций, действующих из $\Gamma$ в $\mathbf{R}$, с нормой супремум модуля функции.

Выберем на отрезке $[0;1]$ континуум множеств $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ таких, что $A_{\gamma_1} \cap A_{\gamma_2} = \emptyset$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$, и для любого $\gamma \in \Gamma$ множество $A_\gamma$ является счетным и плотным на отрезке $[0;1]$. Теперь построим отображение $T\colon M(\Gamma) \to X[0;1]$. Для любого $a \in M(\Gamma)$ $T(a)$ в точке $x \in [0,1]$ равно $a(\gamma)$, если $x$ принадлежит некоторому множеству $A_\gamma$ и равно 0, если $x$ не принадлежит ни одному из множеств $A_\gamma$.

Т.к. функция $a(\gamma)$ ограничена, то $T(a) \in X[0;1]$ и, очевидно, что $p(T(a))$ равно норме элемента $a \in M(\Gamma)$. Поэтому, образ оператора $T$ будет искомым подпространством, изометричным М$(\Gamma)$. □

**Следствие 2.2.** *Пространство* $T[0;1]$ *не рефлексивно, несепарабельно и не имеет котипа.*

**Следствие 2.3.** *Пространство* $T[0;1]$ *не изоморфно пространствам* $l_p, l_p(\Gamma)$, $L_p[0;1]$ *при* $1 \leq p < \infty$.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится лемма, доказательство которой мы не приводим ввиду ее очевидности.

**Лемма 2.4.** *Пусть $X$ — банахово пространство и $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такие его подпространства (возможно незамкнутые), что выполнены следующие свойства:*
*1) $X = \overline{\mathrm{Lin}}\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$,*
*2) для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{n}$: $x_k \in X_k$ $\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$.*

*Тогда $X$ изометрично $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \bigoplus \overline{X}_n\right)_1$ — прямой сумме по $l_1$ пространств $\{\overline{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\overline{X}_n$ — пополнение пространства $X_n$.*

Рассмотрим последовательность пространств $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $X_k = X[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}]$ — пространство функций на отрезке $[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}]$, аналогичное $X[0;1]$. Очевидно, что для $T[0;1]$ и $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполнены все условия леммы и мы получаем теорему.

**Теорема 2.5.** *Пространство $T[0;1]$ может быть представлено в виде $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \bigoplus T_n\right)_1$, где $T_n$ — пополнение пространства $X_n$, изометричное $T[0,1]$.*

Из теоремы 2.5 сразу же получаем

**Следствие 2.6.** *В пространстве $T[0;1]$ существует дополняемое подпространство, изоморфное $l_1$.*

**Следствие 2.7.** *Пространство $T[0;1]$ не изоморфно $l_\infty(\Gamma), M(\Gamma)$.*

*Доказательство.* Пространства $l_\infty(\Gamma), M(\Gamma)$ не имеют дополняемых изоморфных $l_1$ подпространств, (см. доказательство теоремы 2.a.7 из [2]). $\square$

Перейдем к рассмотрению пространств вида $T(Q)$, где $Q$ — счетное плотное подмножество отрезка $[0;1]$. Для $T(Q)$ можно доказать все предыдущие утверждения о пространстве $T[0;1]$, внеся очевидные изменения (например, заменив в теореме 2.1 множество $\Gamma$ мощности континуума на счетное множество), причем доказательства не изменятся. Мы докажем, что расстояние Банаха-Мазура между пространствами $T(Q_1)$ и $T(Q_2)$ равно единице.

**Лемма 2.8.** *Пусть $Q_1$ и $Q_2$ — счетные плотные подмножества отрезка $[0;1]$. Тогда для любых чисел $a$ и $b$ таких, что $a < 1 < b$ существует биективное отображение $g\colon Q_1 \to Q_2$, сохраняющее порядок (т.е. если $t > x$, то $g(t) > g(x)$) и такое, что $a < \frac{|x-t|}{|g(x)-g(t)|} < b$ для любых $x, t \in Q_1$.*

*Доказательство.* Занумеруем $Q_1$ и $Q_2$: $Q_1 = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $Q_2 = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Отображение $g$ будем строить по следующей схеме: берем в $Q_1$ элемент с наименьшим номером, у которого нет пары, и находим ему пару в $Q_2$, затем в $Q_2$ берем элемент с наименьшим номером, у которого нет пары, и ищем ему пару в $Q_1$. Продолжая этот процесс, мы переберем все элементы $Q_1$ и $Q_2$. Пусть $\{0,1\} \subset Q_1 \cap Q_2$ (это допущение не ограничевает общности) и $g(0) = 0, g(1) = 1$. Берем $x \in Q_1$ и ищем $y \in Q_2$ так, чтобы $a < \frac{|x-0|}{|y-0|} < b$ и $a < \frac{|x-1|}{|y-1|} < b$. Это легко сделать, т.к. $Q_2$ плотно в $[0,1]$. Получаем пару $(x^1, y^1)$ (мы пишем индекс вверху, чтобы отличать его от номера элемента).

