УДК 519.4

# ЛОКАЛІЗАЦІЇ ТОПОЛОГІЙ НА ДИСТРИБУТИВНИХ ГРАТКАХ

І.Я. Тушницький

I. Tushnytskyi. *Localizations of topologies on distributive lattices*, Matematychni Studii, **8**(1997) 180–188.

In this paper the bounded distributive lattices with local defined topologies (pre topologies) are introduced and described. The results are completely similar to that of the author, W. Brandal and E. Barbut for commutative rings. It is shown that the lattice of subsets of infinite set with finite complements is an adequate model of the introduced notions.

Для дуокілець, що задовольняють деяку додаткову умову (зокрема комутативних кілець) в працях [5], [6] було доведено такий факт: кільце є кільцем з локально визначеними скрутами тоді і тільки тоді, коли воно $h$-локальне. Більш загально, таке кільце є кільцем з локально визначеними передскрутами, якщо воно $h$-квазілокальне. Теорію скрутів для дистрибутивних граток, аналогічну існуючій в теорії кілець, розвинув Ж. Жержеску ([3]). В своїх працях [2] і [3] він ввів поняття гратки дробів, а також топології на дистрибутивній обмеженій гратці. Використовуючи ці поняття в даній статті доводяться результати, аналогічні до результатів, одержаних в [5], [6] для обмежених дистрибутивних граток. Автор вводить поняття $h$-локальноі гратки, яке є частковим випадком поняття $\mathfrak{F}$-локальноі гратки у випадку, коли в якості $\mathfrak{F}$ взяти множину всіх ненульових ідеалів гратки $L$.

Нагадаємо деякі необхідні поняття, які використовуватимуться в роботі. Надалі $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ або просто $L$ — обмежена дистрибутивна гратка, $\mathrm{Id}(L)$ — гратка ідеалів гратки $L$, $\mathrm{Max}(L)$ — множина всіх максимальних ідеалів гратки $L$ і $\mathrm{Spec}(L)$ — множина всіх простих ідеалів гратки $L$. Для кожного $I \in \mathrm{Id}(L)$ ми розглядатимемо множину $\mathrm{Max}(I) = \{M \in \mathrm{Max}(L) \mid I \subseteq M\}$. Для кожного елемента $a$ гратки $L$ визначимо $(a]$ головний ідеал, породжений елементом $a$ наступним чином: $(a] = \{x \in L \mid x \leq a\}$.

Підмножина $S$ гратки $L$ називається $\wedge$-замкненою, якщо $1 \in S$ і з того, що $x, y \in S$ випливає, що $x \wedge y \in S$. Кожна $\wedge$-замкнена підмножина $S$ гратки $L$ задає конгруенцію на $L$. Формально ця конгруенція визначається наступним чином

$$x \sim_S y \Leftrightarrow (\exists t \in S)(x \wedge t = y \wedge t).$$

Факторгратка $L_S = L/\sim_S$ називається граткою дробів гратки $L$ відносно $S$ ([4]).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18E40, 06D99.

Якщо $P \in \mathrm{Spec}(L)$, то $S = L \setminus P$ є $\wedge$ -замкненою і $L_S$ позначається через $L_P$. Сама конгруенція $\sim_S$ позначається через $\sim_P$ і клас конгруентності $[x]_S$ через $[x]_P$. Якщо $I \in \mathrm{Id}(L)$, то $I_S = \{[x]_S \mid x \in I\}$ є ідеалом гратки $L_S$. Для кожного $P \in \mathrm{Spec}(L)$ можна визначити канонічний морфізм $p_P\colon L \longrightarrow L_P$ за правилом $p_P(x) = [x]_P$, де $x \in L$ ([4]). Легко бачити, що якщо $J$ — ідеал гратки $L_P$, то $p_P^{-1}(J)$ — ідеал гратки $L$.

Для $I \in \mathrm{Id}(L)$ і $x \in L$ розглянемо ідеал $I : x = \{y \in L \mid x \wedge y \in I\}$. Топологією на гратці $L$ ([5]) називається непорожня сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів гратки $L$ така, що виконуються наступні умови:

($T_1$) $\forall I \in \mathfrak{F}\ \forall x \in L : I : x \in \mathfrak{F}$;

($T_2$) Для будь-яких ідеалів $I_1$, $I_2$ гратки $L$, якщо $I_2 \in \mathfrak{F}$ і $I_1 : x \in \mathfrak{F}$ для кожного $x \in I_2$, то $I_1 \in \mathfrak{F}$.

Передтопологією на гратці $L$ називається така непорожня сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів гратки $L$, що виконуються наступні умови:

($P_1$) $\forall I \in \mathfrak{F} \forall J \in \mathrm{Id}\, L : I \subseteq J \Rightarrow J \in \mathfrak{F}$.

($P_2$) $\forall I, J \in \mathfrak{F} : I \cap J \in \mathfrak{F}$.

Зауважимо, що кожна граткова топологія на $L$ є її передтопологією.

Для будь-яких ідеалів $I$ і $J$ визначимо їх добуток $I \wedge J$ як множину всеможливих верхніх граней $(i_1 \wedge j_1) \vee (i_2 \wedge j_2) \vee \ldots \vee (i_n \wedge j_n)$, де $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$, $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$, $n$ — довільне натуральне число. Множину всіх ненульових ідеалів гратки $L$ і їх скінченних добутків позначатимемо через $\mathcal{R}_0(L)$. Зауважимо, що для граток, в яких існують хоча б два такі елементи $a$ і $b$, що $a \wedge b = 0$, множина $\mathcal{R}_0(L)$ — це сукупність всіх ідеалів гратки $L$. Справді, тоді крім ненульових ідеалів гратки $L$ ця множина $\mathcal{R}_0(L)$ містить ще й ідеал $(a] \wedge (b] = 0$. Для граток, що не задовольняють цю умову, множина $\mathcal{R}_0(L)$ — це сім'я всіх ненульових ідеалів гратки $L$. Поняття простого ідеалу в гратці цілком аналогічне до поняття простого ідеалу кільця.

Топологія (передтопологія) $\mathfrak{F}$ гратки $L$ називається власною, якщо $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{R}_0(L)$.

