УДК 512.64

ПРО СПЕЦІАЛЬНІ ДІЛЬНИКИ СИНГУЛЯРНИХ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

М.І. Кучма

M.I. Kuchma. *On special divisors of singular matrix polynomials*, Matematychni Studii, **8**(1997) 153–156.

We obtain necessary and sufficient conditions for decomposition of a matrix polynomial $A(x)$ as a product $A(x)=B(x)C(x)$ of two singular matrix polynomials with some special properties.

Відомо, що теорія виділення із матричного многочлена

$$A(x)=\sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}, \quad A_i\in M_n(\mathbb{C}), \quad \det A(x)\not\equiv 0, \tag{1}$$

регулярного множника, тобто зображення $A(x)$ у вигляді:

$$A(x)=B(x)C(x), \tag{2}$$

де $B(x)=\sum_{i=0}^{r} B_i x^{r-i}$, причому $\det \mathrm{B}_0\neq 0$, була розроблена в роботі [1]. Проте в прикладних задачах лінійної алгебри, в теорії матричних многочленів і систем диференціальних рівнянь використовуються факторизації, в яких дільник $B(x)$ сингулярний, тобто $B(x)$ — неособливий матричний многочлен, в якому $\det B_0=0$.

У даній роботі знайдено критерій виділення із сингулярного матричного многочлена (1) множника $B(x)$ із наперед заданою системою інваріантних многочленів і нескінченних елементарних дільників. Отриманий результат застосовується до питання про виділення спеціальних множників із матричного многочлена (1) при умові на степені цих множників і до питання про зведення перетворенням подібності сингулярного матричного многочлена до блочно-трикутного вигляду.

Для зручності будемо використовувати термінологію і позначення, наведені в [1],[2].

Нехай $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$ — деякий многочлен (зокрема, $A(x)$ вигляду (1)). Тоді позначатимемо через $\widetilde{f}(x)$ зворотний до $f(x)$ многочлен, $\widetilde{f}(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^{i}$. Якщо $\deg f(x)=m$, то очевидно $\widetilde{f}(x)=x^m f(1/x)$.

Нехай канонічна діагональна форма [3] (форма Сміта) матричного многочлена $A(x)$ має вигляд:

$$S_{A(x)}=U(x)A(x)V(x)=\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x)), \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A23.

де $\varepsilon_i(x) = (x-\alpha_1)^{l_{1i}} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_t)^{l_{ti}}$, причому $0 \le l_{k1} \le l_{k2} \le \cdots \le l_{kn}$, $k = 1, \ldots, t$. Будемо вважати, що в (3) всі корені α_i відмінні від нуля, оскільки це завжди можна при необхідності досягнути заміною змінної $x = y - \beta$, де β — довільне число, відмінне від скінченної кількості коренів α_i многочлена $\det A(x)$.

Згідно результатів роботи [2] формою Сміта $\widetilde{A}(x)$ зворотного матричного многочлена до $A(x)$ є матриця

$$S_{\tilde{A}(x)} = P(x)\widetilde{A}(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\overset{\infty}{\varepsilon}_1(x), \ldots, \overset{\infty}{\varepsilon}_n(x)), \tag{4}$$

де $\overset{\infty}{\varepsilon}_i(x) = x^{k_i}(x - 1/\alpha_i)^{l_{1i}} \cdot \ldots \cdot (x - 1/\alpha_t)^{l_{ti}}$, $0 \le k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n$, $i = 1, \ldots, n$.

Зауважимо, що елементарні дільники x^{k_i} матричного многочлена $\widetilde{A}(x)$ називають нескінченними елементарними дільниками сингулярного матричного многочлена $A(x)$. Якщо ж $A(x)$ регулярний, то, очевидно, що всі k_i рівні нулю.

На основі доведених в [2] тверджень і розробленої в [1] теорії виділення із матричного многочлена $\widetilde{A}(x)$ регулярного множника одержимо наступний критерій виділення із $A(x)$ сингулярного множника $B(x)$ при умові $\deg A(x) = \deg B(x) + \deg C(x)$ із наперед заданою системою елементарних дільників.

