УДК 512.5

# НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ РОСТА ПЕРИОДОВ В ГРУППАХ ГРИГОРЧУКА

Ю.Г. Леонов

Yu. Leonov. *The low estimation for the growth function of periods in Grigorchuk's groups*, Matematychni Studii, **8**(1997) 192–197.

The low estimation for function of growth of periods in the 3-generated Grigorchuk's 2-groups is obtained.

## 1. Введение

В 1984 году Р.И. Григорчук построил новый пример бесконечной 3-порожденной 2-группы [1]. Построенные им группы обладают целым рядом интересных свойств. Они являются финитно-аппроксимируемыми, аменабельными, имеют промежуточный рост. В этой же статье было положено начало изучению функций роста периодов конечно-порожденных периодических групп. В данной работе мы продолжим исследование функций роста периодов групп Григорчука. В частности, мы получим оценку снизу для этих функций в достаточно большом классе рассматриваемых групп.

Определим данные группы, а также необходимые понятия, следуя [1]. Рассмотрим пространство последовательностей

$$\Omega = \bigl\{\omega = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \omega_n \in \{1,2,3\}\bigr\}.$$

Зададим отображение $\omega_i \mapsto \overline{\omega}_i$, где

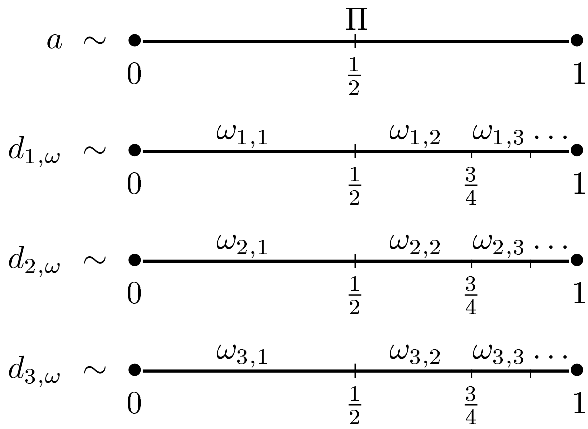
$$\overline{1} = \begin{pmatrix} \text{Т} \\ \Pi \\ \Pi \end{pmatrix}, \quad \overline{2} = \begin{pmatrix} \Pi \\ \text{Т} \\ \Pi \end{pmatrix}, \quad \overline{3} = \begin{pmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \text{Т} \end{pmatrix},$$

$\text{Т}, \Pi$ — буквы.

Пусть $W_{1,\omega}, W_{2,\omega}, W_{3,\omega}$ — бесконечные слова в алфавите $\{\text{Т}, \Pi\}$, совпадающие, соответственно, с первой, второй и третьей строками в последовательности $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 \dots \overline{\omega}_n \dots$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20E20.

Определим преобразования интервала $(0,1)$, взятого без точек вида $\frac{k}{2^n}$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{0, 2^n}$.




где $W_{1,\omega} = w_{1,1} \dots w_{1,n} \dots$, $\quad W_{2,\omega} = w_{2,1} \dots w_{2,n} \dots$, $\quad W_{3,\omega} = w_{3,1} \dots w_{3,n} \dots$.

Под буквами Т и П будем понимать, соответственно, тождественное преобразование и перестановку половин интервала, к которому эта буква относится. Таким образом, по определению буквы Т и П относятся к интервалам вида $\left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Группу $G_\omega = \langle a, d_{1,\omega}, d_{2,\omega}, d_{3,\omega} \rangle$ назовем *группой Григорчука* типа $\omega$. Эта группа является периодической, если $\omega \in \Omega_0 \subset \Omega$, где $\Omega_0$ — пространство последовательностей, в которых цифры $1, 2, 3$ входят бесконечное число раз [1]. В дальнейшем будем рассматривать $\omega \in \Omega_0$.

Пусть $l(g)$ — длина элемента $g$ относительно некоторой фиксированной системы порождающих. Функцией роста периодов группы $G_\omega$ назовем функцию

$$\pi_\omega(n) = \max_{l(g) \leq n} |g|.$$

Для неубывающих функций натурального аргумента будем писать $f_1(n) \preceq f_2(n)$ ($f_2(n) \succeq f_1(n)$), если существует $c > 0$ такое, что $f_1(n) \leq f_2(cn)$. Говорят, что функции $f_1(n)$ и $f_2(n)$ эквивалентны, если $f_1(n) \preceq f_2(n)$ и $f_2(n) \preceq f_1(n)$. Функции роста периодов группы от различных систем ее образующих эквивалентны между собой, поэтому имеет смысл изучать поведение функции с точностью до эквивалентности.