**Означення 1.** Гратка $L$ називається $h$-локальною, якщо вона задовольняє наступні умови:

(i) кожний ненульовий простий ідеал гратки $L$ міститься в єдиному максимальному ідеалі;

(ii) кожний ненульовий ідеал гратки $L$ міститься лише в скінченній кількості максимальних ідеалів.

Позначимо через $\mathcal{B}(L)$ підсім'ю сім'ї ідеалів $\mathcal{R}_0(L)$ тих, що містяться лише в скінченній кількості максимальних ідеалів гратки $L$. Легко видно, що $\mathcal{B}(L)$ — передтопологія на гратці $L$.

Визначимо на множині всіх ідеалів гратки $L$ відображення $K$, яке ставить у відповідність ідеалу $I$ гратки $L$ ідеал $K(I) = \{a \in L \mid I : a \in \mathcal{B}(L)\}$. Неважко переконатися, що $K(I)$ є ідеалом для кожного ідеалу $I$ гратки $L$.

**Означення 2.** Гратка $L$ називається $h$-квазілокальною, якщо вона задовольняє умові (i) з означення 1, а також умову:

(ii′) Для кожного ненульового ідеалу $I$ гратки $L$: $K(I) \in \mathcal{B}$.

Наступна лема доведена в [3]:

**Лема 1.** *Якщо* $I \in \mathrm{Id}(L)$, *то* $I = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(L)} p_M^{-1}(I_M)$.

Нам необхідна наступна лема, що описує основні властивості переходу до гратки дробів і яка є аналогом леми з праці [1].

**Лема 2.** *Нехай $I$ — ідеал гратки $L$, а $J$ — ідеал гратки $L_M$, де $M$ — довільний максимальний ідеал гратки $L$. Тоді*

*(1)* $(p_M^{-1}(J))_M = J$*;*
*(2)* $p_M^{-1}(I_M) \supseteq I$*;*
*(3)* $I_M : p_M(r) \supseteq (I : r)_M$*;*
*(4)* $p_M^{-1}(J) : r = p_M^{-1}(J : p_M(r))$*;*
*(5)* $\operatorname{Ker} p_M \subseteq p_M^{-1}(I_M)$*;*
*(6)* $p_M^{-1}(I_M) = \{x \in L \mid \exists t \notin M : x \wedge t \in I\}$*;*
*(7) відображення* $J \to p_M^{-1}(J)$ *гратки всіх ідеалів гратки* $L_M$ *в гратку всіх ідеалів* $L$ *ін'єктивне.*

*Доведення.* (1) Включення $J \subseteq (p_M^{-1}(J))_M$ очевидне. Покажемо, що $(p_M^{-1}(J))_M \subseteq J$. Нехай $t \in (p_M^{-1}(J))_M$. Тоді $t = [s]_M$, де $s \in p_M^{-1}(J)$. Оскільки $s \in p_M^{-1}(J)$, то $[s]_M \in J$, тобто $t \in J$.

(2) Нехай $i \in I$. Оскільки $p_M^{-1}(I_M) = \{x \in L \mid [x]_M \in I_M\}$ і $i_M \in I_M$, то $i \in p_M^{-1}(I_M)$.

(3) Нехай $t \in (I : r)_M$. Тоді $t = [s]_M$, де $s \in I : r$. Оскільки $s \in I : r$, то $s \wedge r \in I$. Звідси $I_M \ni [s \wedge r]_M = [s]_M \wedge [r]_M = [s]_M \wedge p(r)$, тобто $[s]_M \in I_M : p(r)$. Таким чином, $t \in I_M : p(r)$.

(4) Встановимо включення $p_M^{-1} : r \subseteq p_M^{-1}(J : p_M(r))$. Нехай $s \in p_M^{-1}(J) : r$. Тоді $s \wedge r \in p_M^{-1}(J)$. Звідси $[s \wedge r]_M \in J$, тобто $[s \wedge r]_M = [s]_M \wedge [r]_M \in J$. Таким чином $[s]_M \in J : [r]_M$, тобто $s \in p_M^{-1}(J : [r]_M)$. Обернене включення доводиться аналогічно.

(5) Нехай $s \in \operatorname{Ker} p_M$. Тоді $[s]_M = [0]_M$. Оскільки $[0]_M \in I_M$, то $s \in p_M^{-1}(I_M)$.

(6) Нехай $x \in p_M^{-1}(I_M)$. Тоді існує елемент $i \in I$ такий, що $[x]_M = [i]_M$. Тому знайдеться такий елемент $t \notin M$, що $x \wedge t = i \wedge t$. Оскільки $i \in I$ і $I$ — ідеал гратки $L$, то з вищенаведеноі рівності випливає, що $x \wedge t \in I$.

(7) Перевіримо ін'єктивність нашого відображення. Нехай $J_1$, $J_2$ — довільні ідеали гратки $L_M$ і $p_M^{-1}(J_1) = p_M^{-1}(J_2)$. Тоді $p(p_M^{-1}(J_1)) = p(p_M^{-1}(J_2))$, а, отже, $J_1 = J_2$.

**Лема 3.** *Нехай $I$ — довільний ідеал гратки $L$, а $M$ – довільний максимальний ідеал гратки $L$. Тоді $I \not\subseteq M \Rightarrow I_M = L_M$.*

*Доведення.* Оскільки $I \not\subseteq M$, то існує таке $i \in I$, що $i \notin M$. Звідси $i \wedge i = 1 \wedge i$. Тоді $[i]_M = [1]_M$. Оскільки ідеал $I_M$ гратки $L_M$ містить одиницю $[1]_M$, то він збігається з $L_M$.

**Лема 4.** *Нехай $S$, $T$ — $\wedge$-замкнені множини гратки $L$. Тоді $S \wedge T$ також $\wedge$-замкнена множина гратки $L$.*

*Доведення.* Нехай $p_1, p_2 \in S \wedge T$. Тоді $p_1 = s_1 \wedge t_1$, $p_2 = s_2 \wedge t_2$, де $s_1, s_2 \in S$ і $t_1, t_2 \in T$. Звідси $p_1 \wedge p_2 = s_1 \wedge t_1 \wedge s_2 \wedge t_2 = s_1 \wedge s_2 \wedge t_1 \wedge t_2$. Оскільки $S$ і $T$ $\wedge$-замкнені, то $s_1 \wedge s_2 \in S$, $t_1 \wedge t_2 \in T$, тобто $p_1 \wedge p_2 \in S \wedge T$. Тепер покажемо, що $1 \in S \wedge T$. Оскільки $1 \in S$ і $1 \in T$, то $1 = 1 \wedge 1 \in S \wedge T$. Лему доведено.