Пусть мы выбрали $n$ пар, удовлетворяющих следующим свойсвам: если $y^i > y^j$, то $x^i > x^j$ и $a < \frac{|x^i - x^j|}{|y^i - y^j|} < b$. Построим $n+1$ пару, найдем для элемента $y \in Q_2$ элемент $x \in Q_1$. Для $x$ должны выполнятся следующие ограничения: $a|y^i - y| < |x^i - x| < b|y^i - y|$; при этом $x > x^i$, если $y > y^i$ и $x < x^i$, если $y < y^i$, $i = 1, \ldots, n$.

Перепишем их так:

$$\begin{aligned} &x \in [-b(y-y^i)+x^i; -a(y-y^i)+x^i] \quad y<y^i \\ &x \in [a(y-y^i)+x^i; b(y-y^i)+x^i] \quad y>y^i \ i=1,...,n. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Таоке $x$ будет существовать, если пересечение отрезков вида $(*)$, его содержащих, не пусто, т.е. левый конец любого отрезка меньше правого конца любого отрезка. Проверим, что пересечение отрезков не пусто.

Возьмем, например, два таких отрезка, что $y > y^i > y^j$, и проверим неравенство: $a(y-y^i)+x^i < b(y-y^j)+x^j$. Преобразуем его:

$$\begin{aligned} a(y-y^i)+x^i-b(y-y^j)-x^j<0, \\ (a-b)y-ay^i+by^j+x^i-x^j+by^i-by^i<0, \\ (a-b)y-(a-b)y^i-b(y^i-y^j)+(x^i-x^j)<0, \end{aligned}$$

последнее неравенсво выполнено, т.к. $(a-b)(y-y^i)<0$ и $b(y^i-y^j)>(x^i-x^j)$. Аналогично рассматриваются остальные случаи расположения отрезков. Итак, мы можем построить отображение $g\colon Q_1 \to Q_2$, обладающее искомыми свойствами. □

**Теорема 2.9.** *Пространства $T(Q_1)$ и $T(Q_2)$ изоморфны и расстояние Банаха-Мазура между ними равно единице.*

*Доказательство.* Зафиксируем числа $a$ и $b$, $a<1<b$ и возьмем отображение $g\colon Q_1 \to Q_2$ из леммы 2.8 ($g$ зависит от $a,b$). Определим оператор $G\colon X(Q_2) \to X(Q_1)$ равенством $G(f)(x)=f(g(x))$, где $x\in Q_1$, $f\in X(Q_2)$. Аналогично определяем оператор $G^{-1}$. Очевидно, что для верхних сумм Дарбу выполнено равенство:
$aS(|f|,g(\pi)) < S(G(f),\pi) < bS(|f|,g(\pi))$. Разбиение $\pi$ берем по точкам $Q_1$.

Значит, $ap(f) < p(G(f)) < bp(f)$ для любой функции $f\in X(Q_2)$, т.е. $\|G\|\|G^{-1}\| < a^{-1}b$. Продолжим $G$ и $G^{-1}$ по непрерывности на $T(Q_1)$ и $T(Q_2)$ соответственно. Получим изоморфизм $G$ пространств $T(Q_1)$ и $T(Q_2)$. Т.к. $a$ и $b$ могут быть выбраны сколь угодно близкими к единице, то расстояние Банаха-Мазура между пространствами равно единице. □

## §3. $T[0;1]$

Для функции $f$, принадлежащей пространству $Z[0;1]$, определим функцию $I^*(f,t)$, равную верхнему интегралу Дарбу от $f$ по отрезку $[0;t]$. В частности, $I^*(|f|,1)=p(f)$.