В [1] для $\omega \in \Xi$ получена оценка $\pi_\omega(n) \preceq n^9$, где

$$\Xi = \{u_1 u_2 u_3 \dots u_k \dots \mid \text{при } u_s, u_{s+1}, u_{s+2} \text{ попарно различных для } s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)\}.$$

В этой же работе автор ссылается на устное сообщение И.Г. Лысенка, согласно которому $\pi_\omega(n) \succeq n^{\frac{1}{2}}$, при $\omega = 123123\dots$.

Целью данной работы является получение нижней оценки функции роста периодов, которая включает в себя оценку И.Г. Лысенка. Пусть $\Xi_1$ — пространство последовательностей $\omega \in \Omega_0$, в которых выполняется $\omega_n \neq \omega_{n+1}$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема.** *Пусть* $\omega \in \Xi_1$. *Тогда* $\pi_\omega(n) \succeq n^{\frac{1}{2}}$.

## 2. Проекции

Группа $G_\omega$ является подгруппой сплетения $P_\infty = \wr_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2^{(i)}$. Каждый элемент такого сплетения может быть задан так называемой таблицей [2] вида

$$[b_0, b_1(x_1), b_2(x_1,x_2), \dots, b_k(x_1,\dots,x_k), \dots],$$

где $x_1, x_2, \dots$ — формальные переменные кольца $\mathbb{Z}_2$, $b_0, b_1, \dots$ — полиномы от соответствующих переменных с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_2$. Произведение таблиц определено следующим образом:

$$[b_0, b_1(x_1), b_2(x_1,x_2), \dots] \cdot [c_0, c_1(x_1), c_2(x_1,x_2), \dots] =$$
$$= [b_0 + c_0, b_1(x_1) + c_1(x_1 + b_0), b_2(x_1,x_2) + c_2(x_1 + b_0, x_2 + b_1(x_1)), \dots].$$

В этих терминах порождающие элементы группы $G_\omega$ можно представить так:

$$a = [1,0,0,\dots], \quad d_{j,\omega} = [0, T_j^1(x_1+1), \dots, T_j^k(x_1x_2\dots x_{k-1}(x_k+1)), \dots],$$

где для любого многочлена $Y$ и $k \in \mathbb{N}$ $T_j^k Y = \begin{cases} 0, & j = w_k, \\ Y, & j \neq \omega_k. \end{cases}$

Будем называть $R_n^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$, где $i = \overline{1, 2^n}$, $n = 0,1,2\dots$, ***интервалом уровня*** $n$. Пусть $H_\omega^{(n)}$ — подгруппа группы $G_\omega$, состоящая из элементов, переводящих интервалы уровня $n$ в себя. Каждый элемент $g \in H_\omega^{(n)}$ определяет на интервале $R_n^{(i)}$ некоторое преобразование $\varphi_{R_n^{(i)}}(g)$, которое назовем ***проекцией*** $g$ на $R_n^{(i)}$. Заметим (ср. [1]), что проекции элементов группы $H_\omega^{(n)}$ на интервалах уровня $n$ образуют группу $G_{\sigma^n\omega}$, где $\sigma^n\omega = \{\omega_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Порождающие элементы группы $G_{\sigma^n\omega}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для упрощения обозначим $a_n, (d_j)_n$, $j \in \Phi = \{1,2,3\}$.

В группе $G_{\sigma^n\omega}$ очевидны следующие соотношения: $a_n^2 = (d_{j_1})_n^2 = 1$, $(d_{j_1})_n(d_{j_2})_n = (d_{j_3})_n$, где $j_1, j_2, j_3$ — попарно различные элементы множества $\Phi$. Следовательно, элементы $d_1, d_2$ порождают группу $\{1, d_1, d_2, d_3\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Единицу этой группы иногда будем обозначать $d_0$.