**Лема 5.** *Якщо $S$ — $\wedge$-замкнена множина, що не містить нуля, то ідеал $\mathfrak{P}$, максимальний серед таких ідеалів $I$, що $I \cap S = \varnothing$, простий.*

*Доведення.* Нехай $S$ — $\wedge$-замкнена множина і $\mathfrak{P}$ — максимальний серед таких ідеалів $I$, що $I \cap S = \varnothing$, і нехай $a \notin \mathfrak{P}, b \notin \mathfrak{P}$. Покажемо, що $a \wedge b \notin \mathfrak{P}$. Оскільки $a \notin \mathfrak{P}$, то $(a] \cap S \neq \varnothing$ (в супротивному випадку $(\mathfrak{P} \vee (a])\cap = \varnothing$ ). Аналогічно $(b] \cap S \neq \varnothing$. Тоді існують такі елементи $t_1$ і $t_2$, що $a \wedge t_1 \in S$ і $b \wedge t_2 \in S$. Звідси $(a \wedge t_1) \wedge (b \wedge t_2) \in S$, тобто $(a \wedge b) \wedge (t_1 \wedge t_2) \in S$. Тоді $a \wedge b \notin \mathfrak{P}$. Справді, якщо

$a \wedge b \in \mathfrak{P}$, то $(a \wedge b) \wedge (t_1 \wedge t_2) \in \mathfrak{P}$, тобто $\mathfrak{P} \cap S \neq \varnothing$, а це суперечить умові. Лему доведено.

**Лема 6.** *Нехай $I \in \mathrm{Id}(L)$, $M_1, M_2 \in \mathrm{Max}(L)$. Тоді, якщо $I \cap ((L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)) = \varnothing$, то $I \subseteq M_1 \cap M_2$.*

*Доведення.* Оскільки $(L \setminus M_1) \cup (L \setminus M_2) \subseteq (L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)$, то $I \cap ((L \setminus M_1) \cup (L \setminus M_2)) = \varnothing$, тобто $I \cap (L \setminus M_1) = \varnothing$ і $I \cap (L \setminus M_2) = \varnothing$. Звідси $I \subseteq M_1$ і $I \subseteq M_2$, тобто $I \subseteq M_1 \cap M_2$. Лему доведено.

**Лема 7.** *Нехай $L$ — гратка, в якій не існує таких ненульових елементів $a$ і $b$, що $a \wedge b = 0$ і кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному. Тоді для будь-яких максимальних ідеалів $M_1$, $M_2$ гратки $L$ і для будь-якого ненульового ідеалу $I$ гратки $L$ маємо $I \cap ((L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)) \neq \varnothing$.*

*Доведення.* Нехай $M_1$ і $M_2$ — будь-які максимальні ідеали гратки $L$. Тоді $L \setminus M_1$ і $L \setminus M_2$ — $\wedge$-замкнені множини гратки $L$, що не містять нуля. Тоді за лемою 4 $(L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)$ — також $\wedge$-замкнена множина, що не містить нуля. Припустимо, що існує такий ненульовий ідеал $I$, що $I \cap ((L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)) = \varnothing$. Тоді за лемою 5 кожний максимальний ідеал $\mathfrak{P}$ з такою властивістю є простим. Звідси (за лемою 6) $\mathfrak{P} \subseteq M_1 \cap M_2$. Це суперечить умові, що кожний ненульовий простий ідеал гратки $L$ міститься в єдиному максимальному ідеалі. Лему доведено.

**Лема 8.** *Нехай $L$ — обмежена дистрибутивна гратка, в якій кожний простий ідеал міститься в єдиному максимальному. Тоді для будь-якого $I$ з $\mathcal{R}_0(L)$ і для будь-якого $M$ з $\mathrm{Max}(L)$ маємо $\mathrm{Max}(p_M^{-1}(I_M)) \subseteq \{M\}$. Крім цього, $(p_M^{-1}(I_M))_M = I_M$.*

*Доведення.* Остання рівність випливає з леми 1.1, якщо покласти $J = I_M$. Відмітимо, що якщо $I \not\subseteq M$, то $p_M^{-1}(I_M) = L$, оскільки за лемою 3 $I_M = L_M$ і $p_M^{-1}(L_M) = L$. Тому будемо розглядати лише такі максимальні ідеали $M$ гратки $L$, що містять $I$. Доведемо, що $\mathrm{Max}(p_M^{-1}(I_M)) = M$. Для цього розглянемо два випадки:

1) В $L$ існують хоча б два такі ненульові елементи $a$ і $b$, що $a \wedge b = 0$;
2) В $L$ не існує ненульових елементів $a$ і $b$ таких, що $a \wedge b = 0$.