Функция $I^*(f,t)$ является непрерывной по $t$ функцией при фиксированном $f\in Z[0;1]$. Зафиксируем функцию $f\in Z[0;1]$. Пусть $I^*(f,1)=a$, $I^*(f,0)=0$. По теореме о среднем значении для непрерывных функций существует точка $t_0\in[0;1]$ такая, что $I^*(f,t_0)=\frac{a}{2}$.

Докажем вспомогательную лемму.

**Лемма 3.1.** *Для любых функций $f$ и $g$, принадлежащих $Z[0;1]$, существуют точки $t_1$ и $t_2$ такие, что $I^*(|f|,t_1)=\frac{1}{2}I^*(|f|,t)$ и $I^*(|g|,t_2)=\frac{1}{2}I^*(|g|,t)$. Положим*

$$\bar f = \begin{cases} f & \textit{при } x\in[0;t_1], \\ 0 & \textit{при } x\in[t_1;0], \end{cases} \qquad \bar g = \begin{cases} g & \textit{при } x\in[0;t_2], \\ 0 & \textit{при } x\in[t_2;0]. \end{cases}$$

*Тогда* $I^*(|\bar{f}-\bar{g}|,1) \leq 3I^*(|f-g|,1)$, *т.е.* $p(|\bar{f}-\bar{g}|) \leq 3p(|f-g|)$.

*Доказательство.* Пусть $t_1 < t_2$ $I^*(|\bar{f}-\bar{g}|,1) \leq I^*(|f-g|,t_1) + I^*(|g|,t_2) - I^*(|g|,t_1)$. Для первого слагаемого оценка очевидна: $I^*(|\bar{f}-\bar{g}|,t_1) \leq I^*(|f-g|,1)$. Оценим разность

$$I^*(|g|,t_2) - I^*(|g|,t_1) \leq I^*(|g|,t_2) + I^*(|g-f|,t_1) - I^*(|f|,t_1).$$

Учитывая, что $I^*(|g-f|,t_1) \leq I^*(|g-f|,1)$, нам осталось оценить $|I^*(|g|,t_2) - I^*(|f|,t_1)|$. Из определения функций $\bar{f}$ и $\bar{g}$ следует

$$|I^*(|g|,t_2) - I^*(|f|,t_1)| = \frac{1}{2}|I^*(|g|,1) - I^*(|f|,1)| \leq I^*(|g-f|,1).$$

Складывая нужные неравенства, получаем требуемое неравенство $I^*(|\bar{f}-\bar{g}|,1) \leq 3I^*(|f-g|,1)$. □

**Теорема 3.2.** *На сфере пространства* $T[0;1]$ *нет крайних точек. Более того, каждая точка* $f \in S(T[0,1])$ *представляется как* $f = \frac{1}{2}(f^1+f^2)$, *где* $f^1, f^2 \in S(T[0,1])$, $\|f^1 - f^2\| = 2$.

*Доказательство.* По теореме об общем виде пополнения нормированного пространства пространство $T[0;1]$ можно представить как пространство классов эквивалентных фундаментальных последовательностей пространства $X[0;1]$.

Пусть последовательность $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ принадлежит единичной сфере пространства $T[0;1]$. Для каждой функции $f_i$ существует точка $t_i \in [0;1]$ такая, что:
$I^*(|f_i|,t_i) = \frac{1}{2}I^*(|f|,1)$. Мы можем определить две функции

$$f_i^1 = \begin{cases} 2f_i & \text{при } t \in [0;t_i], \\ 0 & \text{при } t \in [t_i;0], \end{cases} \qquad f_i^2 = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0;t_i], \\ 2f_i & \text{при } t \in [t_i;0]. \end{cases}$$

По лемме 3.1 последовательности $f^1 = \{f_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ и $f^2 = \{f_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальны и, поэтому, принадлежат пространству $T[0;1]$. Все остальные свойства $f^1$ и $f^2$ сразу следуют из определения. □

Отметим, что тем же свойством (каждая точка сферы — середина отрезка на сфере длины 2) обладает и обычное пространство $L_1$. Любопытно, что этот факт нам не встречался в литературе, а само свойство по-видимому никем не изучалось.

**Следствие 3.3.** *Пространство* $T[0;1]$ *не является сопряженым ни к одному из банаховых пространств.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – Т.2, М.: Наука, 1966.

2. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I. – Springer-Verlag, 1977

Харьковский государственный университет, механико-математический факультет,

Украина, 310077 Харьков, пл. Свободы, 4.

e-mail: zheltukhina@ilt.kharkov.ua

*Получено 12.10.1996*