Группа $H_\omega = H_\omega^{(1)} = \langle d_1, d_2, d_3, ad_1a, ad_2a, ad_3a\rangle$ имеет следующую таблицу проектирования своих порождающих:

| | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $ad_1a$ | $ad_2a$ | $ad_3a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_{R_1^{(1)}}$ | $u_{1,1}$ | $u_{2,1}$ | $u_{3,1}$ | $(d_1)_1$ | $(d_2)_1$ | $(d_3)_1$ |
| $\varphi_{R_1^{(2)}}$ | $(d_1)_1$ | $(d_2)_1$ | $(d_3)_1$ | $u_{1,1}$ | $u_{2,1}$ | $u_{3,1}$ |

где

$$u_{j,n} = \begin{cases} a_n, & j \neq \omega_n, \\ 1, & j = \omega_n. \end{cases}$$

Аналогичную операцию проектирования можно произвести и в терминах сплетений. Если $g = [0, b_1(x_1), b_2(x_1,x_2), \dots] \in H_\omega$, то

$$\varphi_{R_1^{(1)}}(g) = [b_1(0), b_2(0,x_1), \dots], \quad \varphi_{R_1^{(2)}}(g) = [b_1(1), b_2(1,x_1), \dots].$$

То есть при проектировании таблицы на левый (или правый) полуинтервал осуществляется гомоморфизм формальных переменных: $x_1 \to 0$ (или 1), $x_n \to x_{n-1}$ при $n > 1$, а также сдвиг последовательности полиномов влево: $(0, b_1, b_2, \dots) \to (b_1, b_2, b_3, \dots)$.

При $g = [0, \dots, 0, b_n(x_1, \dots, x_n), \dots] \in H_\omega^{(n)}$ проекция на любой интервал производится индуктивно с использованием проектирования на один шаг.

В общем случае элемента $g \in G_\omega$ обычная проекция не осуществима, однако, при помощи сплетения можно определить аналог проекции на интервалы уровня $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_{R_n^{(i)}}\big([b_0, b_1(x_1), \dots, b_n(x_1, \dots, x_n), \dots]\big) = \varphi_{R_n^{(i)}}\big([0, \dots, 0, b_n(x_1, \dots, x_n), \dots]\big),$$

который мы будем в дальнейшем называть просто проекцией.

## 3. Конструкция

Зафиксируем последовательность $\omega \in \Xi_1$. Построим по индукции множество элементов $j(n)_k \in G_{\sigma^k\omega}$, $j \in \Phi$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, с условием

$$\varphi_{k, R_{n-1}^{(2^{n-1})}}(j(n)_k) = (d_j)_{n-1+k}^{a_{n-1+k}},$$

где $\varphi_k$ есть аналог проекции $\varphi$ в группе $G_{\sigma^k\omega}$. Возьмем $j(1)_k = (d_j)_k^{a_k}$. При $n \geq 2$ положим $j(n)_k = (d_j)_k^{\omega_{n+k}(n-1)}$. Пусть $r_{1,\omega} = j(1)_0$, для некоторого $j \notin \{0, \omega_1\}$ и $r_{1,\sigma^k\omega} = \omega_k(1)_k$, $k \in \mathbb{N}$. Одновременно, при $n > 1$ рассмотрим элементы $r_{n,\sigma^k\omega} = \omega_{n-1+k}(n)_k \cdot \omega_{n-1+k}(n-1)_k$. Нетрудно видеть, что $\varphi_{R_m^{(2^m)}}(r_{n,\omega}) \notin H_\omega^{(m)}$ тогда и только тогда, когда $m = n$. Более того, если $R_m^{(i)} \not\subset R_{n-3}^{(2^{n-3})}$, то $\varphi_{R_m^{(i)}}(r_{n,\omega}) = 1_{G_m}$, $i = \overline{1, 2^m}$, $m \geq n - 3 > 0$.

Пусть $Z$ — множество всех конечных возрастающих последовательностей алфавита $\mathbb{Z}_+$. Будем считать $v_{k,\omega}(n) = r_{n,\sigma^k\omega}$. Для $z = \{0, n_1, \dots, n_s\} \in Z$, $s > 1$, с помощью индукции определим элемент $v_{k,\omega}(n_1, \dots, n_s) = v_{k,\omega}(n_2, \dots, n_s) \cdot r_{n_1,\sigma^k\omega}$ и множество

$$V_{k,\omega}(0, n_1, \dots, n_s) = \{v_{k,\omega}(n_1, \dots, n_s) \cdot a_k,\ v_{k,\omega}(n_1, \dots, n_s) \cdot \omega_{k+1}(1)_k \cdot a_k\}.$$

## 4. Основной результат

Отправным пунктом исследования роста периодов снизу служит знание внутренних свойств элементов множества $V_\omega(z) = V_{0,\omega}(z)$ для $z \in Z$.