Перший випадок. Нехай в $L$ існують такі елементи $a$ і $b$, що $a \wedge b = 0$. Покажемо, що якщо в $L$ кожний простий ідеал міститься в єдиному максимальному, то для будь-яких різних максимальних ідеалів $M_1$ і $M_2$ існують такі елементи $l_1 \notin M_1$ і $l_2 \notin M_2$, що $l_1 \wedge l_2 = 0$. Припустимо супротивне, тобто, що для будь-яких елементів $l_1 \notin M_1$ і $l_2 \notin M_2$ маємо $l_1 \wedge l_2 \neq 0$. Розглянемо множину $T = (L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)$. Оскільки $L \setminus M_1$ і $L \setminus M_2$ — $\wedge$-замкнені множини, що не містять нуля, то за лемою 4, $T$ — $\wedge$-замкнена множина, що не містить нуля. Ўдеал $\mathfrak{P}$, що є максимальним серед таких ідеалів $I$ гратки $L$, що $I \cap T = \varnothing$, є простим. Оскільки в $L$ є ненульові елементи $a$ і $b$, для яких $a \wedge b = 0$, то $a \in \mathfrak{P}$ або $b \in \mathfrak{P}$. Тому $\mathfrak{P}$ є ненульовим простим ідеалом гратки $L$. Оскільки $\mathfrak{P} \cap ((L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)) = \varnothing$, то за лемою 6, $\mathfrak{P} \subseteq M_1 \cap M_2$. Отже, ми отримали суперечність з тим, що кожний ненульовий простий ідеал гратки $L$ міститься в єдиному максимальному ідеалі. Таким чином, для будь-яких різних максимальних ідеалів $M_1$ і $M_2$ існують такі елементи $l_1 \notin M_1$ і $l_2 \notin M_2$, що $l_1 \wedge l_2 = 0$. Нехай $p_M$ — канонічний морфізм з $L$ в $L_M$. Оскільки $\mathrm{Ker}\, p_M = \{x \in L \mid \exists t \notin M : x \wedge t = 0\}$, то з вищевикладеного випливає, що $\mathrm{Ker}\, p_M \not\subseteq M'$ для будь-якого максимального ідеалу $M' \neq M$. За лемою 1.5 $\mathrm{Ker}\, p_M \subseteq p_M^{-1}(I_M)$. Звідси $p_M^{-1}(I_M) \not\subseteq M'$ для будь-якого $M' \in \mathrm{Max}(L) \setminus \{M\}$. Оскільки $I$ — власний, то $\mathrm{Max}(p_M^{-1}(I_M)) = \{M\}$.

Другий випадок. Нехай в $L$ не існує елементів $a$ і $b$ таких, що $a \wedge b = 0$. Нехай $I \in \mathcal{R}_0(L)$ (тобто $I$ — ненульовий). Тоді за лемою 7 для будь-яких максимальних ідеалів $M_1$, $M_2$ гратки $L$: $I \cap ((L \setminus M_1) \wedge (L \setminus M_2)) \neq \varnothing$. Нехай $M' \in \mathrm{Max}(L) \setminus \{M\}$. Тоді існує $i \in I$ таке, що $i = t_1 \wedge t_2$, де $t_1 \notin M$, $t_2 \notin M'$. За лемою 1.6 $p_M^{-1}(I_M) = \{x \in L \mid \exists t \notin M : x \wedge t \in I\}$. Звідси $p_M^{-1}(I) \nsubseteq M'$ для будь-якого $M' \in \mathrm{Max}(L) \setminus \{M\}$. Оскільки $I$ — власний, то $p_M^{-1}(I_M) \subseteq M$. Отже, $\mathrm{Max}(p_M^{-1}(I_M) = \{M\}$. Лему доведено.

**Наслідок.** *Для будь-якого власного ідеалу $J$ гратки $L_M$ маємо, що $p_M^{-1}(J)$ міститься лише в одному максимальному ідеалі, а саме в $M$.*

*Доведення.* Випливає з твердження леми 8, якщо покласти $I = p_M^{-1}(J)$.

Позначимо через $\mathcal{T}'(L)$ сім'ю всіх власних передтопологій гратки $L$, а через $\mathcal{T}(L)$ сім'ю всіх власних топологій гратки $L$. Нехай $M \in \mathrm{Max}(L)$. Тоді $\mathcal{T}'(L_M)$ — сім'я всіх всіх власних передтопологій гратки $L$, а $\mathcal{T}(L_M)$ — сім'я всіх власних топологій гратки $L_M$. Задамо тепер відображення $\Psi' \colon \mathcal{T}' \longrightarrow \prod_{M \in \mathrm{Max}(L)} \mathcal{T}'(L_M)$, яке визначається наступним чином: $\Psi'(\mathfrak{F}) = \langle \mathfrak{F}_M \rangle_{M \in \mathrm{Max}(L)}$, для кожного $\mathfrak{F} \in \mathcal{T}'(L)$. Аналогічно визначимо відображення $\Psi \colon \mathcal{T} \longrightarrow \prod_{M \in \mathrm{Max}(L)} \mathcal{T}(L_M)$, поклавши $\Psi(\mathfrak{F}) = \langle \mathfrak{F}_M \rangle_{M \in \mathrm{Max}(L)}$, де $\mathfrak{F} \in \mathcal{T}(L)$. Зазначимо, що подібні відображення були визначені у випадку кілець для ненульових радикальних фільтрів в [1],[5].

**Лема 9.** *Відображення $\Psi(\Psi')$ є сюр'єктивним тоді і тільки тоді, коли будь-який ненульовий простий ідеал гратки $L$ міститься в єдиному максимальному ідеалі гратки $L$.*