Теорема 1. *Щоб матричний многочлен (1) міг бути зображений у вигляді $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ — сингулярний матричний многочлен степеня r з формою Сміта $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ і системою нескінченних елементарних дільників $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_n}$, $0 \le l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n$, $\sum_{i=1}^n l_i = mn - \sum_{i=1}^n \deg \varphi_i(x)$, причому $\deg A(x) = \deg B(x) + \deg C(x)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\det M_{V(\overset{\infty}{\Phi})P(x)\|EEx\ldots Ex^{r-1}\|}(\overset{\infty}{\Phi}) \neq 0,$$

де $\overset{\infty}{\Phi}(x) = \operatorname{diag}(x^{l_1}\widetilde{\varphi_1}(x), \ldots, x^{l_n}\widetilde{\varphi_n}(x))$, $P(x)$ — довільна оборотня із співвідношення (4), $V(\overset{\infty}{\Phi})$ — ядро визначальної матриці $W(\overset{\infty}{\Phi})$, введеної в [4].

Важливим є дослідження питання про виділення із матричного многочлена $A(x)$ сингулярного множника $B(x)$ спеціального вигляду

$$B(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де $T \in M_{n-p,p}(\mathbb{C})$, $D(x)$ — унітальний матричний многочлен степеня r порядку p.

Твердження 1. $A(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} C_1(x)$, *причому* $\deg A(x) = \deg \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} + \deg C_1(x)$, *тоді і тільки тоді, коли* $A(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} C(x)$, *причому* $\deg A(x) = \deg \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} + \deg C(x)$.

Доведення. Справді, матриці $\begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}$ є правоеквівалентними, бо $\begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & E_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}$. Тому якщо $A(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} C(x)$, причому $\deg A(x) = \deg \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} + \deg C(x)$, то

$$A(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & E_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-p} & -T \\ 0 & E_p \end{pmatrix} C(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-p} & -T \\ 0 & E_p \end{pmatrix} C(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} C_1(x),$$

причому

$$\deg A(x) = \deg \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} + \deg \begin{pmatrix} E_{n-p} & -T \\ 0 & E_p \end{pmatrix} + \deg C(x) = \deg \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} + \deg C_1(x).$$

Навпаки, якщо $A(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & T \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} C_1(x)$, то $A(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} C(x)$.

Наступні твердження дають опис форми Сміта спеціального матричного многочлена (5) і його нескінченних елементарних дільників.

Твердження 2. *Нехай форма Сміта матричного многочлена $\widetilde{D}(x)$ має вигляд*

$$S_{\tilde{D}(x)} = \operatorname{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_p(x)).$$

Тоді при $n \leq 2p$

$$S_{E_{n-p}x^r \oplus \tilde{D}(x)} = E_{n-p} \oplus \operatorname{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_{2p-n}(x)) \oplus \operatorname{diag}(x^r \psi_{2p-n+1}(x), \dots, x^r \psi_p(x),$$

а при $n > 2p$

$$S_{E_{n-p}x^r \oplus \tilde{D}(x)} = E_p \oplus \operatorname{diag}(\underbrace{x^r, \dots, x^r}_{n-2p}) \oplus \operatorname{diag}(x^r \psi_1(x), \dots, x^r \psi_p(x)).$$

Доведення. Оскільки згідно накладеної вище умови $(\det \widetilde{D}(x), x^{r(n-p)}) = 1$, то, зважаючи на результати роботи [5], переконуємось у справедливості даного твердження.

Твердження 3. *Кількість нескінченних елементарних дільників матричного многочлена (5) збўгається з порядком одиничної матриці із (5).*

Доведення. Матричний многочлен $\widetilde{B}(x)$ зворотний до $B(x)$ є регулярним в силу зробленого припущення (корені характеристичного многочлена $\det \widetilde{D}(x)$ відмінні від нуля) і має $n-p$ штук елементарних дільників вигляду x^r. Вони за означенням є нескінченними елементарними дільниками для матричного многочлена $B(x)$.