**Лемма 1.** *Пусть $v \in V_\omega(0, n_1, \dots, n_s)$. Тогда*
*а) $\varphi_{R_1^{(2)}}(v) = v_{1,\omega}(n_1 - 1, \dots, n_s - 1)$ при $n_1 \neq 1$,*
*б) $\varphi_{R_1^{(2)}}(v) \in V_{1,\omega}(0, n_2 - 1, \dots, n_s - 1)$ при $n_1 = 1$.*

*Доказательство.* Для определенности, пусть $v = v_{0,\omega}(n_1, \dots, n_s)$. Заметим, что

$$\varphi_{k, R_1^{(2)}}(j(n)_k) = \begin{cases} j(n-1)_{k+1}, & \text{для } n > 1 \\ u_{j,k+1}, & \text{для } n = 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\varphi_{k,R_1^{(2)}}(r_{2,\sigma^k\omega}) = \varphi_{k,R_1^{(2)}}(\omega_{k+1}(2)_k \cdot \omega_{k+1}(1)_k) = \omega_{k+1}(1)_{k+1} = r_{1,\sigma^{k+1}\omega},$$
$$\varphi_{k,R_1^{(2)}}(r_{n,\sigma^k\omega}) = \omega_{n-1+k}(n-1)_{k+1} \cdot \omega_{n-1+k}(n-2)_{k+1} = r_{n-1,\sigma^{k+1}\omega}, \quad \text{при } n > 2.$$

Отсюда

$$\varphi_{R_1^{(2)}}(v) = \varphi_{R_1^{(2)}}(r_{n_s,\omega} \cdot \ldots \cdot r_{n_1,\omega}) = r_{n_s-1,\sigma\omega} \cdot \ldots \cdot r_{n_1-1,\sigma\omega} = v_{1,\omega}(n_1-1, \ldots, n_s-1)$$

при $n_1 > 1$ и

$$\varphi_{R_1^{(2)}}(v) = v_{1,\omega}(n_2-1, \ldots, n_s-1) \cdot a_1 \in V_{1,\omega}(0, n_2-1, \ldots, n_s-1)$$

при $n_1 = 1$. Лемма доказана. □

**Лемма 2.** *Пусть $z = \{0, n_1, n_2, \ldots, n_s\} \in Z$, $v \in V_\omega(z)$. Тогда существует $z' \in Z$ такое, что*
*а) $\varphi_{R_{n_1}^{(2^{n_1})}}(v^2) \in V_{n_1,\omega}(z')$ при $n_1 \neq 1$ или $n_2 \neq 3$,*
*б) $\varphi_{R_3^{(8)}}(v^2) \in V_{3,\omega}(z')$ при $n_1 = 1$ и $n_2 = 3$.*

*Доказательство.* Прежде всего,

$$v_1 = \varphi_{R_1^{(1)}}(v) \in \big\{(d_j)_1, (d_{\omega_2})_1 \cdot (d_{\omega_2})_1^{a_1} \cdot (d_j)_1 \mid j \in \{0,1,2,3\}\big\}.$$

Если $v_1 = (d_j)_1$, то

$$\overline{v} = \varphi_{R_{n_1}^{(2^{n_1})}}(v^2) = v_2 \cdot v_1 = v_2' \cdot (d_j)_{n_1}^{a_{n_1}} \cdot a_{n_1},$$

где $v_2 = \varphi_{R_{n_1}^{(2^{n_1})}}(v)$, $v_2' = v_2 \cdot a_{n_1}$. Отсюда и из леммы 1, существует $z' \in Z$ такое, что $\overline{v} \in V_{n_1,\omega}(z')$. Причем, при $s = 1$, последовательность $z'$ принадлежит множеству $\{\{0\}, \{0,1\}\}$, а при $s > 1$

$$z' \in \begin{cases} \big\{\{0, 1, n_2-n_1, \ldots, n_s-n_1\}, \{0, n_2-n_1, \ldots, n_s-n_1\}\big\}, & n_2 - n_1 > 1, \\ \big\{\{0, 1, n_3-n_1, \ldots, n_s-n_1\}, \{0, n_3-n_1, \ldots, n_s-n_1\}\big\}, & n_2 - n_1 = 1. \end{cases}$$

Выбор одной из двух возможностей для $z'$ зависит от индекса $j$ и последовательности $\omega$.