*Доведення.* Необхідність. Доведення будемо вести від супротивного. Припустимо, що в гратці $L$ існує ненульовий простий ідеал $\mathfrak{P}$ такий, що $P \subseteq M_1 \cap M_2$, де $M_1$, $M_2$ — деякі два різні максимальні ідеали гратки $L$. Розглянемо сім'ю $\mathfrak{F}$ ідеалів гратки $L$, визначену наступним чином $\mathfrak{F} = \{I \mid I$ — ідеал гратки $L$, $I \nsubseteq P\}$. Очевидно, що $\mathfrak{F}$ є топологією на гратці $L$. Для всіх максимальних ідеалів $M$ гратки $L$, відмінних від ідеалу $M_2$, розглянемо топології на гратках $L_M$ $\mathfrak{G}[M] = \mathfrak{F}_M$. Для максимального ідеалу $M_2$ визначимо топологію на гратці $L_{M_2}$ $\mathfrak{G}[M_2] = \mathcal{R}_0(L_{M_2})$. Покажемо, що $\langle \mathfrak{G}[M] \rangle_{M \in \mathrm{mspec}(L)} \in \prod_{M \in \mathrm{mspec}(L)} \mathcal{T}(L_M)$ не є образом жодної топології (перетопології) на гратці $L$ при відображенні $\Psi(\Psi')$. Від супротивного. Припустимо, що існує топологія (передтопологія) $\mathfrak{F}_1$ на гратці $L$ така, що $\Psi(\mathfrak{F}_1) = \langle \mathfrak{G}[M] \rangle_{M \in \mathrm{mspec}(L)} (\Psi'(\mathfrak{F}_1) = \langle \mathfrak{G}[M] \rangle_{M \in \mathrm{mspec}(L)})$. Тоді $(\mathfrak{F}_1)_M = \mathfrak{F}_M$ для всіх максимальних ідеалів гратки $L$, відмінних від ідеалу $M_2$, і $(\mathfrak{F}_1)_{M_2} = \mathfrak{G}[M_2]$. Оскільки $\mathfrak{G}[M_2] = \mathcal{R}_0(L_{M_2})$, то $P_{M_2} \in \mathfrak{G}[M_2]$. Оскільки $p_{M_2}^{-1}(P_{M_2})$ — найбільший ідеал гратки $L$ серед ідеалів $I$ цієї гратки з властивістю $I_{M_2} = P_{M_2}$, то $p_{M_2}^{-1}(P_{M_2}) \in \mathfrak{F}_1$. Очевидно, що $p_{M_2}^{-1}(P_{M_2}) = P$ і тому маємо, що $P \in \mathfrak{F}_1$. Звідси отримуємо, що $P_{M_1} \in (\mathfrak{F}_1)_{M_1} = \mathfrak{F}_{M_1}$. Оскільки $p_{M_1}^{-1}(P_{M_1})$ є найбільший серед ідеалів $I$ гратки $L$ з властивістю $I_{M_1} = P_{M_1}$, то $p_{M_1}^{-1}(P_{M_2}) \in \mathfrak{F}$. Має місце рівність $p_{M_1}^{-1}(P_{M_2}) = P$, а тому $P \in \mathfrak{F}$. Таким чином, отримуємо, що $P \nsubseteq P$. Ця суперечність показує, що відображення $\Psi(\Psi')$ не є сюр'єктивним. Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що в гратці $L$ виконується умова, що кожний ненульовий простий ідеал гратки $L$ міститься в єдиному максимальному ідеалі гратки $L$. Покажемо, що відображення $\Psi$ в гратці $L$ сюр'єктивне. Нехай $\langle \mathfrak{G}[M] \rangle \in \prod_{M \in \mathrm{mspec}(L)} \mathcal{T}(L_M)$ $(\langle \mathfrak{G}[M] \rangle \in \prod_{M \in \mathrm{mspec}(L)} \mathcal{T}'(L_M))$. Визначимо сім'ю ідеалів $\mathfrak{F} = \{I \mid I$ — ідеал гратки $L$ і $I_M \in \mathfrak{G}[M]$ для всіх максимальних ідеалів $M$ гратки $L\}$. Легко видно, що сім'я ідеалів $\mathfrak{F}$ гратки $L$ є топологією (передтопологією) на гратці $L$. Нехай $P$ — довільний максимальний ідеал гратки $L$. Покажемо, що $\mathfrak{F}_P = \mathfrak{G}[P]$. Включення $\mathfrak{F}_P \subseteq \mathfrak{G}[P]$ випливає з означення сім'ї ідеалів $\mathfrak{F}$ гратки $L$. Перевіримо включення $\mathfrak{G}[P] \subseteq \mathfrak{F}_P$. Нехай $J \in \mathfrak{G}[P]$. Тоді за наслідком з леми 8 ідеал $p_P^{-1}(J)$ міститься лише в одному максимальному ідеалі гратки $L$, а саме в ідеалі $P$. Звідси випливає, що $(p_P^{-1}(J))_M = L_M$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$, відмінного від ідеалу $P$. Оскільки $L_M \in \mathfrak{G}[M]$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$, то $(p_P^{-1}(J))_M \in \mathfrak{G}[M]$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$, відмінного від ідеалу $P$. За лемою 2.1 $(p_P^{-1}(J))_P = J$. Оскільки $J \in \mathfrak{G}[P]$, то і $(p_P^{-1}(J))_P \in \mathfrak{G}[P]$. Таким чином за означенням сім'ї ідеалів $\mathfrak{F}$ гратки $L$ $p_P^{-1}(J) \in \mathfrak{F}$. З цього факту і з того, що $(p_P^{-1}(J))_P = J$, випливає, що $J \in \mathfrak{F}_P$. В силу довільності максимального ідеалу $P$ гратки $L$ отримуємо, що відображення $\Psi$ для гратки $L$ є сюр'єктивним. Лему доведено.

**Означення.** Нехай $\mathfrak{F}$ — передтопологія на гратці $L$. Передтопологія $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$ називається асоційованою до передтопології $\mathfrak{F}$, якщо $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathcal{B}(L)$ і $\mathfrak{F}_M = (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M$ для кожного максимального ідеалу $M$ гратки $L$, тобто $\Psi'(\mathfrak{F}) = \Psi'(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$.

**Лема 10.** *Нехай $L$ — гратка, в якій кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. Тоді для будь-якої власної передтопології $\mathfrak{F}$ існує асоційована до неї передтопологія $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$.*

*Доведення.* Нехай $M$ — довільний максимальний ідеал гратки $L$. Розглянемо в якості передтопології $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$ передтопологію $\mathfrak{F} \cap \mathcal{B}(L)$. Покажемо, що $(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M = \mathfrak{F}_M$. Включення $(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M \subseteq \mathfrak{F}_M$ випливає з включення $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{F}$. Покажемо, що має місце обернене включення: $\mathfrak{F}_M \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}_M$. Покажемо, що $J \in (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M$. Оскільки $J \in \mathfrak{F}_M$, то існує ідеал $I$ з передтопології $\mathfrak{F}$ такий, що $I_M = J$. За лемою 2.2 маємо, що $I \subseteq p_M^{-1}(I_M)$. Звідси і з умови $T1$ означення передтопології випливає, що $p_M^{-1}(I_M) \in \mathfrak{F}$. Оскільки в гратці $L$ виконується умова, що кожний ненульовий простий ідеал цієї гратки міститься в єдиному максимальному ідеалі, то за лемою 8 ідеал $p_M^{-1}(I_M)$ міститься не більш, ніж в одному максимальному ідеалі. Отже, $p_M^{-1}(I_M) \in \mathcal{B}(L)$. Таким чином, $p_M^{-1}(I_M) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$, тобто $(p_M^{-1}(I_M) \in (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M$. За лемою 2.1 $(p_M^{-1}(I_M))_M = I_M$. Звідси і з попереднього включення маємо, що $I_M \in (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M$. З того, що $J = I_M$ випливає, що $J \in (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M$, що і треба було довести. З довільності вибору максимального ідеалу $M$ гратки $L$ маємо, що $\Psi'(\mathfrak{F}) = \Psi'(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$. Лему доведено.