Нехай $A(x)$ — сингулярний матричний многочлен степеня m з формою Сміта
$\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x))$. Позначимо через Φ_p матрицю:

$$\Phi_p = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-p}, \varphi_{n-p+1}(x), \dots, \varphi_n(x)), \tag{6}$$

де $\varphi_j(x) | \varphi_{j+1}(x)$, $j = n-p+1, \dots, n-1$, причому $\varphi_k(x) | \varepsilon_k(x)$, $k = n-p+1, \dots, n$. Позначимо через $\overset{\infty}{\Phi}_p$ одну із матриць:

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-p}, \widetilde{\varphi}_{n-p+1}(x), \dots, \widetilde{\varphi}_p(x), x^r \widetilde{\varphi}_{p+1}(x), \dots, x^r \widetilde{\varphi}_n(x)), \tag{7}$$

при $n \leq 2p$, і

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{x^r, \dots, x^r}_{n-2p}, x^r \widetilde{\varphi}_{n-p+1}(x), \dots, x^r \widetilde{\varphi}_n(x)), \tag{8}$$

при $n > 2p$.

Тоді має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Для того, щоб із матричного многочлена $A(x)$ виділявся множник $B(x)$ спеціального вигляду (5) степеня r з формою Сміта Φ_p, причому $\deg A(x) = \deg B(x) + \deg C(x)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\det M_{V(\overset{\infty}{\Phi}_p)P(x)||EEx\ldots Ex^{r-1}||}(\overset{\infty}{\Phi}_p) \neq 0,$$

де $P(x)$ — довільна оборотня матриця із співвідношення (4), $V(\overset{\infty}{\Phi}_p)$ — ядро визначальної матриці $W(\overset{\infty}{\Phi}_p)$ з [4].

Доведення. Якщо

$$A(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} C(x), \tag{9}$$

причому

$$\deg A(x) = \deg \begin{pmatrix} E_{n-p} & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} + \deg C(x), \tag{10}$$

то

$$\widetilde{A}(x) = \begin{pmatrix} E_{n-p}x^r & 0 \\ 0 & \widetilde{D}(x) \end{pmatrix} \widetilde{C}(x), \tag{11}$$

і, навпаки, із рівності (11) випливає рівність (9). Тоді згідно доведення тверджень 2 і 3 розклад (9) має місце тоді і тільки тоді, коли із матричного многочлена $\widetilde{A}(x)$ виділяється регулярний множник із формою Сміта (7) або (8).

Задача про виділення із сингулярного матричного многочлена спеціального множника застосовується до зведення матричного многочлена перетворенням подібності до блочно-трикутного вигляду.

Теорема 3. *Нехай для сингулярного матричного многочлена $A(x)$ має місце (9) при умові (10). Тоді існує неособлива числова матриця $Q \in M_n(\mathbb{C})$ така, що*

$$QA(x)Q^{-1} = \begin{pmatrix} A_1(x) & * \\ 0 & A_2(x) \end{pmatrix},$$

де $A_2(x) \in M_p(\mathbb{C}[x])$.

Доведення теореми випливає із теорем 2 і 3 розділу V, §2. Зауважимо, що обернена теорема місця не має.

ЛІТЕРАТУРА

1. П. Казімірський. Розклад матричних многочленів на множники. — Київ: Наукова думка, 1981. 224с.
2. В. Зеліско. *Сингулярні дільники матричного многочлена* Вісник Львівського університету, сер.мех.-мат., 1996, вип.43. С.13–15.
3. Ф. Гантмахер. Теория матриц. — Москва:Наука, 1988. 552с.
4. П. Казимирский, В. Щедрик. *О решениях матричных многочленных односторонних уравнений* ДАН СССР, 1989. Т.304, №2. С.271–274.
5. M. Newnan. *The Smith Normal Form of a Partitioned Matrix* Journ. Res. Bur. Stand. Math. Sci., 1974. V78B, №1. P.233–244.

Львўвський унўверситет, мех.-мат. ф-т.,
Львўв, 290602, Унўверситетська 1,

Надійшло 20.11.1996