Допустим, что $v_1 = (d_{\omega_2})_1 \cdot (d_{\omega_2})_1^{a_1} \cdot (d_j)_1$. Это возможно лишь в случае $3 \in Z$. При $n_1 \in \{2,3\}$ имеем аналогично $\overline{v} = v_2' \cdot (d_{\omega_2})_{n_1}^{a_{n_1}} \cdot a_{n_1}$.

Для $n_1 = 1$ остается рассмотреть 2 варианта:
а) $n_2 = 2, n_3 = 3$ и
б) $n_2 = 3$.

Случай а) проверяется непосредственно, расписыванием элемента $\overline{v} = v_2 \cdot v_1$.

Для случая же б) не существует $z' \in Z$ с условием $\varphi_{R_1^{(2)}}(v^2) \in V_{1,\omega}(z')$, поэтому приходиться выбирать следующий логически возможный уровень проектирования $n_2 = 3$. Лемма доказана. □

Последовательность $z'$, полученную в лемме из последовательности $z$, обозначим $\rho_{\omega,v}(z)$.

**Лемма 3.** *Пусть* $v \in V_\omega(0, 2, 4, \dots, 2n)$*. Тогда* $|v| \geq 2^n$.

*Доказательство.* В силу леммы 2, если множество $\rho^n_{\omega,v}(0, 2, 4, \dots, 2n)$ не является пустым, то $v^{2^n} \neq 1$.

Покажем это. Рассмотрим следующие последовательности:

$$A_n = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}, \qquad B_n = \{0, 1, 2, 4, \dots, 2n\},$$
$$C_n = \{0, 3, 5, \dots, 2n+1\}, \quad D_n = \{0, 1, 3, 5, \dots, 2n+1\}.$$

Ясно, что количество элементов в каждой из этих последовательностей $\geq n+1$. Из доказательства леммы 2 видно, что

$$\rho_{\omega,v}(A_n) \in \{A_{n-1}, B_{n-1}\}, \quad \rho_{\omega,v}(B_n) \in \{C_{n-1}, D_{n-1}\},$$
$$\rho_{\omega,v}(C_n) \in \{A_{n-1}, B_{n-1}\}, \quad \rho_{\omega,v}(D_n) \in \{A_{n-1}, B_{n-1}\}$$

независимо от $\omega$ и $v$. Нетрудно видеть, что это доказывает лемму. □

**Лемма 4.** *Пусть* $v \in V_\omega(0, 2, \dots, n)$*,* $n$ *четное. Тогда длина* $l(v) \leq 2^{n+3}$.

*Доказательство.* Действительно, по индукции $l(j(1)_0) \leq 3$ и для некоторого $j_1 \in \Phi$ имеем $l(j(n)_0) \leq 2(l(j_1(n-1)_0)) + 1 \leq 2^{n+1} - 1$.

Следовательно, $l(r_{n,\omega}) \leq 2^{n+2}$. Отсюда, для элемента $v$ из условия леммы верно

$$l(v) \leq 2^{n+2} + 2^n + 2^{n-2} + \dots \leq 2^{n+2} + 2^{n+1} \leq 2^{n+3}. \square$$

**Теорема.** *Для* $\omega \in \Xi_1$ *выполняется*

$$\pi_\omega(n) \succeq n^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

*Доказательство.* Для $v \in V_\omega(0, 2, \dots, 2m)$, благодаря леммам 3 и 4, имеем $|v| \geq 2^m$ и $l(v) \leq 2^{2m+3}$. Отсюда, $\pi_\omega(2^{2m+3}) \geq 2^m$ и $\pi_\omega(n) \geq \sqrt{\frac{1}{8}n}$. Оценка (1) установлена с точностью до эквивалентности роста периодов. Теорема доказана. □

В заключение отметим, что в общем случае $\omega \in \Omega_0$, с помощью аналогов построенных экстремальных множеств $V_\omega(z)$ можно также получить некоторые оценки снизу для функции роста периодов $\pi_\omega(n)$, подбирая подходящим образом последовательности $z \in Z$.

Автор благодарит проф. В.И. Сущанского за постановку задачи и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григорчук Р.И. *Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних* Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – №5. – С.939–985.
2. Сущанский В.И. *Сплетения и периодические факторизуемые группы* Матем. сб. – 1989. – Т.180, №8. – С.1073–1091.

270000, Украина, г. Одесса, ул. Кузнечная 1,

факультет автоматической электросвязи.

*Получено 1.03.1997*