**Теорема 1.** *Відображення $\Psi'$, визначене для гратки $L$, є бієктивним тоді і тільки тоді, коли гратка $L$ є $h$-локальною.*

*Доведення.* Необхідність. Ўз сюр'єктивності відображення $\Psi'$ в гратці $L$ за лемою 9 випливає, що гратка $L$ задовольняє умову, що будь-який ненульовий простий ідеал цієї гратки міститься в єдиному максимальному ідеалі. Тепер покажемо, що гратка $L$ задовольняє і таку умову, що будь-який ненульовий елемент гратки $L$ міститься лише в скінченній кількості максимальних ідеалів. Нехай $x$ — будь-який ненульовий елемент гратки $L$. Розглянемо сім'ю ідеалів $\mathfrak{F}$ гратки $L$, визначену наступним чином: $\mathfrak{F} = \{I \in \mathrm{Id}(L) \mid I \supseteq (x]\}$. Очевидно, що сім'я ідеалів $\mathfrak{F}$ утворює передтопологію на гратці $L$. За лемою 10 для передтопології $\mathfrak{F}$ існує передтопологія $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathcal{B}(L)$ така, що $(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M = \mathfrak{F}_M$ для всіх максимальних ідеалів $M$ гратки $L$. Таким чином, ми отримали, що $\Psi'(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}) = \Psi'(\mathfrak{F})$. Оскільки, за умовою відображення $\Psi'$ в гратці $L$ ін'єктивне, то ми маємо, що $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$. Звідси випливає включення $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{B}(L)$, тобто $(x] \in \mathcal{B}(L)$. Це означає, що елемент $x$ гратки $L$ міститься лише в скінченній кількості максимальних ідеалів цієї гратки. Отже, гратка $L$ є $h$-локальною, що і треба було довести.

Достатність. Нехай гратка $L$ $h$-локальна. Покажемо, що відображення $\Psi'$ в гратці $L$ бієктивне. Оскільки, гратка $L$ $h$-локальна, то вона задовольняє умову, що кожний її ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. Тоді за лемою 9 випливає, що відображення $\Psi'$ в гратці $L$ є сюр'єктивним. Тепер покажемо, що відображення $\Psi'$ в гратці $L$ є ін'єктивним. Нехай $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$ — будь-які ненульові передтопології на гратці $L$ такі, що виконується умова: $(\mathfrak{F}_1)_M = (\mathfrak{F}_2)_M$ для всіх максимальних ідеалів $M$ гратки $L$. Покажемо, що виконується рівність $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$. Достатньо показати включення $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Обернене включення випливає з рівноправності передтопологій $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$ гратки $L$. Нехай $I \in \mathfrak{F}_1$. Тоді для кожного максимального ідеалу $M$ існує ідеал $J^M \in \mathfrak{F}_2$ такий, що $I_M = (J^M)_M$. За лемою 2.7 для кожного максимального ідеалу $M$ маємо, що $p_M^{-1}(I_M) = p_M^{-1}((J^M)_M)$. Оскільки за лемою 2.2 має місце включення $J^M \subseteq p_M^{-1}((J^M)_M)$, то має місце і включення $J^M \subseteq p_M^{-1}(I_M)$. З цього включення і з того, що $J^M \in \mathfrak{F}_2$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$ за умовою $T1$ для передтопології $\mathfrak{F}_2$ випливає, що $p_M^{-1}(I_M) \in \mathfrak{F}_2$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$. За лемою 1 маємо рівність $I = \bigcap_{M\in \mathrm{mspec}(L)} p_M^{-1}(I_M)$. Оскільки ідеал $I$ міститься лише в скінченній кількості максимальних ідеалів гратки $L$, то за лемою 3 $p_M^{-1}(I_M) = L$ майже для всіх максимальних ідеалів $M$ гратки $L$, тобто для всіх максимальних ідеалів гратки $L$, крім максимальних ідеалів з множини $\mathrm{Max}(I)$. Нехай $\mathrm{Max}(I) = \{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$. Тоді маємо, що $I = \bigcap_{i=1}^{n} p_{M_i}^{-1}(I_{M_i})$. З того, що для будь-якого $i = 1, 2, \cdots, n$ $p_M^{-1}(I_{M_i}) \in \mathfrak{F}_2$ за умовою $T_2$ для передтопології $\mathfrak{F}_2$ маємо, що $I \in \mathfrak{F}_2$, що і треба було довести. Теорему доведено.

**Лема 11.** *Відображення $\Psi$, визначене для гратки $L$, бієктивне тоді і тільки тоді, коли гратка $L$ задовольняє такі умови:*

1) *кожний ненульовий простий ідеал гратки $L$ міститься в єдиному максимальному ідеалі;*
2) *для будь-якої власної топології $\mathfrak{F}$ на гратці $L$ маємо, що $\mathfrak{F} = J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$, де $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$ — передтопологія гратки $L$, асоційована з топологією $\mathfrak{F}$.*

*Доведення.* Необхідність. Нехай відображення $\Psi$ в гратці $L$ є бієктивним. З сюр'єктивності відображення $\Psi$ за лемою 9 випливає перша умова. Покажемо справедливість другої умови. Нехай $\mathfrak{F}$ — довільна топологія на гратці $L$. Тоді за лемою 10 існує передтопологія $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathcal{B}(L)$ така, що має місце рівність $\mathfrak{F}_M = (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$. За побудовою $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$ в доведенні леми 13 $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \cap \mathcal{B}(L)$. Звідси маємо включення $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{F}$. Оскільки $\mathfrak{F}$ — топологія на гратці $L$, що містить передтопологію $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$, а $J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$ — найменша топологія на гратці $L$, що містить передтопологію $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$, то має місце включення $J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{F}$. З ланцюга включень $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}} \subseteq J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}) \subseteq \mathfrak{F}$ і рівностей $\mathfrak{F}_M = (\mathcal{B}_{frakF})_M$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$ маємо рівності $J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})_M = \mathfrak{F}_M$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$. Оскільки $\mathfrak{F}$ і $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}}$ — топології на гратці $L$, то маємо, що $\Psi(\mathfrak{F}) = \Psi(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$. З ін'єктивності відображення $\Psi$ маємо рівність $\mathfrak{F} = J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$, що і треба було довести.

Достатність. Нехай гратка $L$ задовольняє умови 1) і 2). Покажемо, що відображення $\Psi$ в гратці $L$ є бієктивним. З умови 1) за лемою 9 маємо, що відображення $\Psi$ є сюр'єктивним. Покажемо, що відображення $\Psi$ є ін'єктивним. Нехай $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$ — будь-які ненульові топології на гратці $L$ такі, що для них виконуються рівності $(\mathfrak{F}_1)_M = (\mathfrak{F}_2)_M$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$. Оскільки за лемою 10 мають місце рівності $(\mathfrak{F}_1)_M = (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_1})_M$ і $(\mathfrak{F}_2)_M = (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_2})_M$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$, то з попередніх рівностей випливають рівності $(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_1})_M = (\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_2})_M$ для будь-якого максимального ідеалу $M$ гратки $L$. Оскільки всі ідеали з передтопологій $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_1}$ і $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_2}$ гратки $L$ містяться лише в скінченній кількості максимальних ідеалів цієї гратки, то, застосовуючи міркування як і при доведенні теореми 1, отримаємо рівність $\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_1} = \mathcal{B}_{\mathfrak{F}_2}$. Звідси маємо, що $J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_1}) = J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_2})$. За умовою 2) маємо рівності $\mathfrak{F}_1 = J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_1})$ і $\mathfrak{F}_2 = J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}_2})$. Таким чином, отримуємо, що $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$, що і треба було довести. Лему доведено.

**Лема 12.** *Наступні умови в гратці $L$ еквівалентні:*
*1) Для будь-якої топології $\mathfrak{F}$ на гратці $L$ виконується рівність: $\mathfrak{F} = J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$.*
*2) Для будь-якого ненульового ідеалу $I$ гратки $L$ ідеал $K(I)$ міститься лише в скінченній кількості максимальних ідеалів гратки $L$, тобто $K(I) \in \mathcal{B}(L)$.*

*Доведення.* 1) $\Leftarrow$ 2). Оскільки $\mathcal{R}_0(L)$ утворює топологію на гратці $L$, то за умовою 1) маємо рівність $\mathcal{R}_0(L) = J(\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0(L)})$. Оскільки має місце рівність $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0(L)} = \mathcal{B}(L)$, то $\mathcal{R}_0(L) = J(\mathcal{B}(L)$. Можна переконатися, що якщо $\mathfrak{F}$ — передтопологія на гратці $L$, то $J(\mathfrak{F}) = \{I$ — ідеал гратки $L \mid \exists J \in \mathfrak{F} : I \subseteq J, \forall j \in JI : j \in \mathfrak{F}\}$. Звідси має місце рівність $\mathcal{R}_0(L) = \{I$ — ідеал гратки $L \mid \exists J \in \mathcal{B}(L) : I \subseteq J, \forall j \in JI : j \in \mathcal{B}(L)\}$. Оскільки $J \subseteq K(I)$, то $\mathcal{R}_0(L) = \{I$ — ідеал гратки $L \mid K(I) \in \mathcal{B}(L)\}$. Отже, для будь-якого ненульового ідеалу $I$ гратки $L$ маємо, що $K(I) \in \mathcal{B}(L)$, що і треба було довести.

2) $\Leftarrow$ 1). Нехай має місце умова 2). Тоді для будь-якого ненульового ідеалу $I$ гратки $L$ маємо включення $K(I) \in \mathcal{B}(L)$. Отже, виконується рівність $\mathcal{R}_0(L) = \{I$ — ідеал гратки $L \mid K(I) \in \mathcal{B}(L)\}$. Застосовуючи ці самі міркування, що і при доведенні необхідності, отримуємо $\mathcal{R}_0(L) = J(\mathcal{B}(L))$. Нехай $\mathfrak{F}$ — довільна власна топологія на гратці $L$. Тоді мають місце рівності $\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \cap \mathcal{R}_0(L) = \mathfrak{F} \cap J(\mathcal{B}(L)) = J(\mathfrak{F} \cap \mathcal{B}(L)) = J(\mathcal{B}_{\mathfrak{F}})$. Лему доведено.

З лем 11 і 12 випливає справедливість такого твердження:

**Теорема 2.** *Відображення $\Psi$, визначене для гратки $L$, є бієктивним тоді і тільки тоді, коли гратка $L$ є $h$-квазілокальною.*

Наступний приклад встановлює існування нетривіальних $h$-локальних граток.

**Приклад 1.** Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $L = \{\mathbb{N} \setminus K \mid K$ — скінченна підмножина множини $\mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}$. Тоді $L$ є граткою відносно перетину і об'єднання множин. Нулем в ній є порожня множина, а одиницею $\mathbb{N}$. Очевидно, що ця гратка є дистрибутивною (як підгратка дистрибутивної гратки всіх підмножин множини натуральних чисел). Доведемо, що гратка $L$ є $h$-локальною. Спочатку покажемо, що в $L$ кожний ідеал головний, тобто для будь-якого ідеалу $I$ маємо $I = (M]$ для деякого $M \in L$. (Нагадаємо, що $(M] = \{J \in L \mid J \subseteq M\}$). Для нульового ідеалу, тобто ідеалу, що складається лише з порожньої множини, це очевидно. Тому будемо припускати, що $I$ — деякий ненульовий ідеал гратки $L$. Введемо поняття носія ідеалу $I$: $\mathrm{supp}(I) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \notin X$ для кожної множини $X \in I\}$. Зауважимо, що якщо $I$ — ненульовий ідеал гратки $L$, то існує така множина $X \in I$, що $X = \mathbb{N} \setminus K$, де $K$ — скінченна підмножина множини $\mathbb{N}$. З означення носія ідеалу $I$ випливає, що $\mathrm{supp}(I) \subseteq K$. Оскільки $K$ — скінченна множина, то і $\mathrm{supp}(I)$ — скінченна множина. Нехай $\mathrm{supp}(I) = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. З того, що $X \in I$ випливає, що $X = \mathbb{N} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}, \ldots, k_{n+m}\}$. Оскільки $\mathrm{supp}(I) = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, то в $I$ існують елементи $T_1, \ldots, T_m$ такі, що $k_{n+1} \in T_1, \ldots, k_{n+m} \in T_m$. Візьмемо множину $M$ наступним чином: $M = X \cup T_1 \cup \ldots \cup T_m = \mathbb{N} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Тоді, оскільки $X, T_1, \ldots, T_m \in I$, то $M \in I$, а, отже, $(M] \subseteq I$. З того, що $\mathrm{supp}(I) = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ випливає, що для будь-якої непорожньої множини $\mathbb{N} \setminus K \in I$ справедливе наступне включення $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subseteq K$. Звідси одержимо включення $\mathbb{N} \setminus K \subseteq \mathbb{N} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} = M$. Оскільки для будь-якого $X \in I$

маємо, що $X \subseteq M$, то $I \subseteq (M]$. Отже, $I = (M]$. Якщо $K$ — скінченна, то позначимо через $I_K$ ідеал $(M]$, де $M = \mathbb{N}\setminus K$. Оскільки кожний ідеал є головним, тобто дорівнює $I_K$ для деякої скінченної підмножини $K$ множини $\mathbb{N}$, то існує взаємно однозначна відповідність між ненульовими ідеалами гратки $L$ і скінченними підмножинами множини $L$, яка діє так: кожному ідеалу $I$ ставиться у відповідність його носій $\mathrm{supp}(I)$ і, навпаки, кожній скінченній підмножині $K$ множини $\mathbb{N}$ ставиться у відповідність ідеал $I_K$. При цьому мають місце наступні співвідношення $I_{K_1} \cup I_{K_2} = I_{K_1 \cap K_2}$; $I_{K_1} \cap I_{K_2} = I_{K_1 \cup K_2}$; $I_{K_1} \subseteq I_{K_2} \Leftrightarrow K_1 \supseteq K_2$ (тобто ця відповідність є антиізоморфізмом гратки $\mathrm{Id}(L)\setminus\{0\}$ на множину скінченних підмножин множини натуральних чисел). Звідси випливає, що $M$ — максимальний ідеал, тоді і тільки тоді, коли $M = I_K$, де $K = \{k\}$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Тоді $\mathrm{Max}(L) = \{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $M_k = \{X \in L \mid k \notin X\}$. Покажемо, що $\mathrm{Spec}(L) = \mathrm{Max}(L)$. Справді, нехай $I$ — деякий ідеал, що не є максимальним. Тоді $I = I_K$, де $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, причому $n \geq 2$. Оскільки $\mathbb{N} \setminus K = \mathbb{N} \setminus \{k_1\} \cap \mathbb{N} \setminus \{k_2, \ldots, k_n\} \in I$, а $\mathbb{N} \setminus \{k_1\}, \mathbb{N} \setminus \{k_2, \ldots, k_n\} \notin I$, то ідеал $I$ не є простим. Отже, виконується перша умова $h$-локальності. Покажемо, що виконується і друга умова. Нехай $I$ — довільний ненульовий ідеал гратки $L$. Тоді $I = I_K$ для деякої скінченної множини $K$. Оскільки гратка ненульових ідеалів гратки $L$ антиізоморфна до гратки скінченних підмножин множини $\mathbb{N}$ і кожна множина $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ містить скінченне число мінімальних елементів гратки скінченних множин $\{k_1\}, \{k_2\}, \ldots, \{k_n\}$, то $\mathrm{Max}(I_K) = \{M_k\}_{k \in K}$. Отже, гратка $L$ є $h$-локальною.

**Приклад 2.** Наведемо приклад гратки, яка не є $h$-локальною. Нехай $X$ — довільна нескінченна множина і $L = 2^X$ (множина всіх підмножин множини $X$). Тоді $L$ є граткою відносно перетину і об'єднання множин. Ця гратка є обмеженою дистрибутивною граткою. Покажемо, що вона не є $h$-локальною. Як і в першому прикладі $\mathrm{Spec}(L) = \mathrm{Max}(L)$. Покажемо, що не виконується друга умова $h$-локальності. Розглянемо ідеал $(M]$, де $M \in L$, така, що $X \setminus M$ — нескінченна. Тоді, як і в прикладі 1, можна показати, що $\mathrm{Max}((M]) \supseteq \{M_l\}_{l \in X \setminus M}$, де $M_l = \{N \in L \mid l \notin N\}$. Оскільки $X \setminus M$ нескінченна, то і $\mathrm{Max}((M])$ нескінченна. Отже, гратка $L$ не є $h$-локальною.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Brandal W., Barbut E. *Localizations of torsion theories* Pacific J. Math., 1983. 107. №1. P.27–37.
2. Georgescu G. *$\mathfrak{F}$-multipliers and the localization of distributive lattices* Algebra Universalis, 1985. 21. P.181–197.
3. Georgescu G. *$\mathfrak{F}$-local distributive lattices* Math. Japonica, 1990. 35. №5. P.909–916.
4. Brezuleanu A. and Diaconescu R., *Sur la duale de la categorie des treillies* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XIY, 3(1969), P.311–323.
5. Тушницкий И.Я. *Кольца с локально определенными кручениями* Алгебра и логика, 1991. 30. №3. С.369–377.
6. Тушницький Ў.Я. *Кільця з локально визначеними крученнями* Тематичний збірник наукових праць "Алгебра і топологія". Київ. 1993. С.88–109.
7. Тушницкий И.Я. О локализациях решеток Алгебра и анализ. Тезисы докладов международной конференции памяти Н. Чеботарева. ч.1., Казань. 1994, С.94.


Львівський університет, Механіко-математичний ф-т.

*Надійшло 15.01.1997*